

功能梯度锥-柱连接壳的环向自由振动分析^{*}

庞磊¹ 成龙^{1**} 刘文光¹ 张宇航¹ 吕志鹏² 宛润豪¹

(¹ 南昌航空大学航空制造工程学院, 南昌, 330063)(² 东北大学机械工程与自动化学院, 沈阳, 110819)

摘要 论文旨在分析功能梯度锥-柱连接壳的环向自由振动, 以提高其结构的振动性能和稳定性. 采用 Voigt 模型和四参数幂函数体积分数描述功能梯度材料属性, 基于 Donnell 薄壳理论推导出锥壳和柱壳的位移与应变关系, 分别得出锥壳和柱壳的能量表达式. 引入人工弹簧模拟边界和壳体间的连接条件, 依据 Chebyshev 多项式构造位移函数, 基于 Rayleigh-Ritz 法求解 FGMs 锥-柱连接壳模态频率, 分析梯度指数、边界条件和几何参数对模态频率的影响. 结果表明: 增加陶瓷体积分数能有效提高结构的模态频率, 而增大梯度指数则会降低结构的模态频率; 边界约束条件越强, FGMs 锥-柱连接壳的模态频率越高; 随着环向波数的增大, 边界条件对结构模态频率的影响越来越弱, 边界约束效果作用于圆柱壳明显强于圆锥壳; 当环向波数大于 3 时, 随着壳体厚度增大, 结构的模态频率呈线性提高, 而增大锥柱壳长度比会降低结构模态频率; 在锥柱壳长度比一定时, 随着锥角的增大会使结构的模态频率先增加到峰值后减小.

关键词 锥-柱连接壳, 功能梯度材料, Chebyshev 多项式, 模态频率

DOI: 10.19636/j.cnki.cjasm42-1250/o3.2023.030

0 引言

锥壳和柱壳作为壳体基本单元, 在航天飞行器中得到广泛应用, 航天飞行器在运行过程中, 由于与大气的摩擦以及外部激励的影响, 会导致温度急剧升高, 并且不可避免地引起振动现象. 功能梯度材料 (Functionally Graded Materials, FGMs) 是一种结构和成分在空间上呈现连续梯度变化的新型复合材料. 相较于传统复合材料, 在高温环境中, FGMs 能有效缓解材料内部热应力, 具备出色的隔热、耐腐蚀和高强度性能, 同时还具备良好的可设计性. 为了促进功能梯度材料在航天飞机结构设计上的应用, FGMs 壳体的动力学设计成了研究者关注的焦点.

围绕 FGMs 壳体的动力学问题, 学者们进行了大量的研究. 基于 Love 薄壳理论, Loy 等^[1] 采用瑞利里兹方法推导了 FGMs 圆柱壳的特征频率方程. 李文达^[2,3] 等利用 Fourier 级数方法展开位移场, 通过能量原理推导了旋转 FGMs 圆柱壳的自由振动

方程. 陈金晓等^[4] 基于波动法在 Flugge 理论的基础上推导出了弹性边界条件下 FGMs 圆柱壳的模态频率方程, 探究了不同几何参数对振动特性的影响. 黄小林等^[5] 基于经典薄壳理论建立了弹性地基上均匀和非均匀分布孔隙 FGMs 圆锥壳振动方程, 进而分析了孔隙和几何参数下壳体的动力学响应. Zheng 等^[6] 基于 Donnell 壳体理论, 利用傅里叶级数来辅助处理弹性边界约束不连续的问题, 探究了轴向厚度和斜率等对阶跃圆柱壳固有频率的影响. Qin 等^[7] 通过一阶剪切变形理论和人工弹簧技术得到了石墨烯增强 FGMs 层合扁壳一般方程, 通过采用正交多项式扩展壳体位移场以及 Rayleigh-Ritz 方法求解了壳体的模态频率, 研究了边界条件和层数等对振动特性的影响. 曹洲等^[8] 在三阶剪切变形理论基础上, 利用 Hamilton 原理和 Navier 法得到了不同夹层类型的系统固有频率, 研究了几何参数和温度场对结构自由振动固有频率的影响.

* 国家自然科学基金项目(51965042)和研究生创新专项资金项目(YC2022-030)资助.

2023-06-25 收到修改稿, 2023-07-04 网络首发.

** 通讯作者. E-mail: 71187@nchu.edu.cn.

然而,工程实际中的壳体结构通常以连接壳的方式广泛存在于不同应用场合中. 由于壳体间的相互作用,连接壳的振动特性会更加复杂,因此有必要对其动力学特性展开研究. Bagheri 等^[9]借助一阶剪切变形理论分析了 FGMs 圆柱-半球连接壳的自由振动特性,通过利用半解析广义微分求积法离散运动方程,探讨了幂律指数和几何参数对壳体振动的影响. Damercheloo 等^[10,11]利用一阶剪切变形理论建立了石墨烯(GNP)加固锥-锥连接壳的动力学模型,使用 Hamilton 原理推导了振动控制微分方程,采用微分求积法确定了壳体的模态频率和相应振型,分析了不同参数对 GNP 加固圆锥-圆锥连接壳模态频率的影响,继而考虑离心力和科氏力,研究了 GNP 加固旋转锥-锥连接壳的行波模态频率. Zarei 等^[12]利用 Donnell 薄壳理论推导了加肋圆锥-圆柱复合材料连接壳控制方程,采用幂级数求解了所建模型的模态频率和振型. 在一阶剪切变形理论的框架下, Sobhani 等^[13]研究了复合三项材料制成的半球-圆柱-圆锥连接壳体的模态频率,基于 Donnell 壳体理论和 Hamilton 原理推导了球-柱-锥连接壳结构的相关运动控制方程,利用广义微分求积法(GDQM)求解并研究了不同参数对连接壳振动特性的影响. Fu 等^[14]建立了弹性地基下的圆锥壳的振动控制方程,使用 GDQM 离散并求解控制方程,分析了弹性地基环绕 FGMs 夹层圆锥-圆锥连接壳振动特性,研究了夹层分布和梯度指数对 FGMs 夹层圆锥-圆锥连接壳振动特性的影响.

综上所述,虽然研究者已经开展了大量关于 FGMs 壳体振动问题的研究,但是对于连接壳的动力学问题求解仍较为复杂. 因此,本工作以 FGMs 锥-柱连接壳为研究对象,基于 Donnell 薄壳理论并引入人工弹簧推导出圆锥壳、圆柱壳以及边界条件和壳体连接条件的能量方程,基于能量原理分析 FGMs 锥-柱连接壳的自由振动特性. 研究结果可为航空航天等实际工程的动力学设计提供一定的理论支撑.

1 FGMs 锥-柱连接壳模型

如图 1 所示的锥-柱连接壳几何模型,设定锥角方向为正方向,其中圆柱壳的长度为 L^{cy} ,圆锥壳的

长度为 L^{co} 、圆锥角为 α_0 、圆锥壳小端的内径为 R_1 ,大端的内径和圆柱壳的内径为 R_2 ,连接壳体的厚度均为 h . 在连接壳中面建立图示坐标系 (x, θ, z) ,圆锥壳和圆柱壳中面上任意一点的轴向、周向和法向位移分别表示为 u^{co} 、 v^{co} 、 w^{co} 和 u^{cy} 、 v^{cy} 、 w^{cy} ,通过引入人工弹簧模拟壳体两端边界条件以及壳体之间的连接条件.

