

耦合声学黑洞结构的轻质声子晶体低频带隙机理

陈俊豪, 曾晓辉, 谢友均, 龙广成, 唐 卓

(中南大学土木工程学院, 长沙 410000)

摘 要: 基于局域共振理论, 提出了一种耦合声学黑洞结构的新型轻质声子晶体, 利用声学黑洞结构的低频、宽频带和多模态特性, 拓宽了低频带隙。借助有限元方法, 计算了新型声子晶体的能带结构、本征模态和衰减特性, 研究了其带隙产生机理, 分析了声学黑洞结构尺寸等几何参数对带隙的影响规律。结果表明: 新型声子晶体在 1 600 Hz 频段内具有多个带隙, 第 1 完全带隙为 12~805 Hz, 40 Hz 以下的带隙覆盖率为 70%, 1 600 Hz 内的带隙覆盖率达到 97.3%。第 1 完全带隙的起始频率和截止频率主要由散射体和声学黑洞结构的振动模式决定。第 1 完全带隙起始频率随着声学黑洞结构短边高度的增加而增大, 声学黑洞结构宽度、短边高度以及连接短板高度对截止频率和带隙宽度有显著影响。

关键词: 局域共振; 声学黑洞; 声子晶体; 低频; 完全带隙

中图分类号: O735; TB535 文献标志码: A 文章编号: 0454-5648(2023)01-0226-09

网络出版时间: 2022-11-29



Band Gap Characteristics of Lightweight Phononic Crystals Coupled with Acoustic Black Hole Structure

CHENG Junhao, ZENG Xiaohui, XIE Youju, LONG Guangcheng, TANG Zhuo

(School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410000, China)

Abstract: A phononic crystal coupled with the acoustic black hole structure was proposed based on the local resonance theory. The low frequency band gap was widened by utilizing the low frequency, broad band gap, and multi-modal properties of the acoustic black hole structure. The energy band structure, eigenmodes and attenuation characteristics of the phononic crystal were calculated by the finite element method. The generation mechanism of its band gap was analyzed, and the influence of the geometric parameters (*i.e.*, the structural parameters of the acoustic black hole) on the band gap was discussed. The results show that the phononic crystal has multiple band gaps at 1 600 Hz, and the first complete band gap ranges from 12 to 805 Hz. The band gap coverage below 40 Hz is 70%, and the band gap coverage within 1 600 Hz reaches 97.3%. The starting and cut-off frequencies of the first complete band gap are mainly determined by the vibrational modes of the scatterer and the acoustic black hole structure. The starting frequency of the first complete band gap increases with increasing the height of the acoustic black hole structure short side. The width and short side height of the acoustic black hole structure and the height of the short plate have an effect on the cut-off frequency and the width of the first complete band gap.

Keywords: local resonance; acoustic black hole; phononic crystal; low frequency; complete band gap

低频振动和噪声是环境治理的难点问题, 传统吸声材料针对高频噪音吸声系数较高, 但对低频噪音效果较差^[1], 减振装置也受传统质量定律和刚度定律的限制, 对低频振动效果不佳^[2]。由于传统材料和结构在低频振动和噪声控制中的不足, 使得具

有抑制弹性波和声波传播的周期性人工复合材料—局域共振型声子晶体受到了广泛关注^[3]。局域共振型声子晶体不同于 Bragg 散射型声子晶体需要依赖结构的周期性^[4], 其主要依靠单个散射体的共振特性^[5-7], 带隙范围能达到 1 kHz 以下, 这对于低频振

收稿日期: 2022-07-31。 修订日期: 2022-08-10。

基金项目: 国家自然科学基金项目(52078490, 11790283)。

第一作者: 陈俊豪(1993—), 男, 博士研究生。

通信作者: 曾晓辉(1982—), 男, 博士, 教授。

Received date: 2022-07-31. Revised date: 2022-08-10.

First author: CHEN Junhao (1993—), male, Doctoral candidate.

E-mail: 359622670@qq.com

Correspondent author: ZENG Xiaohui (1982—), male, Ph.D., Professor.

E-mail: zxhzlh@126.com

动和噪声控制具有重要意义。

近年来,越来越多的局域共振型声子晶体被设计和制造出来,起初主要以实心散射体声子晶体为主。Li 等^[8]、何宇漾^[9]以及 Qi 等^[10]设计了一系列不同形状和排列的实心散射体声子晶体,将带隙的起始频率降低至了 44.4 Hz,带隙宽度最高达到了 662.6 Hz。为了节约材料和减轻质量,空心散射体声子晶体也被提出,但是同等规模下,空心散射体声子晶体的带隙起始频率较实心更高。康太凤等^[11]提出了一种二维空心散射体声子晶体,其带隙的起始频率为 160 Hz,带隙宽度为 420 Hz。此外,刘威等^[12]通过将散射体设计为双侧空心不对称结构,使得带隙的起始频率降低至了 79 Hz。空心散射体声子晶体已经被制成吸声板广泛用于汽车振动和噪声控制,而车内轰鸣声的峰值频率主要分布在 20~200 Hz 范围内^[13],现有的空心散射体声子晶体虽然能实现宽频带隙,但其带隙却未覆盖 40 Hz 以下的频段。为了使空心散射体声子晶体兼具轻质和低频带隙的优点,其结构优化设计成为了研究的重点,这对于 40 Hz 以下的低频振动和噪声控制显得尤为重要。

