

I - II 复合型唇形裂纹尖端塑性区分析*

陈建良¹ 张 鸿¹ 胡雪兰^{1**} 李湘萍¹ 唐云冰² 谢小虎²

(¹ 中国民航大学中欧航空工程师学院, 天津, 300300)(² 常州环能涡轮动力股份有限公司, 常州, 213002)

摘 要 本文采用保角变换方法, 建立了拉伸载荷下 I / II 复合型唇形裂纹的扩展模型, 基于 Irwin 小屈服等效假设, 建立了拉伸载荷下 I - II 复合型唇形裂纹尖端塑性区模型, 得到了唇形裂纹尖端塑性区 I 型和 II 型应力强度因子的表达式, 基于该模型, 进一步得到了唇形裂纹尖端延长线上的应力分布, 并建立拉伸仿真模型, 将唇形裂纹尖端应力分布理论解与弹塑性仿真解以及线弹性仿真解进行对比, 研究结果表明: 基于 Irwin 小屈服等效假设修正后的唇形裂纹尺寸会变大, 唇形裂纹等效应力强度因子变大; 唇形裂纹的形状参数的改变会对塑性区产生影响, 相同宽长比情况下, 半长越大, 塑性区尺寸越大, 相同半长情况下, 宽长比越大, 塑性区尺寸越小, 且伴随唇形裂纹倾斜角越大, 塑性区尺寸也会相应增加; 基于 Irwin 小屈服等效假设的唇形裂纹尖端塑性修正理论与塑性有限元仿真具有较好的一致性, 伴随唇形裂纹倾斜角增加, 裂纹尖端的应力水平降低, 一方面, 这是由于裂纹扩展形式由 I 型向 I - II 复合型的转变造成的影响, 另一方面, 对于大倾斜角情况下, 唇形裂纹腹部出现应力屈服现象, 对唇形裂纹尖端应力集中产生分担的影响, 造成裂纹尖端应力水平的降低。

关键词 唇形裂纹, 复变函数, 保角映射, I - II 复合型裂纹, 裂纹尖端塑性区

DOI: 10. 19636/j. cnki. cjsm42-1250/o3. 2023. 046

0 引言

对于大多数金属材料来说, 裂纹在扩展过程中裂纹尖端存在塑性变形区, 裂纹尖端塑性区的存在对裂纹的萌生、扩展起到决定作用. Irwin^[1] 提出了应力强度方法, 用应力强度因子来表示裂纹失稳扩展的条件, 即应力强度因子大小达到临界应力强度因子, 裂纹开始扩展. 继 Irwin 之后, Dugdale^[2] 通过假设裂纹扩展的塑性变形集中在裂纹前端的窄条中, 建立了窄条屈服模型. Rice 和 Drucker^[3] 证明了理想弹塑性材料在平面应力状态下, 其裂纹尖端附近屈服区为条状, 为 Dugdale 的窄条屈服模型提供理论支撑. Kang 和 Beom^[4] 通过 Irwin 和 Dugdale 的模型方法, 预测了复合材料在 I 型加载和小范围屈服条件下的裂纹塑性区尺寸. Torabi^[5] 通过修正后的 Irwin 模型, 结合 Tresca 和 Von-Mises 屈服准则, 确定了 I 型裂纹在平面应力载荷情况下的塑性区大小. 2021 年, Torabi^[6] 研究了在平面应力条件

下, I - II 混合型裂纹的裂纹塑性区大小问题. Sousa^[7] 认为经典的 Irwin 塑性区假设仅仅只依靠有效应力强度因子, 其精度易受到应力-屈服强度比的影响, 为了更好的估计塑性区大小, 通过 T 应力对裂纹尖端塑性区进行修正性估计. Fakir^[8] 在经典 Irwin 模型的基础上, 提出了一种对 Irwin 模型的修正方法, 从而求解出塑性区的大小, 并通过 Von-Mises 屈服准则和 Tresca 屈服准则结合有限元方法对公式进行了验证. 国内也有很多学者对于该问题进行了研究, 刘元镛^[9] 基于铝合金材料研究了平面应力条件下, 裂纹的稳定扩展和动态塑性的低速裂纹问题, 发现三轴应力只与试件的几何形状和加载方式有关. 李亚^[10] 针对理想弹塑性材料, 通过裂纹线场分析方法, 解决了有限宽裂纹板 Dugdale 模型虚拟裂纹在特定边界条件下应力强度因子的解析求解, 得出了有限宽裂纹板 Dugdale 模型塑性区尺寸的解析表达式. Yang^[11] 基于小范围屈服条件下的

* 中央高校基本科研业务费专项(3122019180)资助.

2023-08-30 收到修改稿, 2023-09-08 网络首发.

** 通讯作者. E-mail: huxlemma@163.com.

Dugdale 模型, 提出了一种用于求解含裂纹的理想弹塑性半空间在接触载荷作用下的次表面应力分布和塑性区问题的半解析解. 发现材料的裂纹尖端塑性区大小受到初始裂纹长度和深度、材料屈服强度和载荷加载条件的影响.

上述学者关于裂纹尖端塑性区的研究主要以直线型裂纹和椭圆型裂纹为主, 但在实际工程问题中, 真实裂纹的上下两个表面之间存在距离, 裂纹的形状通常表现为具有曲边多角形的几何结构^[12]. 唇形裂纹是其中比较典型的一种裂纹, 不仅同时具备直线型裂纹和椭圆形裂纹的诸多特点, 而且更贴合实际^[12]. Muskhelishvili^[13]使用复变函数方法将平面弹性问题转化为求解解析函数的边值问题. Xie^[14]研究了唇形裂纹尖端混合位错的裂纹特性. Wang^[15]通过保角变换方法, 求解出各向同性材料中反平面剪应力对裂纹尖端无错位区的影响. Li 等^[16]基于最大能量释放率准则建立了唇形裂纹的损伤准则, 并对陶瓷基复合材料横向拉伸损伤演化进行了预测.

目前关于唇形裂纹的主要研究集中在弹性问题上, 对裂纹尖端塑性区的研究较少. 本工作采用理论计算结合数值仿真方法, 基于 Irwin 小屈服等效假设, 推导出唇形裂纹尖端塑性区尺寸公式以及唇形裂纹尖端延长线上应力分量表达式, 并通过仿真计算研究了 I-II 复合型唇形裂纹尖端塑性区的形状和大小及裂纹尖端应力分布问题, 研究成果可为特殊裂纹构型 I-II 复合型裂纹尖端塑性分析提供理论参考.

1 偏轴载荷下唇形裂纹失效准则

假设无限大平面内存在一唇形裂纹, 如图 1 所示, 以唇形裂纹中心为原点建立整体坐标系 (O, x, y) , 唇形裂纹的长轴与坐标系 x 轴的夹角为裂纹倾斜角 γ , 规定逆时针为正. 唇形裂纹受到无穷远处沿 y 轴方向的拉伸载荷 σ 作用. 坐标系 (O', x', y') 是以唇形裂纹中心为原点, 长轴为 x' 轴, 短轴为 y' 轴建立的新坐标系. 为便于分析, 假设该平面为复平面, 定义唇形裂纹半长为 a , 半宽为 h , 宽长比为 $\beta = h/a$.

由于直接求解唇形裂纹的应力应变场较为复杂, 通常采用复变函数和保角映射的方法, 将位于 $z = x + iy$ 复平面的复杂区域映射为 $\zeta = \xi + i\eta$ 复平面

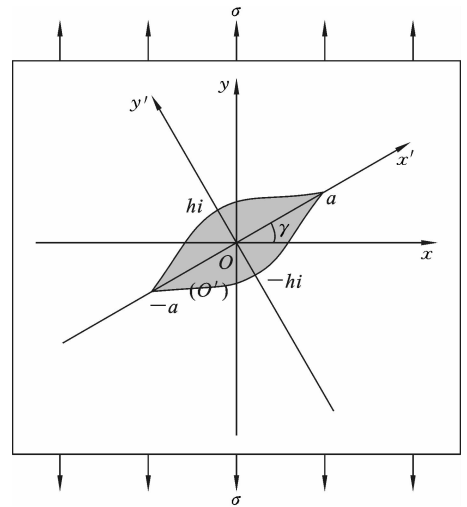


图 1 唇形裂纹模型

Fig. 1 Lip crack model

上的简单区域进行求解^[13].