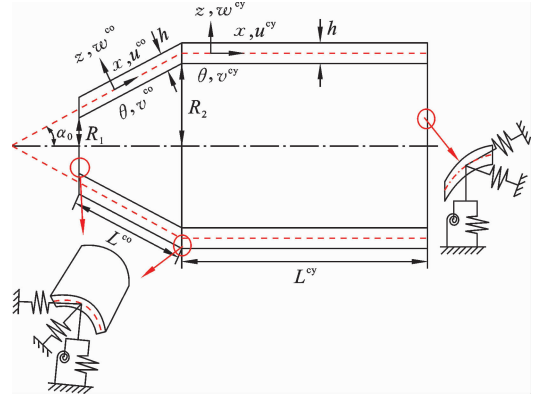


图 1 几何模型
Fig. 1 Geometric model

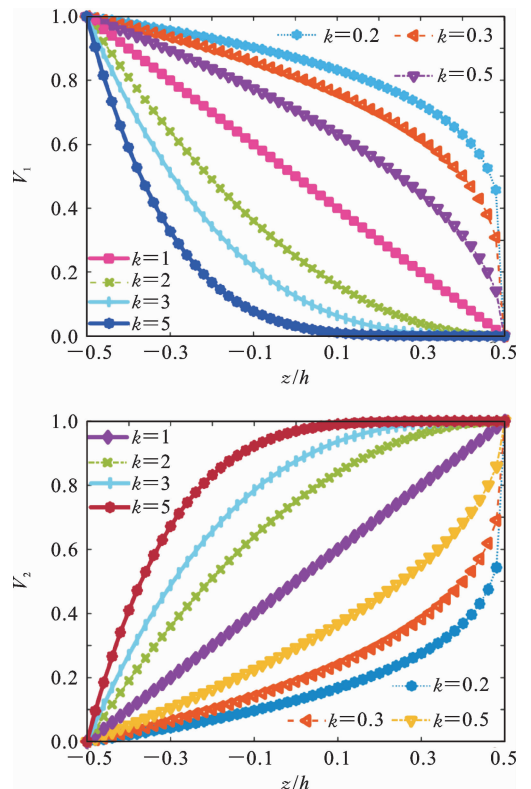


图 2 体积分数在厚度方向上的变化($a=1, b=0$)
Fig. 2 Variation of volume fraction in thickness direction ($a=1, b=0$)

假设连接壳是由金属陶瓷 FGMs 制成,壳体外表为纯金属,内表面为纯陶瓷,金属和陶瓷沿厚度方向的分布服从 Voigt 模型,FGMs 连接壳的有效材料参数表达式如式 1 所示.

$$P(z) = P_2 + P_{12}V_1, \quad P_{12} = P_1 - P_2 \quad (1)$$

式中: P_1 和 P_2 分别为陶瓷和金属的材料属性,主要指材料的弹性模量 E 、质量密度 ρ 和泊松比 ν . 陶瓷体积分数 V_1 和金属体积分数 V_2 服从幂函数分布形式如式 2 所示. 图 2 展示了体积分数在厚度方向上的变化. 因而,可通过调整梯度指数 k 来改变材料体积分数和材料物性参数,进而改变结构的模态频

率,尽可能避免实际工程中共振现象的发生.

$$\begin{cases} V_1 = [1 - a(1/2 + z/h) + b(1/2 + z/h)^c]^k \\ V_2 = 1 - V_1 \end{cases} \quad (2)$$

式中: a, b, c 为分布参数.

假设材料属性具有与温度相关的性能^[15]:

$$P = K_0(K_{-1}T^{-1} + 1 + K_1T + K_2T^2 + K_3T^3) \quad (3)$$

式中: P 表示弹性模量 E (Pa)、密度 ρ (kg/m³) 和泊松比 ν . $K_0, K_{-1}, K_1, K_2, K_3$ 表示温敏系数. 表 1 给出了 Si₃N₄/SUS304 温敏系数.

表 1 Si₃N₄/SUS304 温敏系数^[15]

Table 1 Si₃N₄/SUS304 temperature coefficient^[15]

材料	属性	K_0	K_{-1}	K_1	K_2	K_3
Si ₃ N ₄	E	348.43×10^9	0	-3.070×10^{-4}	2.160×10^{-7}	-8.946×10^{-11}
	ρ	2370	0	0	0	0
	ν	0.24	0	0	0	0
SUS304	E	201.04×10^9	0	3.079×10^{-4}	-6.534×10^{-7}	0
	ρ	8166	0	0	0	0
	ν	0.3262	0	-2.002×10^{-4}	3.797×10^{-7}	0

2 FGMs 锥-柱连接壳能量方程

对于圆锥壳中面上任意一点的半径 R 是关于坐标 x 的函数关系式:

$$R(x) = R_1 + x \sin(\alpha_0) \quad (4)$$

其中,当 $x=L^{\text{co}}$ 时,表示圆柱端半径.

FGMs 圆柱壳和圆锥壳动能 T 分别表示为:

$$\begin{cases} T^{\text{cy}} = \frac{1}{2} \int_0^{L^{\text{cy}}} \int_0^{2\pi} \rho^{\text{cy}} [(\dot{u}^{\text{cy}})^2 + (\dot{v}^{\text{cy}})^2 + (\dot{w}^{\text{cy}})^2] R_2 dx d\theta \\ T^{\text{co}} = \frac{1}{2} \int_0^{L^{\text{co}}} \int_0^{2\pi} \rho^{\text{co}} [(\dot{u}^{\text{co}})^2 + (\dot{v}^{\text{co}})^2 + (\dot{w}^{\text{co}})^2] R(x) dx d\theta \end{cases} \quad (5)$$

式中: (\cdot) 表示位移对时间 t 的求导, ρ^i 为单位长度的质量密度.

$$\rho^i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \quad (6)$$

基于 Donnell 薄壳理论^[16],可得到薄壳上任意点的应变表达式:

$$\begin{cases} e_\alpha^i = \epsilon_\alpha^{i,0} + z k_\alpha^{i,0} \\ e_\beta^i = \epsilon_\beta^{i,0} + z k_\beta^{i,0} \\ e_{\alpha\beta}^i = \epsilon_{\alpha\beta}^{i,0} + 2z \tau^{i,0} \end{cases} \quad (7)$$

根据胡克定律,得到壳体应力与应变的关系为:

$$\begin{bmatrix} \sigma_\alpha^i \\ \sigma_\beta^i \\ \sigma_{\alpha\beta}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\alpha^i \\ e_\beta^i \\ e_{\alpha\beta}^i \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中: Q_{pj} ($p, j=1, 2, 6$) 为刚度系数,具体表示如下:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad Q_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (9)$$

式中: α 和 β 分别表示 FGMs 壳体的轴向和周向, $\epsilon_\alpha^{i,0}, \epsilon_\beta^{i,0}$ 和 $\epsilon_{\alpha\beta}^{i,0}$ 表示壳体中曲面应变分量, $k_\alpha^{i,0}, k_\beta^{i,0}$ 和 $\tau^{i,0}$ 表示壳体中曲面曲率. 上标 i 指 co 和 cy, 分别表示锥壳和柱壳. u^i, v^i 和 w^i 分别表示壳体上轴向、环