薄板结构中,如果阻抗随板厚度呈指数变化,弯曲波速会随着板厚度的减小而逐渐减小,理想情况下可以减小到 0,弯曲波就不会发生反射,这种薄板结构被称为声学黑洞(ABH)结构^[14-15]。ABH 结构已被大量应用于轻质减振降噪产品的研发^[16],成为近年来的研究热点。Zhao 等^[17]通过在隔振器中耦合 ABH 结构,设计出一种新型声子晶体隔振器,在 200 Hz 以下产生了 3 条完全带隙,实现拓宽低频带隙的目的。何璞等^[18]提出了基于声学黑洞的盒式结构来实现梁的全频段振动控制。这些研究表明,利用 ABH 结构表现出的低频、宽频带和多模态特性,可对现有的空心散射体声子晶体设计进行优化,

使其带隙能覆盖 40 Hz 以下的频段。

本工作在文献[12]提出的双侧空心不对称散射体声子晶体的基础上,将 4 个 ABH 结构与连接短板相连,形成了一种新型轻质声子晶体,结合有限元方法计算了新型声子晶体的能带结构、本征模态和衰减特性,研究了其带隙产生机理,讨论了新型声子晶体的几何设计参数对第一完全带隙的影响规律。

1 新型声子晶体结构与建模

新型轻质声子晶体如图 1 所示。模型首先是由空心钨圆柱和圆锥台上下连接构成散射体,并在圆柱体下部嵌入 4 个沿圆周均匀分布的硅橡胶包裹层,4 个环氧树脂连接短板嵌入在包裹层中心位置,最后将硅橡胶 ABH 结构与短板相连就构成了新型轻质声子晶体。

新型声子晶体的结构参数为:晶格常数 a 为 11.5 mm、空心钨圆柱的内径 r_1 和外径 r_2 分别为 2.8 mm 和 3.6 mm、高度 h_1 为 5 mm,空心钨圆锥台的顶部内外半径与空心钨圆柱的内外半径相同,其底部内径 r_3 和外径 r_4 分别是 3.5 mm 和 4.3 mm、高度 h_2 为 5 mm,硅橡胶包裹层、连接短板和 ABH 结构的长边高度 h_3 为 1 mm,包裹层的宽度 l_1 为 0.7 mm,短板的宽度 l_2 为 0.5 mm,ABH 结构的宽度 l_3 为 1 mm,短边高度 h_4 为 0.02 mm,其厚度呈指数减小,包裹层的开口角度 θ 为 30°。新型声子晶体的材料参数如表 1 所示。

为了对比研究新型声子晶体的带隙特性,图 2 为 2 种对比模型,参考模型 I 为文献[12]所提出的双侧空心不对称散射体声子晶体,参考模型 II 则是将 ABH 结构更换为宽度和高度分别为 l_3 和 h_3 的硅橡胶块,参考模型 I 和 II 的材料和其他结构参数均与本工作提出的新型声子晶体一致。

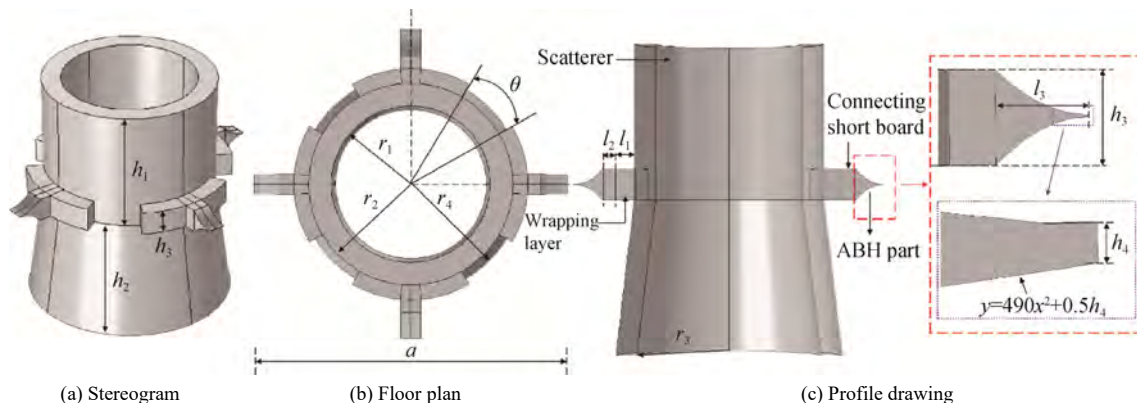


图 1 新型声子晶体

Fig. 1 A new type of phononic crystal

表 1 材料参数
Table 1 Material parameters

Material parameter	Elastic modulus/Pa	Density/(kg·m ⁻³)	Poisson's ratio
Tungsten	3.540×10^{11}	19 100	0.350
Silicon rubber	1.175×10^5	1 300	0.469
Epoxy	4.350×10^9	1 180	0.370

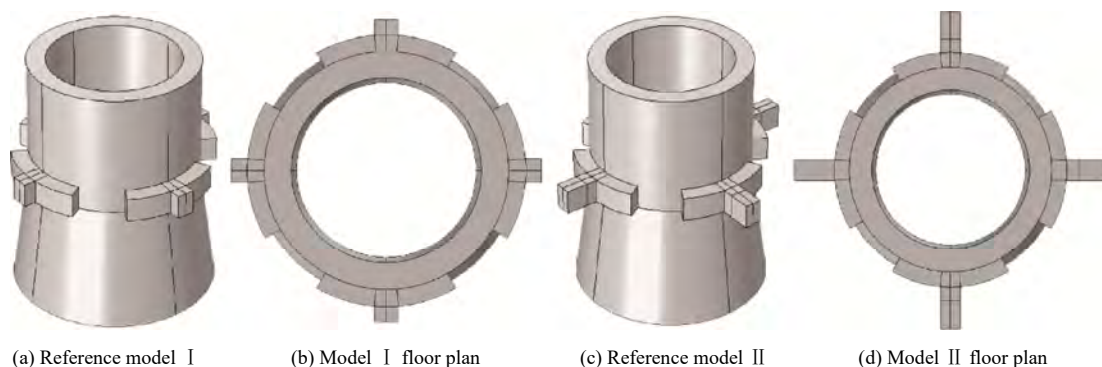


图 2 参考模型 I 和 II

Fig. 2 Reference models I and II

目前主要通过平面波展开法、时域有限差分法、集中质量法和有限元法对声子晶体带隙进行求解^[19]。有限元法具有适应性强、收敛快、准确性高等特点，因此被广泛用于声子晶体的带隙计算。由于本工作中的声子晶体在 x 和 y 方向上的周期性，根据 Bloch–Floquet 理论，相关计算可在单元胞内进行^[20]。元胞边界上的所有节点均应满足：