通过断裂力学理论, 在 $z = x + iy$ 平面内, 可以通过两复势函数 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 表示应力函数 U , 并通过求解两复势函数可以得到唇形裂纹的应力场. 应力函数 U 与复势函数 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的关系为^[13]:

$$U = \text{Re}[\bar{z}\phi(z) + \psi(z)] \quad (1)$$

在复平面 z 中, 唇形裂纹边界上的应力边界条件的复表示为 $\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f + C$. 其中, f 为面力 T_x 和 T_y 沿唇形裂纹边界的闭环积分.

由于直接求解唇形裂纹的复势函数 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 过于复杂, 因此常规方法^[12]为引入保角映射 $w(\zeta)$, 求解复势函数 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 变成求解 ζ 平面上的 $\phi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$, 采用的保角映射如下式所示^[17]:

$$z = w(\zeta) = F \left[\zeta + \frac{m}{\zeta} - \frac{\zeta}{\rho^2(m + \zeta^2)} \right] \quad (2)$$

其中, $F = a\rho i/2$, $\rho = 1/(1-m)$, $m = (\sqrt{1+\beta^2} - 1)/\beta$.

下面在 (ξ, η) 平面对复势函数进行求解, 在无穷远处主应力边界条件下, $\phi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 在 ξ 平面具有如下形式^[13]:

$$\begin{cases} \phi(\zeta) = C'\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^{-n} \\ \psi(\zeta) = -2C'e^{(2\gamma+\pi/2)i} \zeta i + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^{-n} \end{cases} \quad (3)$$

其中, a_n, b_n 均为复常数, $C' = \frac{\sigma a i}{8(1-m)}$, 并记 $\phi_*(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^{-n}$, $\psi_*(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^{-n}$.

将式(2)代入式(3)中,并取共轭,可以得到如下两个方程,

$$\begin{cases} \phi_*(\zeta) + \frac{w(\zeta)}{w'(\zeta)} \overline{\phi'_*(\zeta)} + \overline{\phi_*(\zeta)} + C' \left(\zeta - \frac{w(\zeta)}{w'(\zeta)} - \frac{2}{\zeta} \right) \\ = 0 \\ \phi_*(\zeta) + \frac{w(\zeta)}{w'(\zeta)} \phi'_*(\zeta) + \overline{\phi_*(\zeta)} - C' \left(\bar{\zeta} - \frac{\overline{w(\zeta)}}{w'(\zeta)} - \frac{2}{\zeta} \right) \\ = 0 \end{cases} \quad (4)$$

取单位圆周上的任意一点 δ , 将 $\zeta = \delta$ 代入式(4)中, 根据柯西积分定理, 沿单位圆进行积分, 可得:

$$\begin{cases} \phi_*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{w(\delta)}{w'(\delta)} \frac{\overline{\phi'_*(\delta)}}{\delta - \zeta} d\delta - \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f_*(\delta)}{\delta - \zeta} d\delta \\ \phi_*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{w(\delta)}{w'(\delta)} \frac{\phi'_*(\delta)}{\delta - \zeta} d\delta - \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f_*(\delta)}{\delta - \zeta} d\delta \end{cases} \quad (5)$$

再根据柯西积分公式进行化简, 最终可得:

$$\begin{cases} \phi(\zeta) = \frac{c'}{\zeta} (\zeta^2 - m + 2e^{-2\gamma i}) - \\ \frac{(1-m^2)^2 [-C' + \overline{\phi'_*(i/\sqrt{m})}] \zeta}{(1+m^2)(1+m+m^2)(m+\zeta^2)} \\ \psi(\zeta) = \frac{c'}{\zeta} (-m\zeta^2 + 1 + 2e^{2\gamma i} \zeta^2) - \\ H_1(\zeta) [C' + \phi'_*(\zeta)] + \\ H_2(\zeta) [C' + \phi'_*(i/\sqrt{m})] \end{cases} \quad (6)$$

$$K_I = \frac{\sqrt{\pi a} [(1+m+2m^2-2m^3-m^4-m^5)(1+m+5m^2+3m^3+2m^4)]}{2(1+m)(1+m^2)^2} \left[\frac{1}{\cos(2\gamma)} \right] \sigma \quad (10)$$

$$K_{II} = \frac{\sqrt{\pi a} (1-m+m^2-m^3)}{2(1+m)(1+m^2)^2} \sin(2\gamma) \sigma \quad (11)$$

在研究 I - II 复合型裂纹扩展时, 通常采用混合比例函数 M_p 来表征不同裂纹倾斜角 γ 下 I 型裂纹倾斜角和 II 型裂纹各自对 I - II 复合型裂纹的贡献比. M_p 的定义式如下式所示^[18]:

$$M_p = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right) \quad (12)$$

M_p 的值域为 $[-1, 1]$, 当唇形裂纹仅为 I 型裂纹时, M_p 取值为 1; 当唇形裂纹仅为 II 型裂纹时, M_p 取值为 0. M_p 取值越接近 1, 则 K_I 与 K_{II} 的比值越大, 说明 I 型裂纹的占比越大; 而 M_p 取值越接近 0, K_I 与 K_{II} 的比值越小, 说明 II 型裂纹的占比越大.

其中, H_1 和 H_2 为两个与 ζ 相关的函数, 其表达式为:

$$\begin{cases} H_1(\zeta) = \frac{(\zeta^2+m)^2 [(1+m\zeta^2)^2 - \zeta^2(1-m)^2] \zeta}{(1+\zeta^2)(1+m\zeta^2)(m-\zeta^2)(m^2+\zeta^2)} \\ H_2(\zeta) = \frac{(1-m^2)^2 \left[\frac{Fai}{8(1-m)} + \phi'_*\left(\frac{i}{\sqrt{m}}\right) \right] \zeta}{(1+m^2)(1+m+m^2)(1+m\zeta^2)} \end{cases} \quad (7)$$

唇形裂纹在图 1 所示偏轴拉伸载荷作用下的表现形式为 I - II 复合型裂纹. 此时, I 型应力强度因子 K_I 和 II 型应力强度因子 K_{II} 均存在. 在 $z = x + iy$ 平面, 唇形裂纹长轴尖端 $x = a$ 处由边缘位错产生的应力强度因子可以定义为^[14]:

$$K = K_I - iK_{II} = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow a} \left[\sqrt{z-a} \phi(z) \right] \quad (8)$$

将式(2)代入式(8)中, 即可得到 $\zeta = \xi + i\eta$ 平面上在裂纹尖端点 ζ_1 处的复合型应力强度因子:

$$K = K_I - iK_{II} = 2\sqrt{2\pi} \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_1} \left[\sqrt{w(\zeta) - w(\zeta_1)} \frac{\phi'(\zeta)}{w'(\zeta)} \right] \quad (9)$$

其中, ζ_1 为裂纹尖端点.