向和径向上任意一点的位移。

圆锥薄壳的中面应变与位移的关系可表示为：

$$\begin{cases} \epsilon_x^{co,0} = \frac{\partial u^{co}}{\partial x} \\ \epsilon_\theta^{co,0} = \frac{1}{R(x)} \frac{\partial v^{co}}{\partial \theta} + \frac{u^{co} \sin \alpha}{R(x)} + \frac{w^{co} \cos \alpha}{R(x)} \\ \epsilon_{x\theta}^{co,0} = \frac{\partial v^{co}}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial u^{co}}{\partial \theta} - \frac{v^{co} \sin \alpha}{R(x)} \\ \kappa_x^{co,0} = -\frac{\partial^2 w^{co}}{\partial x^2} \\ \kappa_\theta^{co,0} = -\frac{1}{R^2(x)} \frac{\partial^2 w^{co}}{\partial \theta^2} - \frac{\sin \alpha}{R(x)} \frac{\partial w^{co}}{\partial x} \\ \tau^{co,0} = -\frac{1}{R(x)} \frac{\partial^2 w^{co}}{\partial \theta \partial x} + \frac{\sin \alpha}{R^2(x)} \frac{\partial w^{co}}{\partial \theta} \end{cases} \quad (10)$$

圆柱薄壳中面应变与位移的关系表示为：

$$\begin{cases} \epsilon_x^{cy,0} = \frac{\partial u^{cy}}{\partial x}, \quad \epsilon_\theta^{cy,0} = \frac{1}{R} \frac{\partial v^{cy}}{\partial \theta} + \frac{w^{cy}}{R} \\ \epsilon_{x\theta}^{cy,0} = \frac{\partial v^{cy}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u^{cy}}{\partial \theta}, \quad \kappa_x^{cy,0} = -\frac{\partial^2 w^{cy}}{\partial x^2} \\ \kappa_\theta^{cy,0} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v^{cy}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w^{cy}}{\partial \theta^2} \right) \\ \tau^{cy,0} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v^{cy}}{\partial x} - \frac{\partial^2 w^{cy}}{\partial x \partial \theta} \right) \end{cases} \quad (11)$$

对于 FGMs 圆柱和圆锥薄壳，其力与力矩可表示为：

$$\left\{ \begin{matrix} \begin{matrix} N_x^i \\ N_\theta^i \\ N_{x\theta}^i \end{matrix}, \begin{matrix} M_x^i \\ M_\theta^i \\ M_{x\theta}^i \end{matrix} \end{matrix} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_x^i \\ \sigma_\theta^i \\ \sigma_{x\theta}^i \end{pmatrix} (1, z) dz \quad (12)$$

FGMs 圆柱壳与圆锥壳应变能可表示为：

$$\begin{cases} U^{cy} = \frac{1}{2} \int_0^{L^{cy}} \int_0^{2\pi} \{(\boldsymbol{\epsilon}^{cy})^T\} [\mathbf{S}] \{\boldsymbol{\epsilon}^{cy}\} R_2 dx d\theta \\ U^{co} = \frac{1}{2} \int_0^{L^{co}} \int_0^{2\pi} \{(\boldsymbol{\epsilon}^{co})^T\} [\mathbf{S}] \{\boldsymbol{\epsilon}^{co}\} R(x) dx d\theta \end{cases} \quad (13)$$

式中： \mathbf{S} 为简化刚度矩阵， $\boldsymbol{\epsilon}$ 为壳体中曲面应变组成的向量，可表示为：

$$[\mathbf{S}^i] \{\boldsymbol{\epsilon}^i\} = \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i & 0 & B_{11}^i & B_{12}^i & 0 \\ A_{12}^i & A_{22}^i & 0 & B_{12}^i & B_{22}^i & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^i & 0 & 0 & B_{66}^i \\ B_{11}^i & B_{12}^i & 0 & D_{11}^i & D_{12}^i & 0 \\ B_{12}^i & B_{22}^i & 0 & D_{12}^i & D_{22}^i & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^i & 0 & 0 & D_{66}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_\alpha^{i,0} \\ \epsilon_\beta^{i,0} \\ \epsilon_{\phi\theta}^{i,0} \\ k_\alpha^{i,0} \\ k_\beta^{i,0} \\ 2\tau^{i,0} \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中： A_{pj}^i 、 B_{pj}^i 、 D_{pj}^i ($p, j=1, 2, 6$) 分别为拉伸、耦合和弯曲刚度：

$$\{A_{pj}^i \quad B_{pj}^i \quad D_{pj}^i\} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}_{pj} \{1, z, z^2\} dz \quad (15)$$

引入约束弹簧模拟连接壳的边界条件和连接条件，假设 k_1 、 k_2 、 k_3 和 k_4 四组弹簧和 k_5 、 k_6 、 k_7 和 k_8 四组弹簧分别是施加于圆锥壳的左端和圆柱壳右端 x 、 θ 和 z 方向的线弹簧以及 z 方向的扭转弹簧。因此，储存在边界弹簧的弹性势能可表示为：

$$\begin{aligned} V_a = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[k_1 (u^{co})^2 + k_2 (v^{co})^2 + k_3 (w^{co})^2 + \right. \\ & \left. k_4 \left(\frac{\partial w^{co}}{\partial x} \right)^2 \right]_{x^{co}=0} R_1 d\theta + \int_0^{2\pi} \left[k_5 (u^{cy})^2 + k_6 (v^{cy})^2 \right. \\ & \left. + k_7 (w^{cy})^2 + k_8 \left(\frac{\partial w^{cy}}{\partial x} \right)^2 \right]_{x^{cy}=L^{cy}} R_2 d\theta \quad (16) \end{aligned}$$

假设 k_u 、 k_v 、 k_w 和 k_φ 分别为壳段连接处 x 、 θ 和 z 方向的线弹簧以及 z 方向的扭转弹簧，通过分析几何模型可得到圆锥壳和圆柱壳连接条件为：

$$\begin{cases} u^{cy} = u^{co} \cos \alpha_0 - w^{co} \sin \alpha_0 \\ v^{cy} = v^{co} \\ \frac{\partial w^{cy}}{\partial x} = \frac{\partial w^{co}}{\partial x} \\ w^{cy} = u^{co} \sin \alpha_0 + w^{co} \cos \alpha_0 \end{cases} \quad (17)$$

因此，储存在连接处的弹簧弹性势能为：

$$\begin{aligned} V_b = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} k_u [u^{cy} - (u^{co} \cos \alpha_0 - w^{co} \sin \alpha_0)]^2 \\ & + k_v (v^{cy} - v^{co})^2 + k_w [w^{cy} - (u^{co} \sin \alpha_0 + w^{co} \cos \alpha_0)]^2 \\ & + k_\varphi \left(\frac{\partial w^{cy}}{\partial x} - \frac{\partial w^{co}}{\partial x} \right)^2 R_2 d\theta \quad (18) \end{aligned}$$

3 FGMs 锥-柱连接壳频率方程

将 FGMs 连接壳轴向、环向和径向三个方向上的振动位移 u^i 、 v^i 和 w^i 表示成环向模态和环向波数的位移函数的乘积形式：

$$\begin{cases} u^i(x, \theta, t) = A_n^i(x) \cos(n\theta + \omega t) \\ v^i(x, \theta, t) = B_n^i(x) \sin(n\theta + \omega t) \\ w^i(x, \theta, t) = C_n^i(x) \cos(n\theta + \omega t) \end{cases} \quad (19)$$

式中： $A_n(\zeta)$ 、 $B_n(\zeta)$ 、 $C_n(\zeta)$ 是环向波数为 n 时的振型函数。引入 Chebyshev 多项式：

$$\begin{cases} A_n^i(\zeta) = \sum_{a=0}^M A_a T_a(x) \\ B_n^i(\zeta) = \sum_{a=0}^M B_a T_a(x) \\ C_n^i(\zeta) = \sum_{a=0}^M C_a T_a(x) \end{cases} \quad (20)$$

式中: A_a, B_a, C_a 为待定系数, M 为截断项数, $T_a(\cdot)$ 是 Chebyshev 多项式, 表达式为^[17,18]:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \\ T_{a+1}(x) = 2x \cdot T_a(x) - T_{a-1}(x) \quad (a \geq 1) \end{cases} \quad (21)$$

由于切比雪夫多项式所定义的区域是 $[-1, 1]$, 定义无量纲:

$$x^i = \frac{L^i(\xi+1)}{2}, \quad \zeta^i = \frac{x^i}{L^i} \quad (22)$$

因此, FGMs 连接壳结构的拉格朗日能量泛函 L 为:

$$L = U_i + V_i - T_i \quad (23)$$

式中: U_i, T_i 和 V_i 分别为 FGMs 圆柱壳和圆锥壳的最大应变能、最大动能以及约束弹簧的最大弹性势能.