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{a})} \mathbf{u}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

其中： $\mathbf{u}$ 为所有节点的位移矩阵； $\mathbf{a}$ 即结构的晶格常数； $\mathbf{r}$ 为空间位置矢量； $\mathbf{K}$ 为典型单元的刚度矩阵。

典型单元的特征值方程可写为：

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

其中： ω 为本征角频率； $\mathbf{M}$ 为典型单元的质量矩阵。

由于 Brillouin 区的对称性，波矢沿着如图 3 所示的不可约 Brillouin 区的边界 $\Gamma-X-M-\Gamma$ 进行扫描，结合边界条件和特征值方程，利用 COMSOL Multiphysics 软件求解特征值，就可以得到能带结构和本征模态。

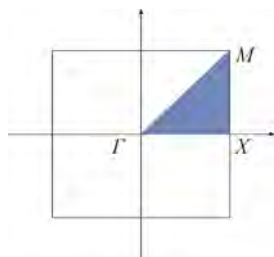


图 3 第一 Brillouin 区

Fig. 3 First Brillouin zone

2 带隙机理与分析

2.1 带隙计算

图 4 所示为新型声子晶体和 2 个参考模型的能带结构图，并将 3 个声子晶体的第一完全带隙起始频率 f_1 、截止频率 f_2 、宽度 b 、40 Hz 内的带隙覆盖率 b_{40} 以及 1 600 Hz 内的带隙覆盖率 b_{1600} 的统计结果如表 2 所示。从图 4 和表 2 可见，新型声子晶体在 1 600 Hz 频段内具有多个带隙，其中第一完全带隙范围为 12~805 Hz，宽度为 793 Hz，低于参考模型 I 的带隙宽度，但是其带隙起始频率有效降至 12 Hz，优于参考模型 I 和 II 的 82 Hz 和 36 Hz，其中 40 Hz 以下的带隙覆盖率达到 70%，1 600 Hz 内的带隙覆盖率达到 97.3% 均大于参考模型 I 和 II。由此可以说明，ABH 结构以相对较少的材料用量，使得新型声子晶体的第一完全带隙起始频率显著降低，并且明显增大了 40 Hz 和 1 600 Hz 以内的带隙覆盖率。

2.2 带隙形成机理

图 5 为各模型第一完全带隙起始频率处的本征模态。从图 5 可见，3 种声子晶体模型第一完全带隙起始频率处的本征模态均为散射体沿不同方向的平移振动，包裹层受到不同程度的压缩/拉伸。散射体的平移振动对基体形成合力，与在基体中传播的弹性波相互耦合，当两力达到平衡状态，弹性波无法通过声子晶体从而导致了带隙的产生。

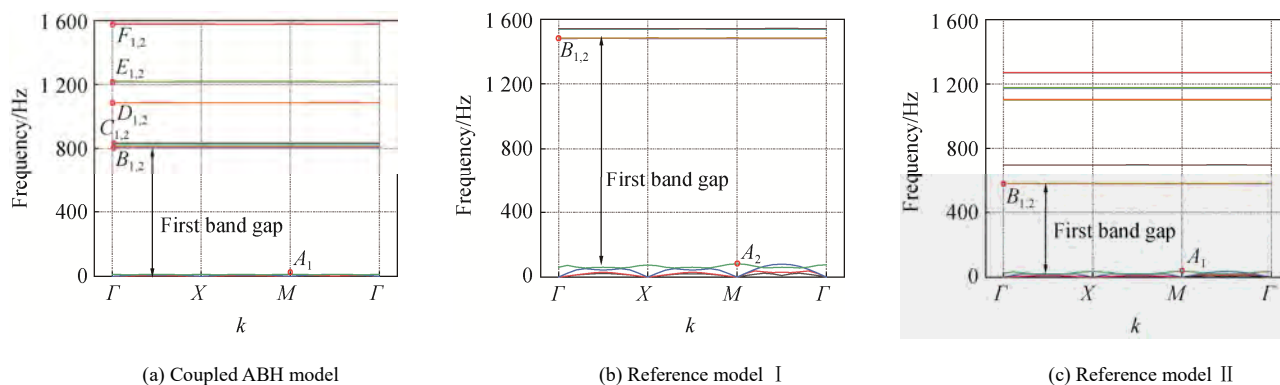


图 4 新型声子晶体和参考模型的能带结构图

Fig. 4 Band structure curves of new phononic crystal and reference models

表 2 新型声子晶体和参考模型的带隙结果

Table 2 Band gap results of new phononic crystal and reference models

Model ID	f_1/Hz	f_2/Hz	b/Hz	$b_{40}/\%$	$b_{1600}/\%$
Coupled ABH model	12	805	793	70	97.3
Reference model I	82	1 481	1 399	0	94.5
Reference model II	36	647	611	10	96.3

f_1 is starting frequency; f_2 is cut-off frequency; b is the band gap width; b_{40} is band gap coverage within 40 Hz; b_{1600} is band gap coverage within 1 600 Hz.