将式(1)和式(6)代入式(9), 分别取实部和虚部, 求解得到 I 型应力强度因子 K_I 和 II 型应力强度因子 K_{II} 的表达式:

2 唇形裂纹裂纹尖端塑性区求解

当裂纹尖端有效应力超过其强度极限时, 裂纹尖端会在一定范围内进入塑性变形阶段, 由 Mises 屈服准则, 根据文献[19], 裂纹尖端的应力场可由 I 型和 II 型裂纹尖端应力场分别叠加得到:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\gamma}{2} (1-A) - K_{II} \sin \frac{\gamma}{2} (2+B) \right] \\ \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\gamma}{2} (1+A) + K_{II} \sin \frac{\gamma}{2} B \right] \\ \tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \sin \frac{\gamma}{2} B + K_{II} \cos \frac{\gamma}{2} (1-A) \right] \end{cases} \quad (13)$$

其中： $A = \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{3\gamma}{2}$, $B = \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{3\gamma}{2}$, 应力强度因子 K_I 、 K_{II} 均为前文推导得到的唇形裂纹应力强度因子。

在平面应变条件下, 将式(10)、式(11)以及式(13)代入 Mises 屈服准则中可以求解出唇形裂纹尖端塑性区长度的表达式:

$$r = \frac{1}{2\pi\sigma_s^2} (c_{11}K_I^2 + c_{12}K_I K_{II} + c_{22}K_{II}^2) \quad (14)$$

其中,

$$c_{11} = \cos^2 \frac{\gamma}{2} (3A^2 + 1 + 4\nu^2 - 4\nu) + 3B^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

$$c_{12} = 2\sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} (3A + 3B - 1 + 4\nu - 4\nu^2)$$

$$c_{22} = \sin^2 \frac{\gamma}{2} (4 + 6B + 3B^2 + 4\nu^2 - 4\nu) + 3\cos^2 \frac{\gamma}{2} (1 - A)^2$$

其中, γ 表示倾斜角, ν 表示材料泊松比, σ_s 为屈服强度。

由 Von-Mises 屈服准则求解得到的唇形裂纹塑性区是基于线弹性理论, 且并未考虑塑性区对裂纹扩展的影响. 因此, 需要对模型进行修正, 下面通过 Irwin 小屈服假设, 对唇形裂纹尖端塑性区进行求解。

根据复势函数断裂力学^[13]可知, 应力复势函数存在以下关系:

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}[\phi'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\phi''(z) + \psi''(z)] \end{cases} \quad (15)$$

将式(15)代入 Von-Mises 屈服准则可以得到唇形裂纹尖端塑性区的特征尺寸判定函数 Θ , Θ 是仅与 z 有关的函数:

$$\Theta(z) = 4\langle \text{Re}[\phi'(z)] \rangle^2 + 3\langle \text{Re}[\bar{z}\phi''(z) + \psi''(z)] \rangle^2 + 3\langle \text{Im}[\bar{z}\phi''(z) + \psi''(z)] \rangle^2 \quad (16)$$

$$K'_I = \frac{\sqrt{\pi a'} [(1+m' + 2m'^2 - 2m'^3 - m'^4 - m'^5)(1+m' + 5m'^2 + 3m'^3 + 2m'^4)]}{2(1+m')(1+m'^2)^2} \left[\frac{1}{\cos(2\gamma)} \right] \sigma \quad (18)$$

$$K'_{II} = \frac{\sqrt{\pi a'} (1-m' + m'^2 - m'^3)}{2(1+m')(1+m'^2)^2} \sin(2\gamma) \sigma \quad (19)$$

其中, K'_I 为等效 I 型应力强度因子, K'_{II} 为等效 II 型应力强度因子, m' 为与等效宽长比 β' 相关参数, $m' = (\sqrt{1+\beta'^2} - 1)/\beta'$ 。

如图 2 所示, 基于 Irwin 小屈服等效假设^[20], 唇形裂纹的应力沿裂纹主轴方向单调递减, 因此在唇形裂纹主轴延长线上有且存在一个长度 R 使得:

$$\Theta(\omega(R)) = \sigma_s^2 \quad (17)$$

其中, R 即为修正后的唇形裂纹尖端塑性区长度。

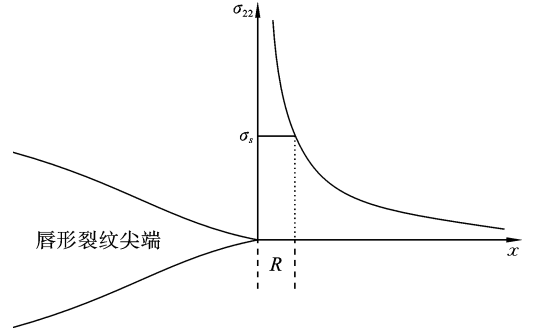


图 2 唇形裂纹尖端应力 σ_{22} 沿裂纹主轴方向分布示意图
Fig.2 Schematic diagram of stress σ_{22} at the tip of lip-shaped crack along the main axis

因此, 唇形裂纹的半长 a 变为等效半长 $a' = a + R$, 唇形裂纹的宽长比 β 变为等效宽长比 $\beta' = h/a'$. 在塑性区的影响下, 唇形裂纹的等效半长 a' 相较唇形裂纹半长 a 增加, 等效宽长比 β' 相较唇形裂纹宽长比 β 下降, 从而对唇形裂纹尖端的应力应变场产生直接影响, 而改变后的应力应变场会影响唇形裂纹尖端塑性区的特征尺寸判断函数 Θ , 进一步影响等效半长 a' 和等效宽长比 β' . 因此在计算唇形裂纹塑性区尺寸 R 时, 应经过多次迭代运算, 使唇形裂纹尖端等效半长 a' 和等效宽长比 β' 趋于稳定值。

通过对唇形裂纹进行塑性区修正, 唇形裂纹的等效半长 a' 增加, 等效宽长比 β' 下降, 相对应的偏轴拉伸载荷下的 I 型应力强度因子 K_I 和 II 型应力强度因子 K_{II} 也会变化, 其表达式为:

对于无限大板的中心裂纹问题, 裂纹延长线上的应力分量 σ_{22} 表达式如下^[21]:

$$\sigma_{22} = \text{Re} \left[\frac{2\sigma_s}{\pi} \text{arccot} \left(\frac{a}{r} \sqrt{\frac{r^2 - (a+R)^2}{(a+R)^2 - a^2}} \right) \right] \quad (20)$$

通过将修正后的唇形裂纹尖端塑性区尺寸 R

代入式(20),即可求解出唇形裂纹裂纹延长线上的应力分布情况.

3 结果分析

图 3 为不同裂纹倾斜角 γ 下,唇形裂纹尖端应力强度因子 K_I 和 K_{II} 的值.可以看出, I 型应力强度因子 K_I 和 II 型应力强度因子 K_{II} 在图中呈现周期为 π 的正弦变化.图中倾斜角 γ_0 所表示的点为 I 型应力强度因子 $K_I=0$, II 型应力强度因子 $K_{II}\neq 0$ 的情况,此时裂纹为纯 II 型裂纹.当倾斜角 $\gamma \in [0^\circ, \gamma_0)$ 时,此时唇形裂纹为 I - II 复合型裂纹.本文研究 I 型和 II 型裂纹同时存在的情况,且不考虑应力强度因子为负值的情况.

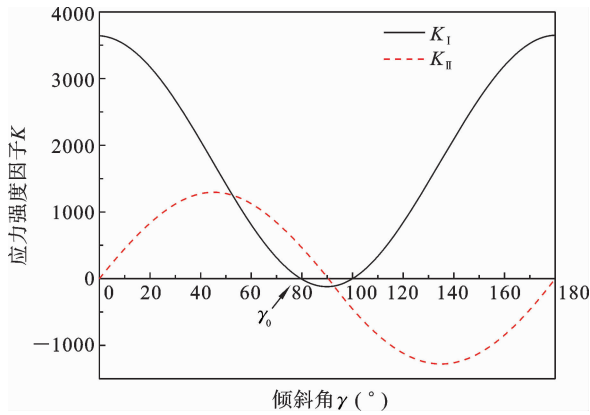


图 3 应力强度因子 K_I 和 K_{II} 随裂纹倾斜角 γ 的变化
Fig. 3 Stress intensity factors K_I and K_{II} vary with crack deflection angle γ

图 4 给出了倾斜角 γ 分别为 $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ 和 45° 情况下的唇形裂纹尖端应力强度因子 K_I, K_{II} 和考虑塑性修正后的等效应力强度因子 K'_I 和 K'_{II} 的值.由图 4 可知,对不同倾斜角 γ 来说,基于线弹性理论计算得到的唇形裂纹尖端应力强度因子 K_I, K_{II} 均要小于塑性修正后的等效应力强度因子 K'_I, K'_{II} .这是由于经过对唇形裂纹进行塑性修正后,唇形裂纹等效半长 a' 增加,等效宽长比 β' 下降,裂纹的尺寸变大,从而裂纹尖端的等效应力强度因子 K'_I 和 K'_{II} 变大.