由 Rayleigh-Ritz 法, 对待定系数求偏导, 可推出模态频率方程:

$$\{\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}^i \\ \mathbf{B}^i \\ \mathbf{C}^i \end{Bmatrix} = 0 \quad (24)$$

式中: \mathbf{K} 和 \mathbf{M} 分别为刚度阵和质量阵, $\mathbf{A}^i, \mathbf{B}^i$ 和 \mathbf{C}^i 为待定系数组成的向量, ω 为模态频率. 求解频率方程可得到 FGMs 锥-柱连接壳的特征频率, $\mathbf{A}^i, \mathbf{B}^i$ 和 \mathbf{C}^i 的具体表达式为:

$$\begin{cases} \mathbf{A}^i = \{A_0, A_1, A_2 \cdots A_n, A_{00}, A_{11}, A_{22} \cdots A_{mm}\}^T \\ \mathbf{B}^i = \{B_0, B_1, B_2 \cdots B_n, B_{00}, B_{11}, B_{22} \cdots B_{mm}\}^T \\ \mathbf{C}^i = \{C_0, C_1, C_2 \cdots C_n, C_{00}, C_{11}, C_{22} \cdots C_{mm}\}^T \end{cases} \quad (25)$$

定义无量纲模态频率为:

$$\omega = \bar{\omega} R_2 \sqrt{\frac{\rho_2 (1 - \nu_2^2)}{E_2}} \quad (26)$$

4 分析与讨论

4.1 模型验证

为了更好的达到计算条件, 探究梯度指数 $k = 2$, 环向波数 $n = 2$ 和 3, $T = 300$ K 下由陶瓷氧化锆金属铝构造的 FGMs 锥-柱连接壳, 当设置边界弹簧刚度为 0, 连接处弹簧刚度如图 3(a) 所示变化, 在大于等于 1×10^{12} 时, 结构无量纲频率分别达到 0.01360 和 0.03723 且不再变化, 通过与文献[19]比较, 最大误差仅为 2.14%. 因此连接弹簧刚度大于等于 1×10^{12} 时可较好的模拟连接条件, 同时也说明边界弹簧刚度等于 0 时, 其可模拟自由边界; 当设置连接弹簧刚度为 1×10^{13} , 边界弹簧刚度如图 3(b) 所示, 在大于等于 1×10^{12} 时, 无量纲频率分别为 0.04358 和 0.05075 且不再变化, 通过与文献[19]比较, 最大误差为 2.4%. 因此, 边界弹簧刚度大于等于 1×10^{12} , 可更好的模拟固支边界. 综上所述, 自由(F)、软筒支(SD)、硬筒支(SS)和固支(C)四种边界弹簧刚度系数设置如表 3 所示, 以圆锥左端边界为例.

表 2 对比文献中的材料参数

Table 2 Material parameters in reference documents

Materials	Elastic module E (10^9 Pa)	Passion ratio ν	Density ρ (kg/m^3)
Ref. [17]	Zirconia	168	0.3
	Aluminum	70	0.3
Ref. [1]	Stainless steel	207.788	0.3177
	Ni	205.098	0.3

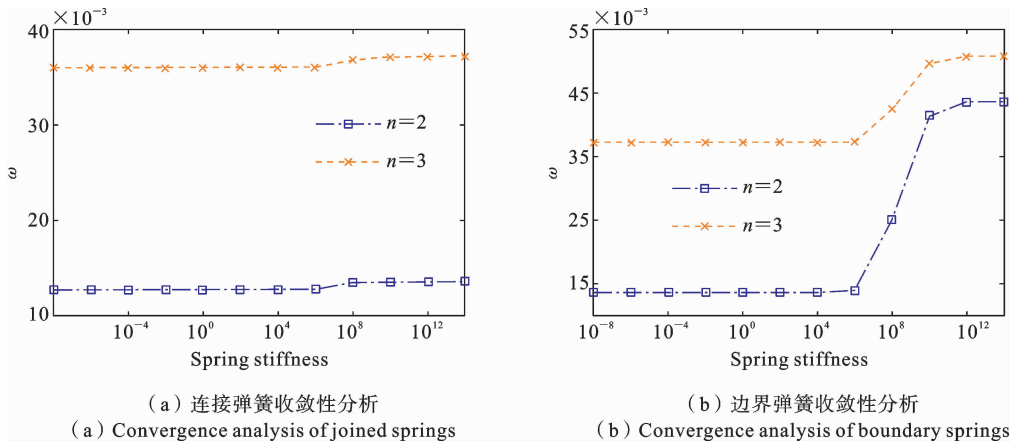


图 3 弹簧刚度收敛性分析

Fig. 3 Convergence analysis of spring stiffness

表 3 边界弹簧刚度系数

Table 3 Stiffness coefficient of boundary spring

Boundary condition	F	SD	SS	C
Stiffness coefficient	$k_1 = 0$	$k_1 = 0$	$k_1 = 1 \times 10^{13}$ N/m	$k_1 = 1 \times 10^{13}$ N/m
	$k_2 = 0$	$k_2 = 1 \times 10^{13}$ N/m	$k_2 = 1 \times 10^{13}$ N/m	$k_2 = 1 \times 10^{13}$ N/m
	$k_3 = 0$	$k_3 = 1 \times 10^{13}$ N/m	$k_3 = 1 \times 10^{13}$ N/m	$k_3 = 1 \times 10^{13}$ N/m
	$k_4 = 0$	$k_4 = 0$	$k_4 = 0$	$k_4 = 1 \times 10^{13}$ N/rad

壳体位移结构是无穷项切比雪夫多项式的总和,在实际计算过程中,为了便于提高计算效率,只需要计算有限项.因此表 4 分析了 C-C 边界条件下,梯度指数为 1 的 FGMs 锥-柱连接壳的收敛性并与有限元进行对比结果较吻合,产生的误差主要是由于有限元网格大小的选取.图 4 展示了根据线性离散分层思想并基于 ABAQUS 软件建立 FGMs 锥-柱连接壳有限元模型,环向波数为 1、2 和 3 时的振型如图 5 所示.结果表明:在截断数为第 10 项时,频率已经达到收敛,说明切比雪夫对于求解结果具有较好的收敛性.因此本文后续计算均采用截断 10.