从表 2 可见, 新型声子晶体、参考模型 I 和参考模型 II 的第一完全带隙起始频率分别为 12 Hz、82 Hz 以及 36 Hz, 新型声子晶体和参考模型 II 的第一完全带隙起始频率相较于参考模型 I 的分别降低了 85.4% 和 56.1%。分析图 5 可见, 3 种声子晶体第一完全带隙起始频率处的本征模态虽然均为散射体的平移振动, 但是散射体的振动方向却不相同。参考模型 I 的散射体主要沿 X 轴平移振动,

从图 5b 可见, X 轴方向的包裹层受到了压缩/拉伸作用, 变形严重。新型声子晶体和参考模型 II 的散射体主要沿与 Y 轴夹角为 θ_1 和 θ_3 的直线方向平移振动, 其中 θ_1 的角度约为 45° , 包裹层受到了压缩/拉伸作用最小, 而 θ_3 的角度明显小于 θ_1 , 从而使得参考模型 II 的包裹层受到更大的压缩/拉伸作用, 但新型声子晶体和参考模型 II 的包裹层的变形均小于参考模型 I。

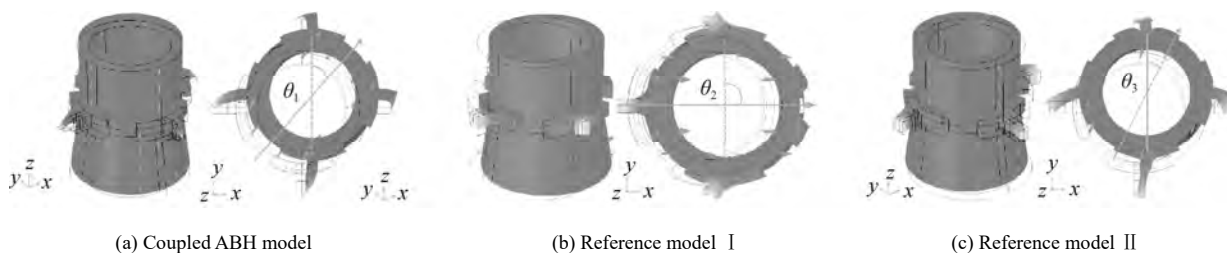


图 5 各模型第一完全带隙起始频率处本征模态

Fig. 5 Eigenmodes at the first full band gap starting frequency of each model

图 6 为各模型第一完全带隙截止频率处的本征模态。从图 6 可见, 参考模型 I 的本征模态为连接短板的向上平移振动, 包裹层也受到拉伸作用, 新型声子晶体和参考模型 II 的本征模态为 ABH 结构和硅橡胶块的向上平移振动, 而包裹层受到的拉伸作用较参考模型 I 更小。参考模型 I 的第一完全带隙截止频率主要由连接短板的振动决定, 而新型声子晶体和参考模型 II 的振动则主要是由 ABH 结

构和硅橡胶块的振动决定, 其中由于 ABH 结构的能量汇聚机理^[21], 使得振动能量均集中于 ABH 结构的尖端部分, 使得包裹层变形相对于参考模型 I 更小。

根据上述分析可知, 可以将新型声子晶体等效为弹簧-质量模型, 如图 7 所示。质量块 m_1 为散射体, 质量块 m_2 为连接短板和 ABH 结构, 忽略包裹层质量, 将其等效为弹簧系统 k 。

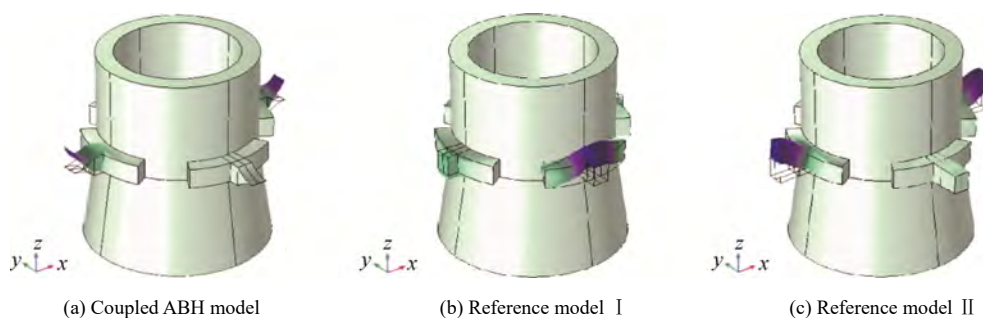


图 6 各模型第一完全带隙截止频率处本征模态

Fig. 6 Eigenmodes at the first full band gap cut-off frequency of each model

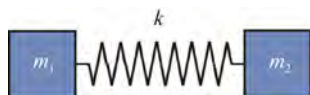


图 7 弹簧-质量模型

Fig. 7 Spring-mass model

得到新型声子晶体的等效弹簧-质量模型的能带频率计算公式(3):

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

式中: m 为散射体或连接短板和 ABH 结构振动部分的有效质量; k 为等效弹簧刚度。

由式(3)和上述分析可知, 新型声子晶体第一完全带隙起始频率和截止频率均小于参考模型 I 的原因主要是 2 种振动模态下, ABH 结构的加入使得声子晶体包裹层的变形减小, 降低了等效弹簧刚度 k 。

除了第一完全带隙起止频率处的本征模态以外, 图 8 所示为新型声子晶体能带结构中的标记点 C~F 对应的本征模态。从图 8 可见, 新型声子晶体在点 C~F 的本征模态均表现为 ABH 结构沿不同方向的平移振动, 这也证明了 ABH 结构的多模态特性。