在实际拉伸过程中,材料泊松比会发生变化,图 5 根据式(14)给出了在平面应变状态下,泊松比 ν

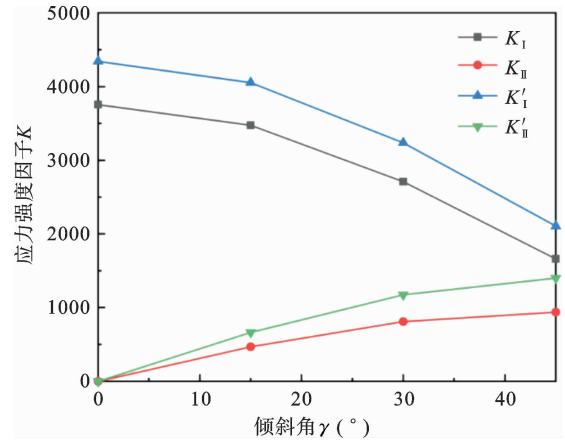


图 4 应力强度因子对比分析

Fig. 4 Comparative analysis of stress intensity factors

对于唇形裂纹尖端塑性区形状和大小的影响,通过对泊松比 ν 从 0.1 至 0.5 的唇形裂纹尖端塑性区形状和大小.由式(12)在同一裂纹混合比例函数 M_p 的情况下,泊松比 ν 的变化并不会改变平面应变塑性区的对称性,且唇形裂纹尖端塑性区的面积伴随着泊松比的增加逐渐减小.

图 6 给出了不同半长 a 情况下,唇形裂纹宽长比 β 与塑性区尺寸 R 的关系.可以看出,对于不同的半长 a 来说,唇形裂纹宽长比 β 与塑性区长度 R 的关系呈现伴随着宽长比 β 的增加塑性区长度 R 减小,并在宽长比 β 大于 0.5 后塑性区长度 R 趋于稳定.对于宽长比 β 为 0.2-0.4 的唇形裂纹,其塑性区长度 R 变化更加敏感,此时的唇形裂纹在裂纹尖端更加尖锐,在拉伸过程中,更容易出现应力集中,而对于宽长比 β 为 0.4-0.8 的唇形裂纹来说,其裂纹构型更接近椭圆形裂纹,裂纹尖端的应力集中对于形状变化不敏感,塑性区尺寸更趋于稳定.对比不同半长曲线,发现其变化趋势基本相同,半长 a 越大,塑性区长度 R 越大,说明半长 a 并不会影响塑性区长度 R 伴随宽长比 β 的变化趋势,只是会影响塑性区长度 R 的大小.

图 7 给出了唇形裂纹塑性区长度 R 伴随裂纹倾斜角 γ 的变化,发现唇形裂纹塑性区长度 R 伴随裂纹倾斜角 γ 的增加而增加,说明唇形裂纹扩展从 I 型向 I - II 复合型转变的过程中,其塑性发生变化,塑性区长度 R 变大.

为了验证基于 Irwin 小屈服等效假设后的唇形

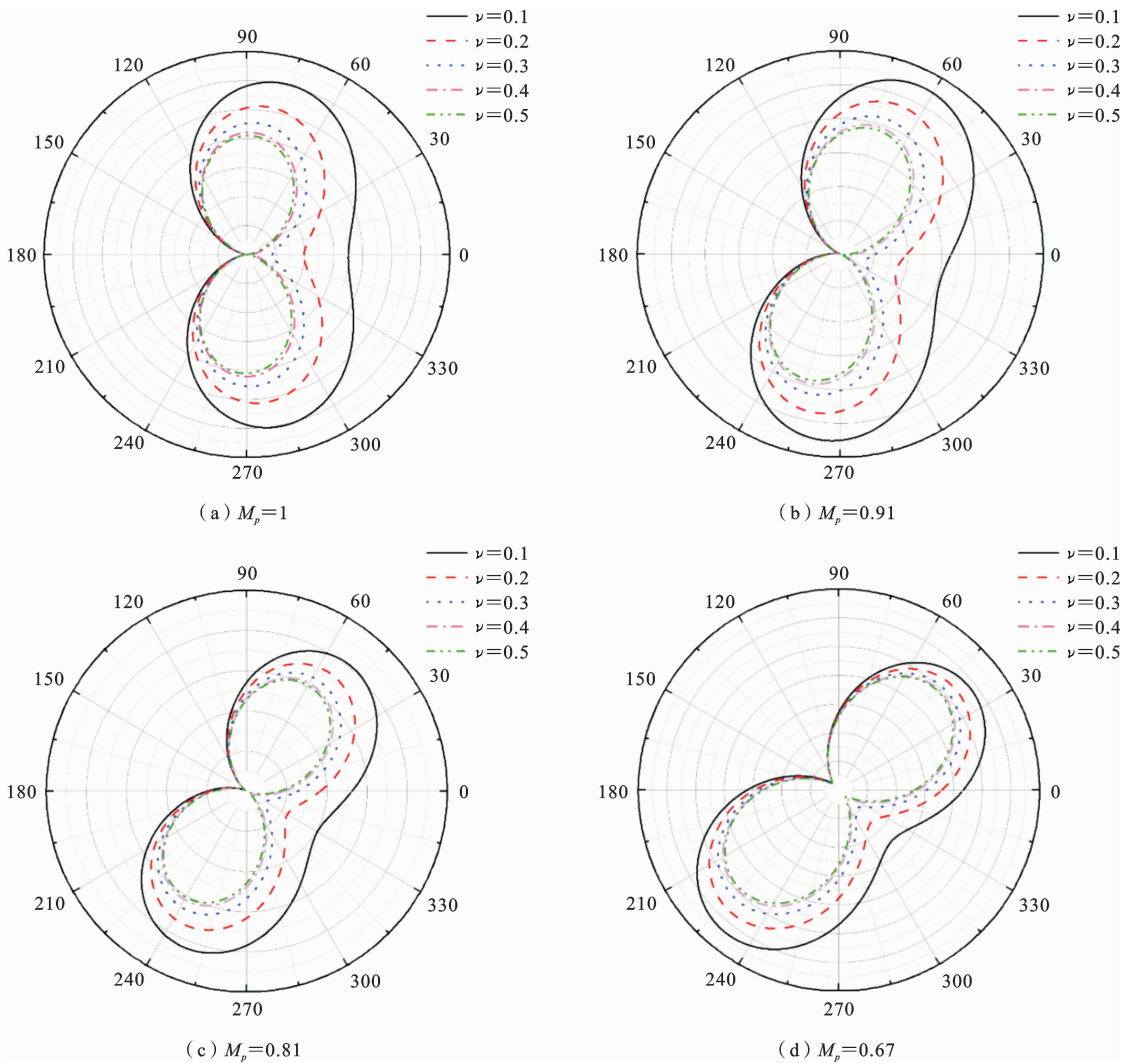


图 5 泊松比对于裂纹尖端塑性区的影响

Fig. 5 Influence of Poisson's ratio on the plastic zone at the crack tip

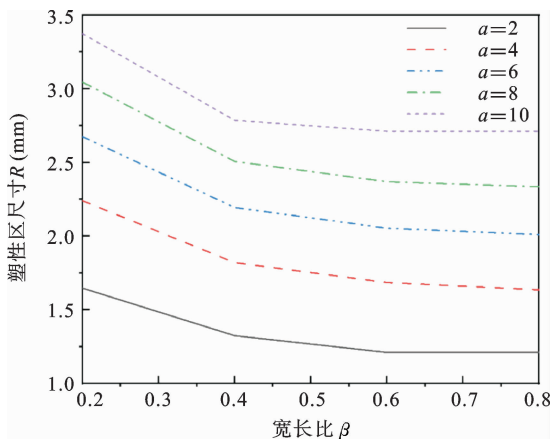


图 6 唇形裂纹不同半长情况下宽长比与塑性区长度关系
Fig. 6 Relationship between aspect ratio and plastic zone size for lip shaped cracks

裂纹延长线上的应力分布结果,使用有限元软件 Abaqus 建立唇形裂纹仿真模型,如图 8 所示,唇形裂纹尺寸参数为半长 $a=5\text{ mm}$,宽长比 $\beta=0.6$,通过结构化网格应用于整个有限元模型,并对裂纹尖端网格进行细化,网格单元最小尺寸为 0.01 mm .将材料设置为理想弹塑性,材料属性如表 1 所示.对上边界附近的加载孔施加位移约束,并在模型底部施加完全约束.