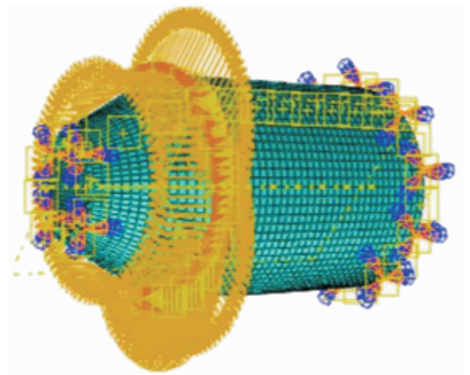


图 4 FGMs 锥-柱连接壳有限元模型
Fig. 4 Finite element model of FGMs joined conical-cylindrical shell

表 4 截断项数对结构无量纲模态频率的影响

Table 4 Influence of truncated terms on the dimensionless modal frequency of structures

n	M					FEM
	4	6	8	10	12	
1	0.06223	0.05577	0.05530	0.05529	0.05529	0.05364
2	0.05613	0.04441	0.04382	0.04380	0.04380	0.04203
3	0.06248	0.05075	0.05040	0.05038	0.05038	0.04544

表 5 研究了 C-C、SS-SS 和 SS-C 三种边界条件下 FGMs 锥-柱连接壳的模态频率,表 6 研究了金属钢和陶瓷镍制成的 SD-SD 边界条件 FGMs 圆柱壳模态频率. 结果表明:在各种边界条件下,本文基于能量原理求解与文献[19]和文献[1]的计算结果基

本吻合,总体误差小于 3%,产生误差的主要原因是由于不同壳体理论和求解方法. 这也说明 Chebyshev 多项式可用于分析 FGMs 锥-柱连接壳的振动特性.

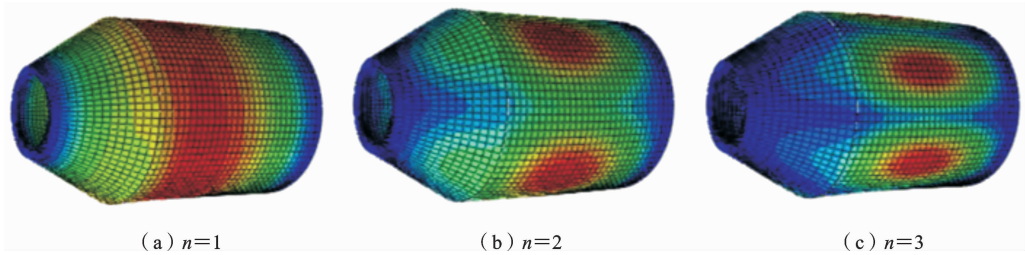


图 5 FGMs 锥-柱连接壳振型

Fig. 5 Vibration mode of FGMs joined conical-cylindrical shell

表 5 不同边界条件下 FGMs 锥-柱连接壳的无量纲频率对比

($R_2 = 1 \text{ m}$, $R_1 = 0.4226 \text{ m}$, $L^{cy} = 2.5 \text{ m}$, $\alpha_0 = 30^\circ$, $h = 0.1 \text{ m}$, $a = 1$, $b = 0$)

Table 5 Comparison of dimensionless frequencies of FGMs joined conical-cylindrical shell under different boundary conditions ($R_2 = 1 \text{ m}$, $R_1 = 0.4226 \text{ m}$, $L^{cy} = 2.5 \text{ m}$, $\alpha_0 = 30^\circ$, $h = 0.1 \text{ m}$, $a = 1$, $b = 0$)

n	k	boundary condition					
		C-C		SS-SS		SS-C	
		Present	Ref. [19]	Present	Ref. [19]	Present	Ref. [19]
1	0.5	0.05578	0.05402	0.05477	0.05322	0.05509	0.05354
	2	0.05475	0.05307	0.05384	0.05228	0.05412	0.05254
	5	0.05411	0.05239	0.05310	0.05157	0.05342	0.05187
	10	0.05373	0.05198	0.05264	0.05112	0.05299	0.05148
2	0.5	0.04415	0.04310	0.04295	0.04202	0.04391	0.04283
	2	0.04352	0.04255	0.04255	0.04161	0.04336	0.04226
	5	0.04340	0.04234	0.04224	0.04129	0.04317	0.04206
	10	0.04313	0.04208	0.04184	0.04091	0.04289	0.04180
3	0.5	0.05069	0.04959	0.04972	0.04877	0.05068	0.04958
	2	0.05074	0.04954	0.04991	0.04885	0.05073	0.04952
	5	0.05162	0.05034	0.05069	0.04956	0.05161	0.05033
	10	0.05147	0.05023	0.05043	0.04936	0.05146	0.05022

表 6 SD-SD 边界条件下 FGMs 圆柱壳的频率对比 ($R_2=1, h/R_2=0.002, L/R=20$)

Table 6 Comparison of frequency for FGMs cylindrical shell under SD-SD boundary conditions ($R_2=1, h/R_2=0.002, L/R=20$)

k		n						
		1	2	3	4	5	6	7
1	Ref. [1]	13.211	4.480	4.1569	7.0384	11.241	16.455	22.635
	Present	13.217	4.482	4.1583	7.0415	11.246	16.463	22.646
15	Ref. [1]	12.933	4.3834	4.0653	6.8856	10.999	16.101	22.148
	Present	12.939	4.3851	4.0666	6.8886	11.004	16.109	22.159

4.2 FGMs 锥-柱连接壳的模式频率分析

如未特殊说明,则选取 $T=300\text{ K}$ 下 $a=1, b=0$ 陶瓷 Si_3N_4 和金属 SUS304 作为 FGMs 锥-柱连接壳组成材料.壳体的几何参数为: $R_2=1\text{ m}, R_1=0.5\text{ m}, \alpha_0=30^\circ, h=0.003\text{ m}, L^{cy}=5\text{ m}$.

4.2.1 梯度指数的影响

表 7 分析了 C-C 和 SD-SD 两种边界条件不同

梯度指数下模式频率随环向波数的变化,对比可得:边界约束效果越强,结构刚度越大,结构模式频率越高.随着梯度指数的不断增大,结构的整体刚度不断减小,导致结构频率逐渐减小.随着环向波数的不断增大,结构的模式频率呈现出先减小后增大的趋势.

表 7 不同梯度指数下无量纲模式频率随环向波数的变化

Table 7 Variation of dimensionless modal frequency with circumferential wave number under different gradient exponent

Boundary condition	n	k				
		0.3	0.5	1	3	5
C-C	1	0.05521	0.05015	0.04366	0.03636	0.03435
	2	0.02706	0.02517	0.02146	0.01792	0.01695
	3	0.01497	0.01362	0.01190	0.00995	0.00941
	4	0.00984	0.00897	0.00784	0.00659	0.00623
	5	0.00843	0.00768	0.00674	0.00571	0.00542
	6	0.00945	0.00862	0.00758	0.00647	0.00616
	7	0.01191	0.01085	0.00954	0.00819	0.00781
	8	0.01521	0.01385	0.01219	0.01047	0.00999
SD-SD	1	0.04031	0.03667	0.03199	0.02674	0.02530
	2	0.01878	0.01709	0.01492	0.01248	0.01180
	3	0.01020	0.00929	0.00812	0.00679	0.00643
	4	0.00707	0.00644	0.00565	0.00476	0.00451
	5	0.00702	0.00640	0.00563	0.00480	0.00456
	6	0.00882	0.00804	0.00708	0.00607	0.00578
	7	0.01161	0.01058	0.00931	0.00800	0.00763
	8	0.01506	0.01372	0.01207	0.01037	0.00990

图 6(a)和(b)分别对 C-C,SD-SD 两种边界条件下频率在不同环向波数下随梯度指数变化的影响进行了分析. 结果表明:不同边界条件下,当梯度指数趋近于 1×10^{-2} 时,可将结构看作由内表面材料构成的连接壳结构,随着梯度指数的不断增大,最终模态频率会逐渐减小并收敛趋于稳定. 当梯度指数

趋于 1×10^2 时,可将结构看作是由外表面材料制成的连接壳结构. 同时也说明 FGMs 连接壳采用四参数幂函数体积分数,可以通过改变指数 k ,满足工程实际要求. 后续如未说明,则研究主要采用梯度指数为 1 进行讨论分析.