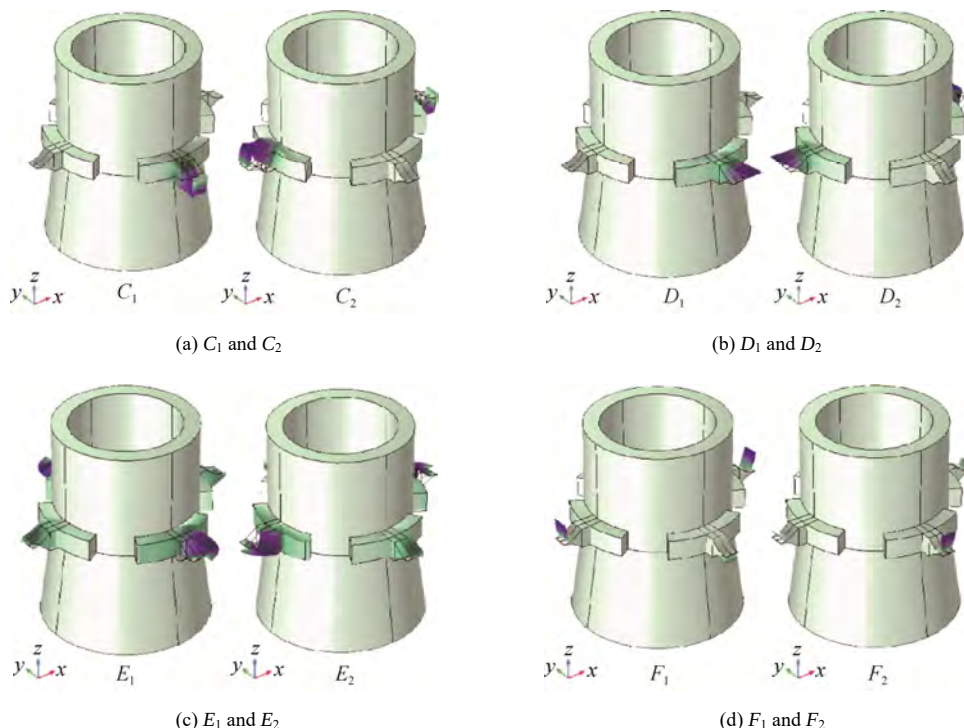


图 8 新型声子晶体带隙标记点 C~F 的本征模态

Fig. 8 Eigenmodes of the new phononic crystal band gap marked points C~F

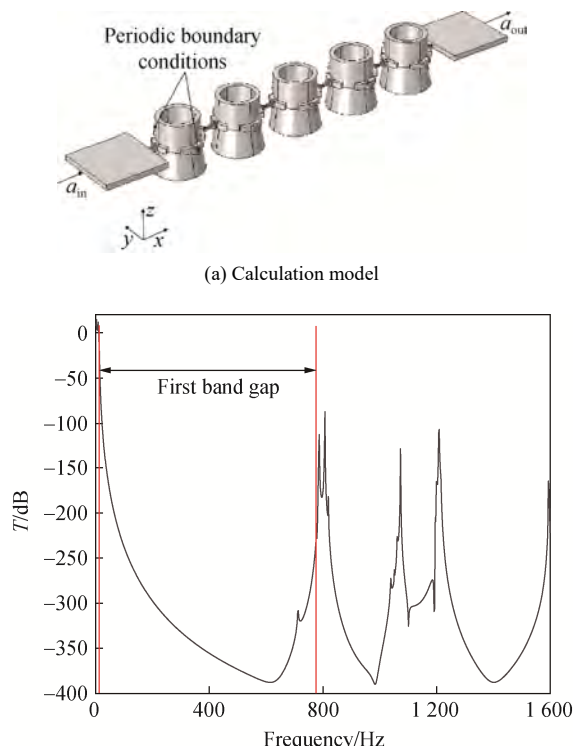
2.3 衰减特性

利用衰减特性^[22]验证新型声子晶体的带隙特性, 图 9a 为衰减特性计算模型。在输入端施加激励 a_{in} , 在接收端拾取响应 a_{out} , 加速度传递率 T 定义为:

$$T = 20 \lg \left(\frac{a_{out}}{a_{in}} \right) \quad (4)$$

式中: a_{in} 为输入端的加速度值; a_{out} 为输出端的加速度值。

新型声子晶体的加速度传递率 T 的计算结果如图 9b 所示。从图 9b 可见, 加速度衰减区间与图 4a 所示的带隙范围基本保持一致, 这也证实本工作提出的新型声子晶体带隙范围的准确性。



T is frequency response function.

(b) Frequency response function

图 9 衰减特性计算模型和结果

Fig. 9 Calculation model and result of attenuation characteristics

2.4 解析法与有限元法结果对比

弹性波传播时, 会引起声子晶体结构的振动和变形, 振动产生的能量会储存在结构中, 因此, 该过程可以看作应变能 W 的传播过程。由于变形的声子晶体结构各部分之间的弹性相互作用, 整个模型结构也存在势能 U 。当振动位移达到最大时, 应变能全部转为模型的势能 U , 此时 $W=U$ 。势能 U 可以表示为式(5):

$$U = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 \quad (5)$$

式中: $x_{\max}$ 为振动位移最大值。

特征频率 f 可由式(3)计算, 等效弹簧刚度 k 可由

$x_{\max}$ 和应变能 W 计算, 可通过有限元仿真获得。结合式(3)和式(5)以及点 A 和点 B_1 的本征模态, 表 3 所示为第一完全带隙起始频率和截止频率解析值 f_3 与有限元计算结果 f_4 的结果对比。由表 3 可见, 解析值 f_3 和有限元值 f_4 较为吻合, 其误差的产生主要来自于参振质量的取值、包裹层质量的忽略以及有限元计算精度。