为方便结果说明,通过对裂纹延长线上的应力分量 σ_{22} 进行无量纲化处理得到无量纲化参数 σ_{22}/σ_s ,用来表示裂纹延长线上应力分布, r/a 记为裂纹尖端塑性区长度与唇形裂纹半长比值,用来表示裂纹延长线.同时为方便结果统一,后续理论计算和仿真建

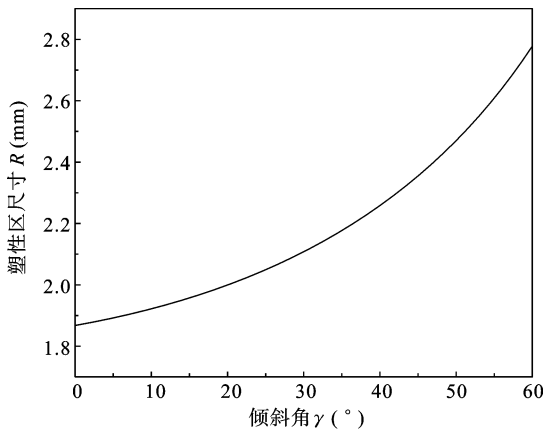


图7 唇形裂纹塑性区长度与倾斜角关系

Fig. 7 Relationship between inclination angle and plastic zone size for lip shaped cracks

模所采用唇形裂纹形状参数选取半长 $a=5\text{ mm}$, 宽长比 $\beta=0.6$, 建立基于 Irwin 小区服等效假设的唇形裂纹理论模型和理想弹塑性仿真模型.

为直观表现基于 Irwin 小屈服等效假设后的唇形裂纹延长线上的应力分布结果与弹塑性仿真以及线弹性仿真结果, 图 9 给出了 0° 裂纹倾斜角下裂纹延长线上应力分量 σ_{22}/σ_s 的理论解、弹塑性仿真解以及线弹性仿真解的结果对比. 黑色实线表示基于 Irwin 小屈服等效假设后的唇形裂纹延长线上的应力分布理论计算结果, 红色双点划线和蓝色点划线则分别表示唇形裂纹延长线上应力分量 σ_{22}/σ_s 的弹塑性仿真解和线弹性仿真解.

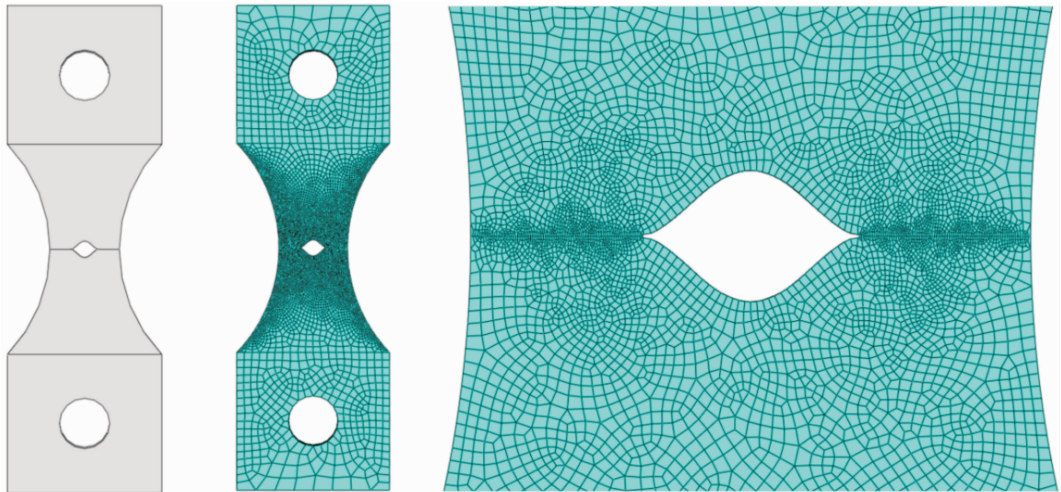


图8 唇形裂纹有限元模型示意图

Fig. 8 Schematic diagram of the finite element model of the lip-shaped crack

表1 材料参数表

Table 1 Material parameter

| 材料属性 | 弹性模量 E (GPa) | 泊松比 ν | 屈服强度 σ_s (MPa) |
|-------|-------------------|--------------|--------------------------|
| 理想弹塑性 | 101.2 | 0.34 | 800 |

如图 9 所示, 在裂纹尖端, 唇形裂纹的应力分量 σ_{22}/σ_s 理论计算结果和弹塑性仿真结果要小于线弹性仿真结果, 这是由于塑性区的存在, 裂纹尖端的应力集中出现下降. 在裂纹尖端塑性区长度与唇形裂纹半长比值 $r/a=0.1$ 时, 理论计算结果与弹塑性仿

真结果更为接近, 在塑性区外一定的范围内, 即裂纹尖端塑性区长度与唇形裂纹半长比值 $r/a \geq 0.3$ 时, 由于奇异应力起主导作用, 三条曲线下降趋势趋于相同, 这表明塑性区仅对裂纹尖端较小范围内的应力分布产生影响. 同时在裂纹尖端塑性区长度与唇形裂纹半长比值 $r/a \geq 0.3$ 时, 理论计算结果要大于弹塑性仿真结果以及线弹性仿真结果, 这是由于基于 Irwin 小屈服等效假设计算的唇形裂纹等效半长 a' 相较于唇形裂纹原半长增加 a , 相对应的其应力场发生变化, 唇形裂纹延长线上的应力分布结果较大.

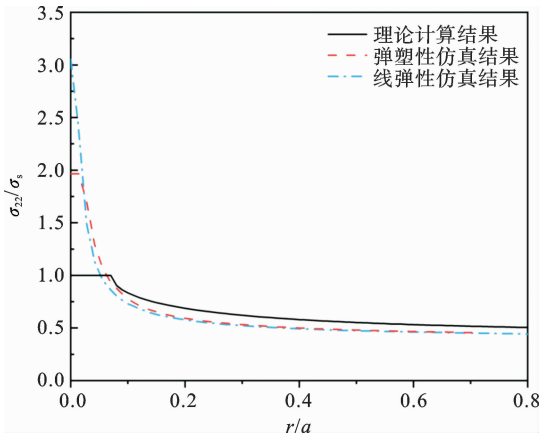
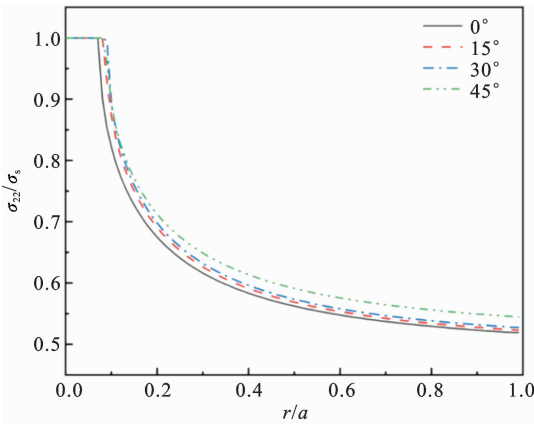