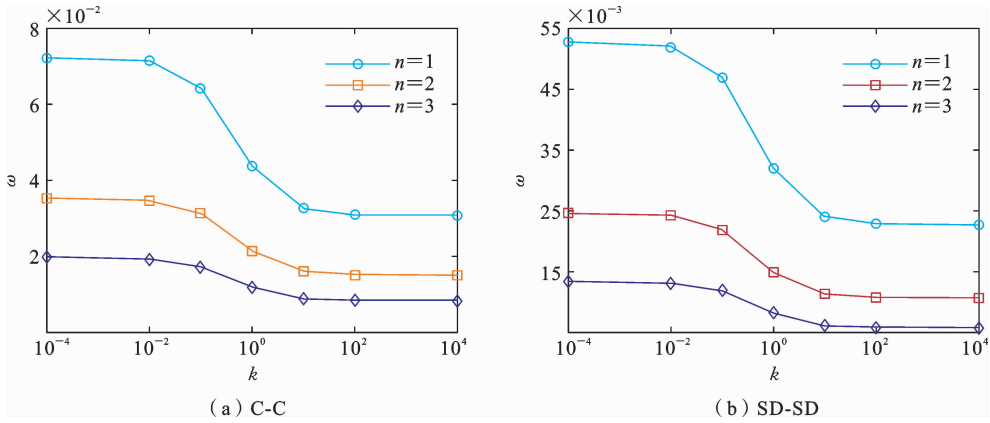


图 6 模态频率随梯度指数的变化

Fig. 6 Variation of modal frequency with gradient exponent

4.2.2 边界条件的影响

图 7(a)研究了 C-C、C-F、F-C、SD-SD、SD-C、C-SD 六种经典边界条件对 FGMs 连接壳模态频率的影响,结果表明:当环向波数小于 6 时,边界条件对于 FGMs 连接壳的频率影响较大,且约束条件越大,结构的整体刚度越大,频率越高;当环向波数大于 6 时,边界条件对结构的频率影响较小;通过对比

SD-C、C-SD 和 F-C、C-F 边界条件,说明边界条件作用于圆柱壳对于结构的约束效果大于圆锥壳;不同边界条件下,FGMs 连接壳结构频率随着环向波数的增大呈先减小后增大的趋势,图 7(b)所示当环境温度升高时,降低了结构的弹性模量,因而减小了结构刚度. 从而会使结构模态频率会降低但变化范围较小. 在外部激励条件下,低频比较容易发生共振,

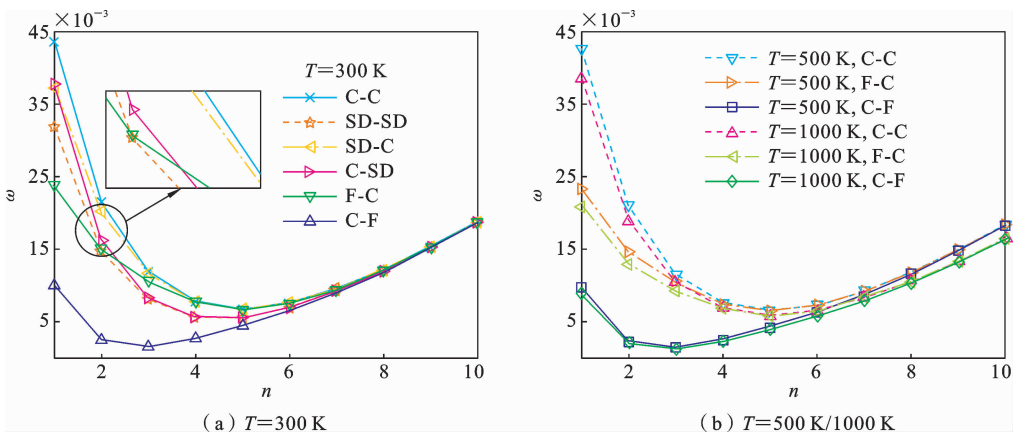


图 7 模态频率随环向波数的变化

Fig. 7 Variation of modal frequency with circumferential wave number

因此主要对 $T=300$ K 下环向波数大于 1 的结构振动特性进行分析。

图 8(a) 分析了边界两端轴向和旋转弹簧刚度 $k_1=k_5=k_4=k_8=0$ 时, 结构由 F-F 到 SD-SD 边界条件的模态频率的变化, 结果表明: 环向弹簧 k_2, k_6 和径向弹簧 k_3, k_7 的影响基本一致, 当弹簧刚度小于 1×10^4 时, 模态频率基本没有变化, 在弹簧刚度大于等于 1×10^{12} 后模态频率趋于收敛, 图 8(b) 研

究了两端环向弹簧和径向弹簧 $k_2=k_6=k_3=k_7=1 \times 10^{13}$ 时, 由 SD-SD 到 C-C 边界条件的模态频率的变化, 结果表明: 当弹簧刚度小于 1×10^4 时, 模态频率基本没有变化, 大于 1×10^4 时, 模态频率随轴向弹簧 k_1, k_5 的变化比旋转弹簧 k_4, k_8 更为明显, 说明了轴向弹簧刚度系数对结构的频率变化比旋转弹簧刚度系数影响更大。

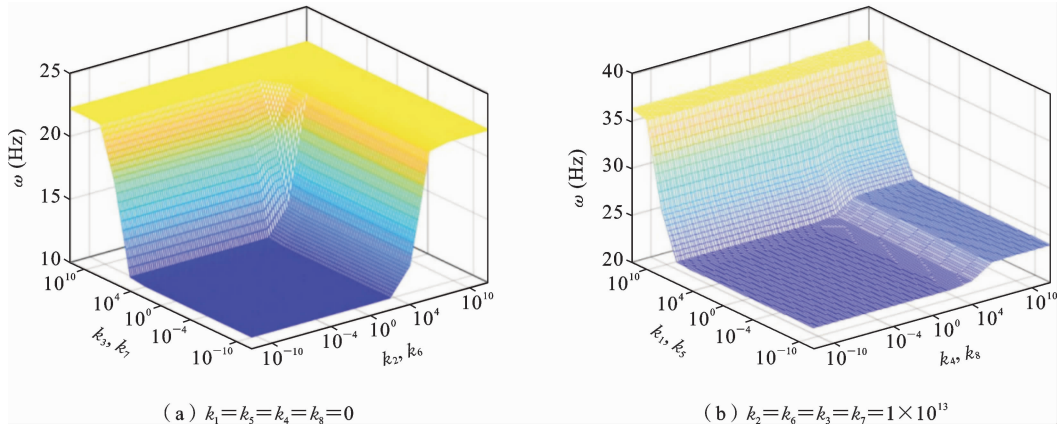


图 8 模态频率随边界弹簧刚度的变化

Fig. 8 Variation of frequency with stiffness of boundary spring

4.2.3 厚径比的影响

图 9(a) 和 (b) 分别研究了 C-C、SD-SD 两种边界条件下 FGMs 连接壳频率随厚径比的影响, 结果表明: 随着厚径比的不断增大, 结构的刚度不断增大, 结构的非线性现象产生愈加困难, 因此在图中展现出模态频率随厚度的增加近似呈线性变化. 在环向波数小于 3 时, 厚度的增加对模态频率影响较弱, 当环向波数大于 3 时, 模态频率随着结构厚度的增大几乎呈线性升高. 图 9(c) 和 (d) 分别分析了在 $n=2$ 的 C-C 和 SD-SD 两种边界条件下, 随着梯度指数增加, 模态频率在下降, 说明梯度指数比厚度对结构的模态频率影响更大。