3 声子晶体带隙的影响因素分析

为了进一步分析新型声子晶体第一完全带隙的影响因素, 研究了 ABH 结构宽度 l_3 和短边高度 h_4 、包裹层开口角度 θ 、短板宽度 l_2 、空心钨圆柱高度 h_1 以及圆锥台高度 h_2 等几何参数对第一完全带隙的影响规律。

3.1 ABH 结构宽度

图 10 为 ABH 结构宽度 l_3 对第一完全带隙的影响规律。从图 10 可见, 当 l_3 从 0.5 mm 逐渐增大至 3.0 mm, 带隙的起始频率始终保持在 12 Hz 左右, 截止频率则从 926 Hz 大幅下降至 175 Hz, 降低了 81.1%, 这主要是由于增大 ABH 结构宽度等同于增大了截止频率所对应的本征模态的参振质量 m 。

3.2 ABH 结构短边高度

图 11 为 ABH 结构短边高度 h_4 对第一完全带隙的影响规律。从图 11 可见, 当 h_4 由 0.1×10^{-4} mm 增大到 5.0×10^{-4} mm 时, 第一完全带隙的起始频率从 12 Hz 增大至 35 Hz, 增大了 191.7%, 截止频率从 805 Hz 降低至 575 Hz, 降低了 28.6%, 使得带隙宽度变窄, 从 793 Hz 降低至 540 Hz。从上述分析可知, 增大短边高度 h_4 , 会使得 θ_1 逐渐变小, 增大了包裹层的变形, 从而使等效刚度 k 增大, 导致第一完全带隙的起始频率增大。此外, 增大 ABH 结构短边高度也等同于增大了截止频率所对应的本征模态的参振质量 m 。

3.3 包裹层开口角度

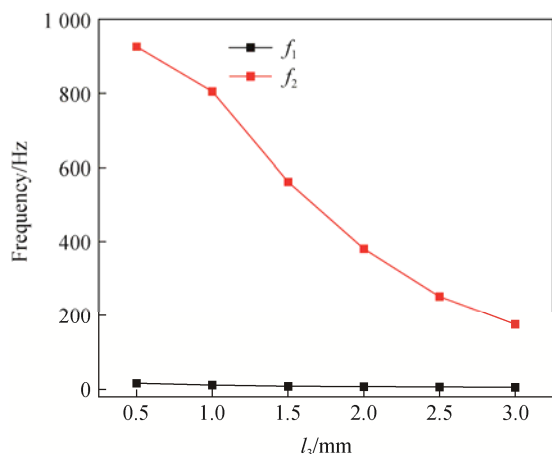
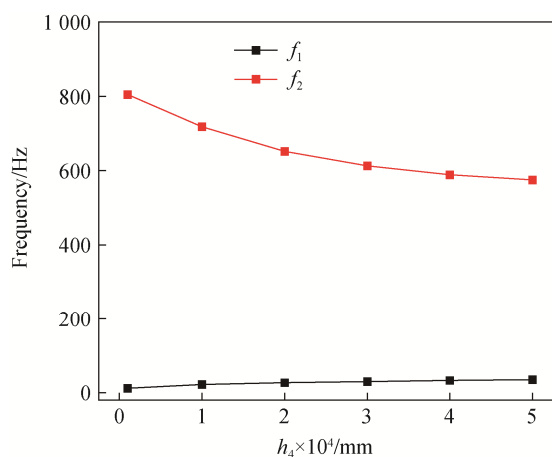
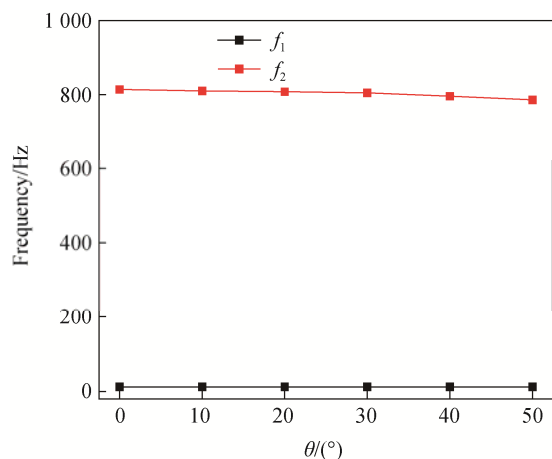
图 12 为包裹层开口角度 θ 对第一完全带隙的影响规律。从图 12 可见, 当 θ 由 0° 增大至 50° , 第一完全带隙的起始频率始终为 12 Hz, 截止频率从 814 Hz 降低至 786 Hz, 降低了 3.4%, 这主要是由于 θ 降低导致了等效刚度 k 下降, 而等效质量 m 保持不变。

表 3 能带频率计算结果对比

Table 3 Comparison of band frequency calculation results

Marked point	$x_{\max}/m$	W/J	$k/(N \cdot m^{-1})$	M/kg	f_3/Hz	f_4/Hz
A	2.49×10^{-8}	3.0×10^{-15}	12.0	3.2×10^{-3}	9.75	12.4
B_1	5.80×10^{-9}	2.8×10^{-16}	16.6	6.8×10^{-7}	786.3	805.8

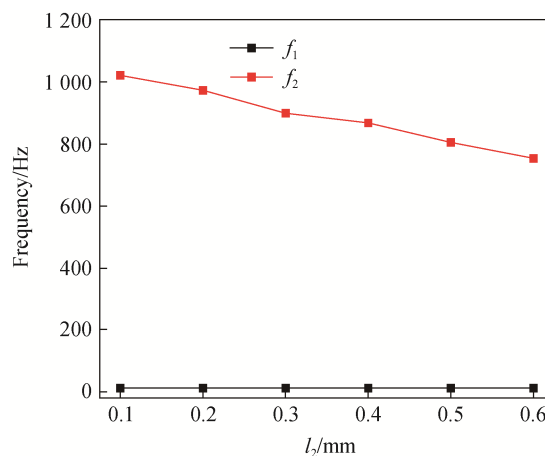
$x_{\max}$ is the maximum vibration displacement; W is the strain energy; k is the equivalent spring stiffness; M is the equivalent mass; f_3 is the parse value; f_4 is the finite element calculation result.