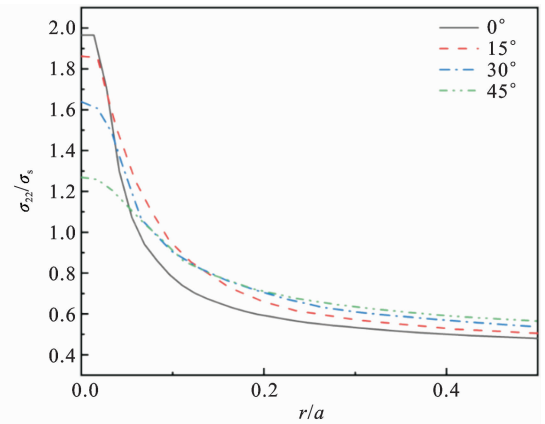
图 9 裂纹延长线上应力分布

Fig. 9 The normal stress distribution along the crack line

为了研究唇形裂纹倾斜角与唇形裂纹尖端应力分布的关系,图 10(a)和图 10(b)分别给出了不同倾斜角 γ 下唇形裂纹延长线上的应力分量 σ_{22}/σ_s 的理论解和弹塑性仿真解,结果发现,对于不同倾斜角 γ 来说,理论解与弹塑性仿真解总体变化趋势保持一致,裂纹延长线上的应力分量 σ_{22}/σ_s 沿裂纹延长线出现下降趋势,且伴随着裂纹倾斜角 γ 的增加,其下降速率明显变小,其中 0° 倾斜角的裂纹延长线上的应力分量 σ_{22}/σ_s 下降最快, 45° 下降最慢,这说明对于 I - II 复合型唇形裂纹,伴随着裂纹由 I 型向 I - II 复合型的转变,唇形裂纹尖端的应力集中会增加,相对应的,塑性区长度 R 会增加。



(a) 裂纹延长线上应力分布理论结果
(a) The theoretical results of stress distribution on the extension line of cracks



(b) 裂纹延长线上应力分布塑性仿真结果
(b) Plastic simulation results of stress distribution on the extension line of cracks

图 10 裂纹延长线上应力分布结果

Fig. 10 The results of stress distribution on the extension line of cracks

在唇形裂纹尖端,裂纹尖端应力分量 σ_{22}/σ_s 的弹塑性仿真解要略大于理论解,这是由于在理论计算过程中,我们假设在唇形裂纹塑性区内之存在着垂直于裂纹方向的应力,不存在其他应力,并以垂直于唇形裂纹延长线上的内力表示裂纹尖端塑性区内应力场,而在有限元计算中,Abaqus 考虑了奇异应力展开的第二项 T 应力等影响,导致垂直于裂纹方向的应力受到影响,出现大于理论计算的情况。

结合图 9,发现裂纹尖端塑性区长度与唇形裂纹半长比值 r/a 为 0.4 时,应力分量 σ_{22}/σ_s 的理论解与弹塑性有限元仿真解变化趋势趋于相同,此时

理论计算结果与弹塑性仿真结果具有较高的一致性。

为研究 I - II 复合型唇形裂纹延长线上的应力分布理论解与弹塑性仿真解的关系,基于图 10,表 2 给出了裂纹尖端塑性区长度与唇形裂纹半长比值 r/a 为 0.4 情况下倾斜角为 0° 、 15° 、 30° 、 45° 唇形裂纹延长线上的应力分量 σ_{22}/σ_s 的理论计算结果与弹塑性仿真结果对比,可以发现,对于不同倾斜角 γ 的裂纹延长线上的应力分量 σ_{22}/σ_s ,伴随着裂纹倾斜角 γ 的增加,理论解与弹塑性仿真解的误差逐渐减小。

出现这种误差的原因是由于,对于应力分量理

表2 长度比为0.4情况下应力分量理论解与弹塑性仿真解

Table 2 Theoretical and elastic-plastic simulation solutions under the length-to-thickness ratio of 0.4

| 唇形裂纹 倾斜角 γ (°) | 应力分量 理论解 | 应力分量 | |
|-----------------------------|-------------|------------|--------|
| | | 弹塑性 仿真解 | 误差 (%) |
| 0 | 0.58334 | 0.50066 | 14.17 |
| 15 | 0.59101 | 0.53579 | 9.34 |
| 30 | 0.59617 | 0.56884 | 4.58 |
| 45 | 0.61364 | 0.59116 | 3.66 |

论解来说,其本质上是通过 Irwin 小屈服等效假设,求解出唇形裂纹的等效半长 a' 和等效宽长比 β' ,实际计算过程中,这种塑性修正假设使唇形裂纹的等效半长 a' 相对于原半长 a 增加,相对应的,在裂纹延长线上的同一位置上对应的应力更大,因此,在选取同一裂纹尖端塑性区长度与唇形裂纹半长比值 r/a 的情况下,通过 Irwin 小屈服等效假设计算的唇形裂纹延长线上的应力分量理论解会大于裂纹延长线上应力分量弹塑性仿真解。

对于误差较大的倾斜角为 0° 的情况,其原因是 Irwin 小屈服等效假设在倾斜角为 0° 时计算出的塑性区尺寸偏大,导致唇形裂纹的等效半长 a' 相较于原半长 a 增加较多,计算得到的裂纹延长线上应力场偏大,这种误差在倾斜角 γ 增加的情况下逐渐降低,伴随着倾斜角 γ 的增加, Irwin 小屈服等效假设对于塑性区尺寸 R 的估计与弹塑性仿真解对于塑性区尺寸 R 的估计更为接近。

为进一步直观展现不同倾斜角 γ 情况下唇形裂纹的尖端应力分布情况,图 11 给出了通过商用有限元软件 Abaqus 建立的倾斜角角度为 0° 、 15° 、 30° 以及 45° 的唇形裂纹弹塑性仿真模型的 Mises 应力云图,通过对云图进行分析并结合图 5 结果,发现对于小倾斜角角度裂纹,其应力集中主要发生在裂纹尖端,形状与式(14)计算基本相同,裂纹尖端应力集中呈现对称性,说明仿真与理论结果变化趋势具有一致性.对于大倾斜角角度裂纹,如 45° 弹塑性仿真结果,其应力集中现象不仅发生在唇形裂纹尖端,同样

在唇形裂纹的腹部出现,且唇形裂纹腹部的应力集中程度与裂纹尖端应力集中的程度大致相同。

通过观察图 11 的各倾斜角情况下唇形裂纹的应力云图,发现在图 11(d)中,唇形裂纹的应力集中不仅发生在唇形裂纹尖端,同时在唇形裂纹腹部出现了应力集中,为此,图 12 给出了 45° 唇形裂纹塑性仿真的屈服云图,可以看出,在 45° 倾斜角情况下,塑性区不仅出现在唇形裂纹尖端,同时在唇形裂纹的腹部出现了较为明显的塑性屈服现象,结合图 11 仿真结果,可以看出对于大倾斜角裂纹,如 45° ,唇形裂纹的腹部会出现较为明显的应力集中,且腹部裂纹的应力集中对裂纹尖端应力集中造成了一定程度的稀释作用,而对于小倾斜角角度来讲,例如 0° 、 15° 倾斜角情况下,唇形裂纹腹部并不会出现应力集中。

为进一步研究唇形裂纹腹部应力集中对唇形裂纹尖端应力集中的影响,基于图 10(b),图 13 给出了各倾斜角 γ 下的裂纹尖端应力分布 σ_{22}/σ_s 的弹塑性仿真解,结果发现,伴随着倾斜角 γ 的增加,其裂纹尖端的应力分布 σ_{22}/σ_s 伴随着倾斜角角度 γ 的增加而下降,其下降速率伴随着倾斜角角度 γ 的增加变大,结合唇形裂纹弹塑性仿真结果图 11 和图 12,伴随着唇形裂纹倾斜角的增加,唇形裂纹扩展由 I 型向 I-II 复合型裂纹扩展转变,且对于大角度来说,其腹部出现屈服现象,说明,一方面,伴随着倾斜角 γ 增加,唇形裂纹扩展由 I 型转变为 I-II 复合型,其裂纹尖端应力水平下降,另一方面,在大倾斜角情况下,唇形裂纹腹部出现应力集中,唇形裂纹腹部的应力集中会对裂纹尖端的应力集中起到稀释的作用,导致伴随着唇形裂纹倾斜角的增加,其裂纹尖端应力水平降低。