4.2.4 圆锥角的影响

图 10 展示了 $n=2$ 时 C-C 边界条件模态频率随半锥角的影响, 如图 10(a) 得出: 无论如何改变柱壳和锥壳的长度比, 结构的模态频率都是先增大后减小. 长度比越大, 结构的刚度降低, 导致结构频率越低. 作为一个整体, 当锥角趋近于 $\pm 90^\circ$ 时即结构近似于板-壳连接, 锥角对结构模态频率影响更大. 而

当结构为壳-壳连接时, 模态频率对结构的长度参数更为敏感. 当 L^{cy}/L^{∞} 分别为 1、2 和 3 时, 锥角在负方向上, 结构的模态频率分别在 $25^\circ \sim 35^\circ$ 、 $35^\circ \sim 45^\circ$ 和 $15^\circ \sim 25^\circ$ 存在峰值; 在正方向上, 分别在 $15^\circ \sim 25^\circ$ 、 $25^\circ \sim 35^\circ$ 和 $55^\circ \sim 65^\circ$ 存在峰值. 如图 10(b) 所示, 在锥壳半径一定情况下, 改变锥角会导致锥壳长度的改变; 随着锥角的增加, 结构的模态频率先增加达到峰值后减小, 并且柱壳越长, 模态频率达到峰值所需锥角越大。

5 结论

本文基于 Donnell 壳体理论和引入弹簧模拟任意边界条件和连接条件, 采用 Chebyshev 多项式和 Ritz 法, 分析了边界条件、梯度指数和几何参数对 FGMs 锥-柱连接壳模态频率的影响, 主要结论如下:

(1) 增大梯度指数能够降低结构的模态频率. 当梯度指数趋近于 1×10^{-2} 或 1×10^2 时, 可退化为由单一材料构成的壳体结构。

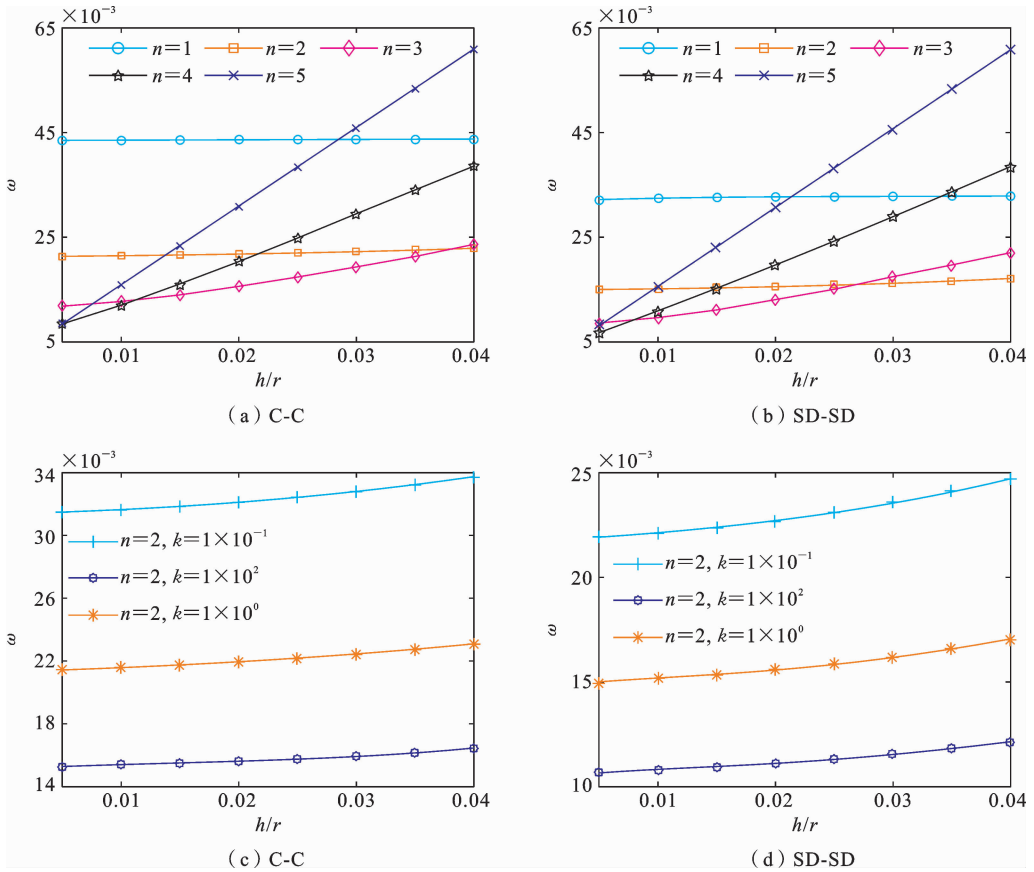


图 9 模态频率随厚径比的变化

Fig. 9 Variation of modal frequency with thickness to radius ratio

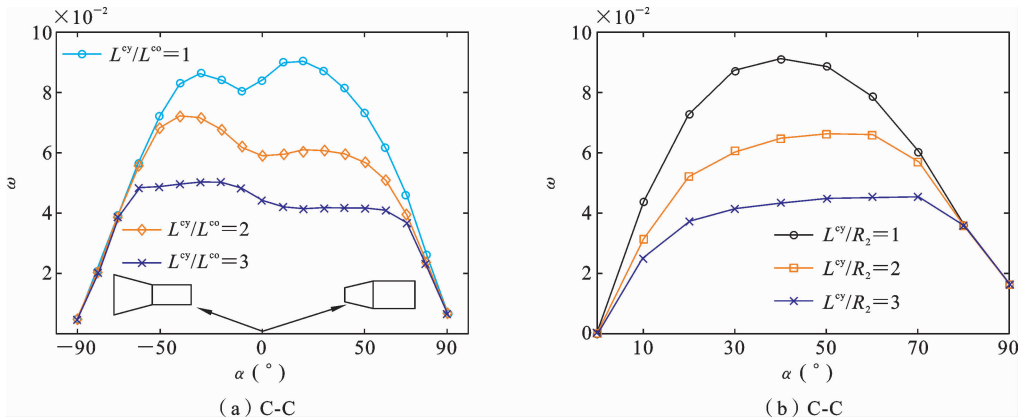


图 10 模态频率随半锥角的变化

Fig. 10 Variation of modal frequency with half cone angle

(2) 边界约束条件越强,FGMs 锥-柱连接壳的模态频率越高。随着环向波数的增大,边界条件对结构模态频率的影响越来越弱,边界约束效果作用于圆柱壳明显强于圆锥壳。

(3) 改变壳体厚度能够有效的提高结构模态频

率。特别在环向波数小于 3 时,改变壳体厚度对结构模态频率影响较弱。随着环向波数的增加,结构模态频率会呈线性提高;即使在增大壳体厚度前提下,梯度指数的增加,结构的模态频率仍会降低。