图 10 ABH 结构宽度(l_3)对第一完全带隙的影响Fig. 10 Influence of ABH structure width (l_3) on first complete band gap图 11 ABH 结构短边高度(h_4)对第一完全带隙的影响Fig. 11 Influence of ABH structure short side height (h_4) on first complete band gap图 12 包裹层开口角度(θ)对第一完全带隙的影响Fig. 12 Influence of notch angle (θ) of cladding layer on first complete band gap

3.4 短板宽度

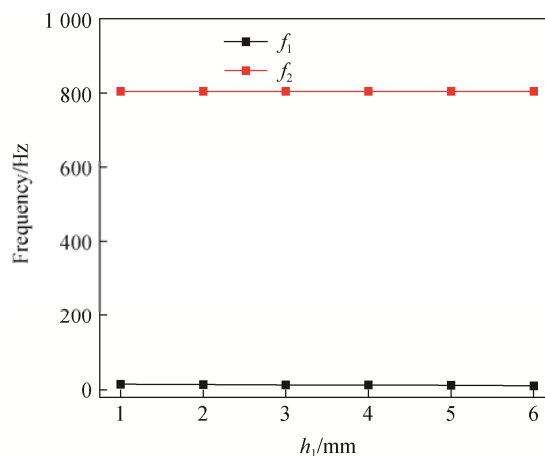
图 13 为短板宽度 l_2 对第一完全带隙的影响规律。从图 13 可见，当 l_2 从 0.1 mm 增大至 0.6 mm，

第一完全带隙的起始频率始终为 12 Hz，截止频率从 1 021 Hz 降低至 754 Hz，降低了 26.2%，使得带隙宽度降低了 333 Hz，这主要是由于增大短板宽度，使得参振质量 m 增大，从而导致第一完全带隙截止频率的降低。

图 13 短板宽度(l_2)对第一完全带隙的影响Fig. 13 Influence of short board width (l_2) on first complete band gap

3.5 圆柱体高度

图 14 为圆柱体高度 h_1 对第一完全带隙的影响规律。从图 14 可见，随着圆柱体高度从 1 mm 增大至 6 mm，带隙起始频率从 15 Hz 降低至 11 Hz，这主要是由于参振质量 m 的增大导致起始频率降低。截止频率主要与 ABH 结构的振动部分有关，因此截止频率始终保持 805 Hz 不变。

图 14 圆柱体高度(h_1)对第一完全带隙的影响Fig. 14 Influence of cylinder height (h_1) on first complete band gap

3.6 圆锥台高度

图 15 为圆锥台高度 h_2 对第一完全带隙的影响

规律。从图 15 可见, 当圆锥台高度从 1 mm 增大至 6 mm 时, 第一完全带隙的起始频率从 16 Hz 降低至 11 Hz, 而截止频率保持 805 Hz 不变, 这也是由于起始频率对应的参振质量 m 的增大, 而截止频率对应的参振质量 m 保持不变。

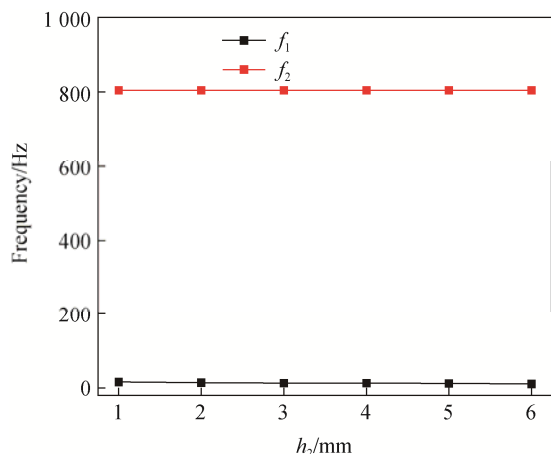


图 15 圆锥台高度(h_2)对第一完全带隙的影响

Fig. 15 Influence of frustum height width (h_2) on first complete band gap

4 结论

1) 新型声子晶体在 1 600 Hz 频段内具有多个带隙, 其中第一完全带隙范围为 12~805 Hz, 40 Hz 以下的带隙覆盖率为 70%, 1 600 Hz 内的带隙覆盖率达到 97.3%。与参考模型 I 和参考模型 II 相比, 新型声子晶体的第一完全带隙起始频率降低了 85.4%和 66.6%, 1 600 Hz 内的带隙覆盖率也更高。可以通过阵列形式制成吸声板, 为汽车、轨道列车、船舶以及航空航天等领域提供新的低频振动和噪声解决方案。

2) 新型声子晶体第一完全带隙起始频率主要与钨散射体的平移振动有关, 截止频率主要与 ABH 结构的平移振动有关。新型声子晶体第一完全带隙起始频率和截止频率均小于参考模型 I 的原因主要是 2 种振动模态下, ABH 结构的加入使得声子晶体包裹层的变形减小, 降低了等效弹簧刚度 k 。

3) 声学黑洞结构宽度、短边高度以及短板高度对第一完全带隙的截止频率和带隙宽度有显著影响, 而包裹层开口角度、空心钨圆柱体高度和圆锥台高度对第一完全带隙的影响不大。

参考文献:

[1] 周曦亚, 凡波. 吸声材料研究的进展[J]. 中国陶瓷, 2022, 25(2):

26–29.

ZHOU Xiya, FAN Bo. Chin Ceram (in Chinese), 2022, 25(2): 26–29.