4 结论

本文基于 Irwin 小屈服等效假设,求解出唇形裂纹特征尺寸,进一步求解出唇形裂纹塑性区尺寸,得到了唇形裂纹裂纹延长线上应力分量的理论解,并建立塑性仿真模型,得到了 I-II 复合型唇形裂纹延长线上应力分量的仿真解,通过对比理论解和仿真解,得到以下结论:

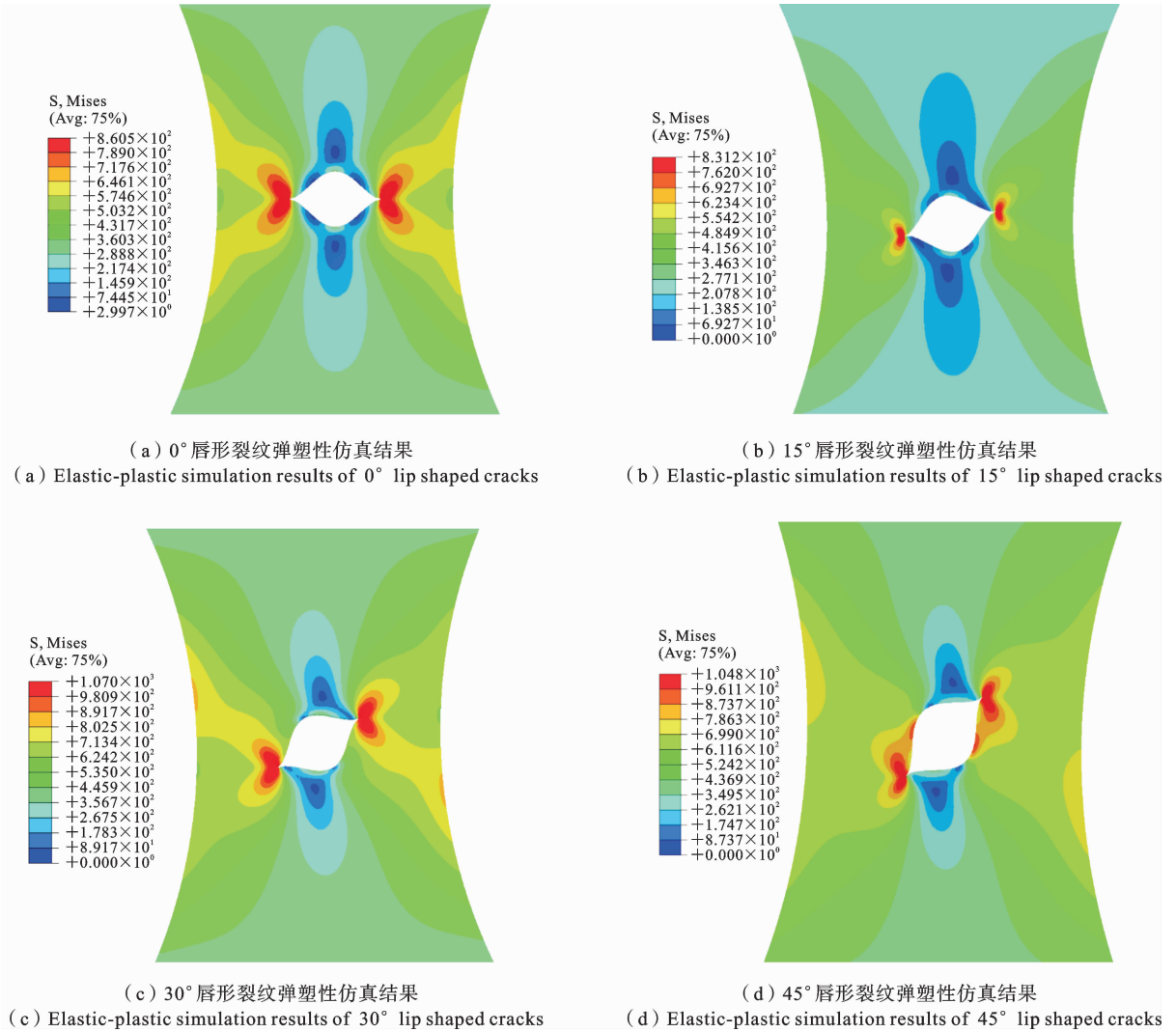


图 11 不同倾斜角下唇形裂纹弹性仿真

Fig. 11 Elastic-plastic simulation of lip shaped cracks under different inclination angles

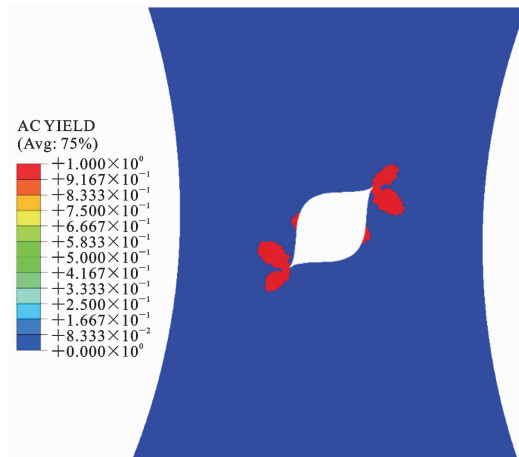


图 12 45°倾斜角唇形裂纹屈服云图

Fig. 12 Yield cloud map of lip shaped cracks with 45° inclination angle

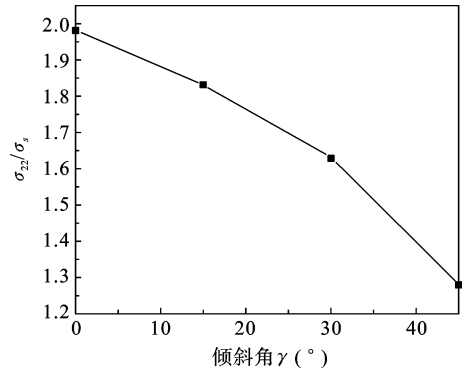


图 13 各倾斜角裂纹尖端应力分量 σ_{22}/σ_s

Fig. 13 Stress components σ_{22}/σ_s at crack tips at various tilt angles

(1) 唇形裂纹的裂纹倾斜角对于应力强度因子会造成影响, I型应力强度因子 K_I 和 II型应力强度因子 K_{II} 在图中都呈现周期为 π 的正弦变化, 基于 Irwin 小屈服等效假设修正后的唇形裂纹等效半长变大, 等效宽长比减小, 相对应的唇形裂纹等效应力强度因子变大。

(2) 泊松比的变化并不会改变唇形裂纹尖端塑性区的对称性, 但是伴随着泊松比的增加, 唇形裂纹尖端塑性区大小减小, 且塑性区边界曲线越来越收敛, 最终趋于泊松比为 0.5 的曲线。

(3) 唇形裂纹在由 I型裂纹扩展向 I-II复合型裂纹扩展的过程中, 伴随着裂纹倾斜角的增加, 裂纹塑性区长度会增加; 唇形裂纹形状尺寸的改变同样会对塑性区长度产生影响, 相同的宽长比情况下, 半长越大, 塑性区长度越大; 相同半长情况下, 宽长比越大, 塑性区长度越小。

(4) 通过对比理论解、弹塑性仿真解以及线弹性仿真解关于唇形裂纹延长线上的应力分量, 发现塑性区的存在会对裂纹延长线上的应力分布造成影响, 基于 Irwin 小屈服等效假设修正后的唇形裂纹由于等效半长增加, 裂纹延长线上的应力水平要略大于弹塑性仿真模型结果, 并且由于 T 应力影响, 在裂纹尖端, 弹塑性仿真计算应力分量要大于理论计算应力分量。