(4) 在锥柱壳长度比一定时,研究发现随着锥

角的增大,结构的模态频率呈先增加后减小的趋势;此外,锥角为正方向且锥壳半径一定时,所连接的柱壳越长,需要更大的锥角才能使频率达到峰值。

参考文献

- [1] Loy C T, Lam K Y, Reddy J N. Vibration of functionally graded cylindrical shells[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1999, 41(3): 309-324.
- [2] 李文达, 杜敬涛, 杨铁军, 刘志刚. 弹性边界约束旋转功能梯度圆柱壳结构自由振动行波特性分析[J]. *应用数学和力学*, 2015, 36(07): 710-724. (Li W D, Du J T, Yang T J, Liu Z G. Traveling wave mode characteristics of rotating functional gradient material cylindrical shell structures with elastic boundary constraints[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, 36(07): 710-724. (in Chinese))
- [3] 李文达, 杜敬涛, 杨铁军, 刘志刚. 基于改进傅里叶级数方法的旋转功能梯度圆柱壳振动特性分析[J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2016, 37(3): 388-393. (Li W D, Du J T, Yang T J, Liu Z G. Vibration characteristics analysis of the rotating functionally graded cylindrical shell structure using an improved Fourier series method[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2016, 37(3): 388-393. (in Chinese))
- [4] 陈金晓, 梁斌. 弹性边界条件下的功能梯度圆柱壳振动特性研究[J]. *船舶力学*, 2017, 21(7): 880-887. (Chen J X, Liang B. Study on the vibration of functionally graded material cylindrical shells under elastic boundary conditions[J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2017, 21(7): 880-887. (in Chinese))
- [5] 黄小林, 刘思奇, 肖薇薇, 吴迪. 弹性地基中含孔隙的功能梯度圆锥壳的振动分析[J]. *力学与实践*, 2021, 43(04): 536-543. (Huang X L, Liu S Q, Xiao W W, Wu D. Vibration analysis of functionally graded porous conical shells rested on elastic foundations [J]. *Mechanics in Engineering*, 2021, 43(4): 536-543. (in Chinese))
- [6] Zheng D, Du J, Liu Y. Vibration characteristics analysis of an elastically restrained cylindrical shell with arbitrary thickness variation[J]. *Thin-Walled Structures*, 2021, 165: 107930.
- [7] Qin Z Y, Zhao S N, Pang X J, Babak SAFAEI. Fu L C. A unified solution for vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells reinforced by graphene with general boundary conditions[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 170: 105341.
- [8] 曹洲, 郝育新, 顾晓军, 李珍妮. 热环境下功能梯度夹层双曲壳自由振动分析[J]. *固体力学学报*, 2018, 39(03): 284-295. (Cao Z, Hao Y X, Gu X J, Li Z N. Free vibration of functionally graded doubly-curved sandwich shell in thermal environment [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2018, 39(03): 284-295. (in Chinese))
- [9] Bagheri H, Kiani Y, Bagheri N, Eslami M R. Free vibration of joined cylindrical-hemispherical FGM shells[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2020, 90: 2185-2199.
- [10] Damercheloo A R, Khorshidvand A R, Khorsandijou S M, Jabbari M. Free vibrational characteristics of GNP-reinforced joined conical-conical shells with different boundary conditions [J]. *Thin-Walled Structures*, 2021, 169: 108287.
- [11] Damercheloo A R, Khorshidvand A R, Khorsandijou S M, Jabbari M. A study on dynamic analysis of rotating GNP-reinforced joined conical-conical shells [J]. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2022, 44(6): 234.
- [12] Zarei M, Rahimi G H, Hemmatnezhad M. On the free vibrations of joined grid-stiffened composite conical-cylindrical shells [J]. *Thin-Walled Structures*, 2021, 161: 107465.
- [13] Sobhani E, Arbabian A, Civalek Ö, Avcar M. The free vibration analysis of hybrid porous nanocomposite joined hemispherical-cylindrical-conical shells[J]. *Engineering with Computers*, 2022, 38(4): 3125-3152.
- [14] Fu T, Wu X, Xiao Z, Li B. Analysis of vibration characteristics of FGM sandwich joined conical-conical shells surrounded by elastic foundations[J]. *Thin-Walled Structures*, 2021, 165: 107979.
- [15] Safarpour H, Mohammadi K, Ghadiri M, Barooti M M. Effect of porosity on flexural vibration of CNT-reinforced cylindrical shells in thermal environment using GDQM[J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2018, 18(10): 1850123.

- [16] Chai Q, Wang Y Q. Traveling wave vibration of graphene platelet reinforced porous joined conical-cylindrical shells in a spinning motion[J]. *Engineering Structures*, 2022, 252: 113718.
- [17] 刘超, 刘文光, 吕志鹏, 张宇航. 旋转 FGMs 层合圆柱壳行波模态频率分析[J]. *航空动力学报*, 2022, 37(04): 721-733. (Liu C, Liu W G, Lyu Z P, Zhang Y H. Analysis on traveling wave modal frequency of a rotating functionally graded laminated cylindrical shell [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2022, 37(04): 721-733. (in Chinese))
- [18] Chen Y, Jin G, Liu Z. Flexural and in-plane vibration analysis of elastically restrained thin rectangular plate with cutout using Chebyshev-Lagrangian method[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2014, 89: 264-278.
- [19] 宿柱. 功能梯度结构动力学建模及振动特性研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2017. (Su Z. Dynamic Modeling and Vibration Characteristics Analysis of Functionally Graded Structures[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2017. (in Chinese))

Analysis of Circumferential Free Vibration of Functionally Graded Joined Conical-cylindrical Shells

Lei Pang¹ Long Cheng¹ Wenguang Liu¹ Yuhang Zhang¹ Zhipeng Lv² Runhao Wan¹

(¹*School of Aeronautical Manufacturing Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang, 330063*)

(²*School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University, Shenyang, 110819*)

Abstract This paper focuses on analyzing the circumferential free vibration of the functionally graded joined conical-cylindrical shell to enhance the vibration performance and stability of the structure, particularly in the aerospace field. First, the properties of the functionally graded materials (FGMs) are described using the Voigt model and the four-parameter power function volume fraction. The energy expressions for the conical shell and cylindrical shell are derived based on the previously obtained displacement-strain relationships formulated utilizing the Donnell thin shell theory. Then, artificial springs are introduced to simulate the continuity conditions and boundary conditions. The displacement function is constructed using Chebyshev polynomials to enable a more accurate analysis of the structural response and performance. The modal frequencies of the functionally graded joined conical-cylindrical shell are calculated employing the Rayleigh-Ritz method with this displacement function. Hence, the influence of gradient exponent, boundary conditions, and geometric parameters on the modal frequencies is analyzed to reveal the vibration characteristics of the structure. The main results indicate that increasing the volume fraction of ceramics effectively enhances the modal frequencies of the structure, while higher gradient exponents lead to a decrease in the modal frequencies. Stronger boundary constraints result in higher modal frequencies for the functionally graded joined conical-cylindrical shell. With an increase in the circumferential wave number, the influence of boundary conditions on the structural modal frequencies diminishes. The effect of boundary constraints is more pronounced on the cylindrical shell compared to the conical shell. Additionally, the axial spring stiffness has a more significant impact on the modal frequencies of the structure compared to the circumferential and radial spring stiffnesses. When the circumferential wave number is greater than 3, the modal frequency of the structure exhibits a linear increase with increasing shell thickness, whereas increasing the conical and cylindrical shell length ratio leads to a decrease in modal frequency. Finally, when the length ratio of the conical and cylindrical shell is fixed, increasing the cone angle initially results in an increase in the modal frequencies of the structure until it reaches a peak value, after which it starts to decrease.

Key words joined conical-cylindrical shells, functionally graded material, Chebyshev polynomial, modal frequency