[2] 孙晓静. 地铁列车振动对环境影响的预测研究及减振措施分析[D]. 北京: 北京交通大学, 2008.

SUN Xiaojing. Prediction of environment vibrations induced by metro trains and mitigation measures analysis (in Chinese, dissertation). Beijing: Beijing Jiaotong University, 2008.

[3] 吴九汇, 马富银, 张思文, 等. 声学超材料在低频减振降噪中的应用评述[J]. 机械工程学报, 2016, 52(13): 68–78.

WU Jiuhui, MA Fuyin, ZHANG Siwen, et al. J Mech Eng (in Chinese), 2016, 52(13): 68–78.

[4] 祁鹏山, 杜军, 姜久龙, 等. 新型局域共振声子晶体结构的低频带隙特性研究[J]. 人工晶体学报, 2016, 45(4): 1094–1099.

QI Pengshan, DU Jun, JIANG Jiulong, et al. J Synth Cryst (in Chinese), 2016, 45(4): 1094–1099.

[5] 汤璐嘉, 吕延军, 刘成, 等. 局域共振型声子晶体梁的动态模型和带隙[J]. 振动测试与诊断, 2021, 41(6): 1132–1137.

TANG Lujia, LV Yanjun, LIU Cheng, et al. J Vib Meas Diag (in Chinese), 2021, 41(6): 1132–1137.

[6] LIU Z, ZHANG X, MAO Y, et al. Locally resonant sonic materials[J]. Science, 2000, 289(5485): 1734–1736.

[7] 张思文, 吴九汇. 局域共振复合单元声子晶体结构的低频带隙特性研究[J]. 物理学报, 2016(13): 134302.

ZHANG Siwen, WU Jiuhui. Acta Phys Sin (in Chinese), 2016(13): 134302.

[8] LI S, DOU Y, XU J, et al. Designing a broad locally-resonant bandgap in a phononic crystals[J]. Phys Lett A, 2019, 383: 1371–1377.

[9] 何宇漾. 声子晶体结构板件在车内噪声控制中的应用研究[J]. 噪声与振动控制, 2020, 40(6): 193–197.

HE Yuyang. Noise Vib Control (in Chinese), 2020, 40(6): 193–197.

[10] QI Y, SONG T, WEN X D, et al. Simulations on the wide bandgap characteristics of a two-dimensional tapered scatterer phononic crystal slab at low frequency[J]. Phys Lett A, 2020, 384(35): 126885.

[11] 康太凤, 孙小伟, 宋婷, 等. 二维空心散射体声子晶体板的低频带隙特性及其形成机理[J]. 声学学报, 2020, 45(4): 601–608.

KANG Taifeng, SUN Xiaowei, SONG Ting, et al. Acta Acust (in Chinese), 2020, 45(4): 601–608.

[12] 刘威, 何泽银, 范爱军, 等. 双侧空心不对称散射体声子晶体带隙机理[J]. 硅酸盐学报, 2022, 50(3): 775–781.

LIU Wei, HE Zeyin, FAN Aijun, et al. J Chin Ceram Soc, 2022, 50(3): 775–781.

[13] 付吉云. 基于声固耦合模型的轻型客车车内低频噪声分析与控制[D]. 吉林: 吉林大学, 2016.

FU Jiyun. Analysis and control of light bus interior low frequency noise based on structural-acoustic coupling model (in Chinese, dissertation). Jilin: Jilin University, 2016.

[14] KRYLOV V V, TILMAN F. Acoustic 'black holes' for flexural waves as effective vibration dampers[J]. J Sound Vib, 2004, 274(3–5): 605–619.

[15] FARHAT M, ENOCH S, GUENNEAU S, et al. Broadband cylindrical

- acoustic cloak for linear surface waves in a fluid[J]. *Phys Rev Lett*, 2008, 101(13): 134501.
- [16] JI H, LIANG Y, QIU J, et al. Enhancement of vibration based energy harvesting using compound acoustic black holes[J]. *Mech Syst Sign Process*, 2019, 132: 441–456.
- [17] ZHAO C, ZHENG J, SANG T, et al. Computational analysis of phononic crystal vibration isolators via FEM coupled with the acoustic black hole effect to attenuate railway-induced vibration[J]. *Constr Build Mater*, 2021, 283(4): 122802.
- [18] 何璞, 王小东, 季宏丽, 等. 基于声学黑洞的盒式结构全频带振动控制[J]. *航空学报*, 2020, 4(4): 129–138.
- HE Pu, WANG Xiaodong, JI Hongli, et al. *Acta Aeronautica ET Astronaut Sin* (in Chinese), 2020, 4(4): 129–138.
- [19] XU Y L, TIAN X G, CHEN C Q. Band structures of two dimensional solid/air hierarchical phononic crystals[J]. *Phys B*, 2012, 407(12): 1995–2001.
- [20] 王刚. 声子晶体局域共振带隙机理及减振特性研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2005.
- WANG Gang. Research on the mechanism and the vibration attenuation characteristic of locally resonant band gap in phononic crystals (in Chinese, dissertation). Changsha: National University of Defense Technology, 2005.
- [21] 鲍岳, 刘献栋, 梁浩鸣, 等. 声学黑洞能量汇聚效应及阻尼耗能机理研究[J]. *汽车技术*, 2020(5): 1–10.
- BAO Yue, LIU Xiandong, LIANG Haoming, et al. *Automob Technol* (in Chinese), 2020(5): 1–10.
- [22] 朱龙翔, 王悦民, 宗侣, 等. 基于模态分析方法的管道导波频散曲线计算[J]. *海军工程大学学报*, 2014, 26(6): 64–68.
- ZHU Longxiang, WANG Yüemin, ZONG Lv, et al. *J Nav Univ Eng* (in Chinese), 2014, 26(6): 64–68.