(5) 唇形裂纹尖端应力分量与屈服应力的比值会伴随着裂纹倾斜角的增加而降低, 这一方面是由于裂纹扩展形式由 I型向 I-II复合型的转变, 另一方面则是伴随着裂纹倾斜角的增加, 在唇形裂纹腹部出现屈服现象, 其分担了裂纹尖端的应力集中, 导致唇形裂纹裂纹尖端应力水平降低。

参考文献

- [1] Jia Y J, Shi M X, Zhao Y, Liu B. A better estimation of plastic zone size at the crack tip beyond Irwin's model [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2013, 80(5): 10-14.
- [2] Dugdale D S. Yielding of steel sheets containing slits [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1960, 8(2): 100-104.
- [3] Drucker D C, Rice J R. Plastic deformation in brittle and ductile fracture [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1970, 1(4): 577-602.
- [4] Kang K J, Beom H G. Plastic zone size near the crack tip in a constrained ductile layer under mixed mode loading [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2000, 66(3): 257-268.
- [5] Torabi A R, Shahbazian B. Notch tip plastic zone determination by extending Irwin's model [J]. *Theoretical and applied fracture mechanics*, 2020, 108: 102643.
- [6] Torabi A R, Shahbazian B, Mirsayar M, Cicero S. A methodology to determine the effective plastic zone size around blunt V-notches under mixed mode I/II loading and plane-stress conditions [J]. *Metals*, 2021, 11(7): 1042.
- [7] Sousa R A, Castro J T P, Lopes A A O, Martha L F. On improved crack tip plastic zone estimates based on T-stress and on complete stress fields [J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2013, 36(1): 25-38.
- [8] Fakir M, El Minor H, El Minor H. Plastic Zone Size at Notch Tip in Mode I Fracture Using the Modified Irwin's Model and Volumetric Approach [C]// *MATEC Web of Conferences*. EDP Sciences, 2021, 348.
- [9] 刘元镛, 徐绯, 葛东云. 弹塑性裂纹扩展的裂尖参数研究[J]. *西北工业大学学报*, 2000, 18(1): 5-10. (Liu Y Y, Xun F, Ge D Y. Study of the crack-tip parameters of elastic-plastic crack growth [J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2000, 18(1): 5-10. (in Chinese))
- [10] 李亚. 理想弹塑性材料有限宽裂纹板 Dugdale 模型塑性区及裂尖张开位移分析[D]. 重庆交通大学, 2021. (Li Y. Analysis on the Crack Tip Plastic Zone and Opening Displacement of Finite-width Plate Based on Dugdale Model in an Elastic-perfectly Plastic Material [D]. Chongqing Jiaotong University, 2021. (in Chinese))
- [11] Yang J, Zhou K. Analysis of the plastic zones of cracks in an elastic-perfectly plastic half-space under contact loading [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, 121: 143-150.
- [12] 杨建锋, 张秀凤, 陶干强, 朱忠华. 无限大薄板椭圆

- 孔口裂纹前缘应力研究 [J]. 南华大学学报(自然科学版), 2017, 31(2): 52-55, 60. (Yang J F, Zhang X F, Tao G Q, Zhu Z H. Stress of crack front in elliptical hole of infinite sheet [J]. Journal of Nanhua University(Science & Technology), 2017, 31(2): 52-55, 60. (in Chinese))
- [13] Muskhelishvili. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity [M]. Groningen; Noordhoff, 1953.
- [14] Xie C, Liu Y W, Fang Q H, Deng M. Cracking characteristics of mixed mode dislocations near a lip-like mode crack [J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2009, 51(2): 139-143.
- [15] Wang X, Schiavone P. Unconventional cracks with dislocation-free zones [J]. International Journal of Solids and Structures, 2022, 243: 111566.
- [16] Li X P, Chen X, Zhang H, Liu G C. Effect of the distribution of lip-shaped matrix cracks in continuous fiber reinforced ceramic matrix composites on failure progress under transverse tension [J]. Advances in Applied Ceramics Structural, 2021, 120(1): 32-46.
- [17] 匡震邦. 只有尖点的平面曲边多角形缺陷的应力分析[J]. 力学学报, 1979, 02: 22-32. (Kuang Z B. Stress analysis for plane curved polygonal defects containing cusps only [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1979, 02: 22-32. (in Chinese))
- [18] 段国盛. T 应力对扩展裂纹尖端塑性区域形状的影响[J]. 西安石油大学学报(自然科学版), 2020, 35(05): 65-71. (Duan G S. Effect of T-stress on shape of plastic zone at the tip of a propagating crack [J]. Journal of Xi'an Shiyou University(Natural Science Edition), 2020, 35(05): 65-71. (in Chinese))
- [19] 倪尔有. 裂纹尖端的塑性区分析[J]. 鞍山钢铁学院学报, 1994, 17(02): 41-44. (Ni E Y. Analysis of plastic area of crack tip [J]. Journal of Anshan Iron and Steel Institute, 1994, 17(02): 41-44. (in Chinese))
- [20] 刘广程. I/II 型唇形裂纹失效准则及损伤演化研究 [D]. 中国民航大学, 2022. (Liu G C. Research on Failure Criteria and Damage Evolution of I/II Mixed Mode Lip-shaped Crack [D]. Civil Aviation University of China, 2022. (in Chinese))
- [21] 文阳阳, 国凤林. 改进的 Irwin 模型及裂尖塑性区对断裂行为的影响[J]. 力学季刊, 2018, 39(03): 513-522. (Wen Y Y, Guo F L. Improved Irwin's model and the effects of crack-tip plastic zone on fracture behavior [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2018, 39(03): 513-522. (in Chinese))

Analysis of Plastic Zone at the I / II Composite Lip-shaped Crack Tip

Jianliang Chen¹ Hong Zhang¹ Xuelan Hu¹ Xiangping Li¹ Yunbing Tang² Xiaohu Xie²

(¹ Sino-European Institute of Aviation Engineering, Civil Aviation University of China, Tianjin, 300300)

(² Changzhou E & E Turbo-Power Co., Ltd., Changzhou, 213002)

Abstract In this study, the angle-preserving transformation method is employed to establish a propagation model for I/II composite lip-shaped cracks under tensile loading conditions. Based on Irwin's small-scale yielding equivalent hypothesis, a plastic propagation zone model is formulated for I - II composite lip-shaped cracks under tensile loading. This model provides expressions for the stress intensity factors (SIFs) of mode I and mode II at the tip of lip-shaped cracks within the plastic zone. Additionally, the stress distribution along the extension line of the lip-shaped crack tip is characterized. A tensile simulation model is developed, and the theoretical solution for stress distribution at the lip-shaped crack tip is compared with the elastoplastic and linear elastic simulation results. It is found that, based on Irwin's small-scale yielding equivalent hypothesis, the modified dimensions of lip-shaped cracks lead to increased crack sizes and greater equivalent SIFs. Geometric alterations in lip-shaped crack parameters also influence the plastic zone, with larger semi-lengths resulting in larger plastic zones under equivalent width-to-length ratios. Conversely, greater width-to-length ratios lead to smaller plastic zones under equivalent semi-lengths. Moreover, an increase in the inclination angle of the lip-shaped crack corresponds to a proportional increase in the plastic zone size. The plastic correction theory at the lip-shaped crack tip, founded on the basis of Irwin's small-scale yielding equivalent hypothesis, aligns well with plastic finite element simulations. As the inclination angle of the lip-shaped crack rises, stress levels at the crack tip diminish. On the one hand, this phenomenon arises from the transition from mode I crack extension to I - II composite crack extension, coupled with stress yielding at the concave region of the lip-shaped crack for larger inclination angles. On the other hand, this stress yielding serves to mitigate stress concentration at the crack tip, ultimately resulting in reduced stress levels at the crack tip.

Key words lip crack, complex function, conformal mapping, I - II composite crack, crack tip plastic zone