

双侧空心不对称散射体声子晶体带隙机理

刘 威¹, 何泽银^{1,2}, 范爱军², 陶平安², 刘红梅², 孙世政¹

(1. 重庆交通大学机电与车辆工程学院, 重庆 400074; 2. 重庆建设汽车系统股份有限公司, 重庆 400052)

摘 要: 基于局域共振机理提出 1 种双侧空心不对称散射体声子晶体结构, 借助有限元法, 计算了双侧空心不对称散射体声子晶体能带结构、传输损失谱及本征位移场, 得到了起始频率为 79.4 Hz、带宽为 1 065.2 Hz 的超宽第 1 完全带隙。结合等效弹簧质量系统, 分析标记点的本征位移场振动模式, 揭示出新型双侧空心不对称散射体声子晶体带隙形成机理。分析了包裹层缺口角度、连接短板宽度、空心圆柱散射体高度等几何参数对第 1 完全带隙的影响规律, 并改变声子晶体几何参数实现对带隙频率的调控。结果表明: 双侧不对称二维空心散射体声子晶体第 1 完全带隙的起始频率有效降低至 80 Hz 以下, 带宽超过 1 000 Hz; 改变声子晶体结构参数可实现局域共振与 Bragg 散射带隙同时存在于一种声子晶体中, 为单一声子晶体同时调控低频、高频带隙提供了可能。

关键词: 双侧空心不对称; 声子晶体; 局域共振; 完全带隙; 低频振动控制

中图分类号: O735; TB535 文献标志码: A 文章编号: 0454-5648(2022)03-0775-07

网络出版时间: 2022-01-24



Band Gap Characteristics of Phononic Crystals with Bilateral Asymmetric Two-dimensional Hollow Scatterers

LIU Wei¹, HE Zeyin^{1,2}, FAN Aijun², TAO Ping'an², LIU Hongmei², SUN Shizheng¹

(1. School of Mechatronics and Vehicle Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China;

2. Chongqing Construction Automotive Systems Co., Ltd., Chongqing 400052, China)

Abstract: In order to solve the problem for high initial frequency of unilateral lightweight phononic crystals, a phononic crystal structure of bilateral hollow asymmetric scatterers was proposed based on the local resonance mechanism. The energy band structure, transmission loss spectrum and intrinsic displacement field of phononic crystals with bilateral hollow asymmetric scatterers were calculated by the finite element method. The ultra-wide first complete band gap with an initial frequency of 79.4 Hz and a bandwidth of 1 065.2 Hz was obtained. Combined with an equivalent spring mass system, the vibration modes of the intrinsic displacement field of the marked points were analyzed, and the mechanism of band gap formation in phononic crystals of bilateral hollow asymmetric scatterers was revealed. Furthermore, effects of the geometric parameters such as notch angle of cladding, width of connecting short plate and height of hollow cylindrical scatterer on the first complete band gap were analyzed, and the geometric parameters of the phononic crystal were adjusted to control the band gap frequency. The results show that the initial frequency of the first complete band gap of the proposed bilateral asymmetric two-dimensional hollow scatterer phononic crystal effectively reduces to less than 80 Hz, and the bandwidth exceeds 1 000 Hz. Adjusting the structural parameters of phononic crystals can realize the coexistence of local resonance and the Bragg scattering band gap in a phononic crystal, which makes it possible for a single phononic crystal to regulate the low-frequency and high-frequency band gaps simultaneously.

Keywords: bilateral hollow asymmetry; phononic crystal; locally resonance; complete band gap; low frequency vibration control

声子晶体是由 2 种或 2 种以上材料组成的人工复合周期性结构, 按维度可分为一维、二维和三维

声子晶体, 按绝对带隙类型可分为 Bragg 散射^[1]与局域共振型^[2]。Bragg 散射带隙通常存在于高频范

收稿日期: 2021-07-22。 修订日期: 2021-11-04。

基金项目: 国家自然科学基金项目(52005066); 重庆市自然科学基金(cstc2019jcyj-msxmX0799); 重庆市九龙坡科技计划项目(2020-02-001-Z)资助。

第一作者: 刘 威(1997—), 男, 硕士研究生。

通信作者: 何泽银(1985—), 男, 教授。

Received date: 2021-07-22. Revised date: 2021-11-04.

First author: LIU Wei (1997—), male, Master candidate.

E-mail: 2394409652@qq.com

Correspondent author: HE Zeyin(1985—), male, Ph.D. Professor.

E-mail: zeyin_he@126.com

围, 难以在低频范围获得。局域共振声子晶体的概念最初由刘正猷等^[2]于 2000 年提出, 揭示了声子晶体弹性波带隙的局域共振机理, 有效地将布拉格散射带隙降低了 2 个数量级。

近年来, 国内外学者对基于局域共振机理的声子晶体开展了大量研究。各类一维、二维、三维声子晶体结构被相继提出^[3–6], 也有部分学者开始将基于局域共振机理的声子晶体应用到在盘类结构、汽车板件结构、机舱等实际工程领域中^[7–12]; Wu 等^[13]提出了二维单侧实心散射体声子晶体, 并证明了可通过调节散射体高度来调控所得带隙的范围; 何宇漾等^[14]提出了一种二维单侧实心圆柱散射体声子晶体, 并得到了范围为 240 Hz~560 Hz 的第 1 完全带隙; Assouar 等^[15]提出了基于双侧的二维实心散射体声子晶体, 通过理论分析, 发现其带宽为同尺寸下单侧声子晶体的 2 倍; Song^[16]设计了一种二维双侧实心不对称声子晶体结构, 通过能带计算发现其在低频范围存在 2 个完全带隙, 形成了起始频率为 230 Hz、带宽为 270 Hz 的第 1 完全带隙; Li^[17]设计了 1 种二维双侧实心圆柱散射体声子晶体, 第 1 完全带隙的起始频率为 256 Hz, 带宽为 599 Hz; Yang 等^[18]提出了 1 种二维双侧实心锥形散射体声子晶体, 使第 1 完全带隙的起始频率降低到 44 Hz, 带宽扩大至 663 Hz; 康太凤^[19]设计了 1 种单侧空心圆柱声子晶体, 得到了起始频率为 160 Hz、带宽为 420 Hz 的第 1 完全带隙。

同尺寸规模下实心散射体声子晶体的起始频率较空心低, 但质量更大; 单侧散射体声子晶体相比于双侧质量更轻, 但所得带隙起始频率与带宽相比后者效果欠佳。现有文献对双侧空心不对称二维散

射体声子晶体还鲜有报道, 且对有缺口的包裹层声子晶体也缺少研究。

本工作提出将空心钨圆柱体与空心钨圆锥台体分别垂直嵌入含 4 个均匀缺口的硅橡胶包裹层的内部, 与 4 个均匀的环氧树脂连接短板组成一种新型的双侧空心不对称散射体声子晶体, 基于有限元法分析其能带结构、传输损失谱与本征模态, 讨论包裹层缺口角度、连接短板宽度、空心圆柱散射体高度等声子晶体结构参数对带隙的影响规律。

1 新型声子晶体结构与建模

为得到较低的起始频率、更宽带宽的新型声子晶体, 基于局域共振机理设计了 1 种将空心钨圆柱体与空心钨圆锥台体散射体分别垂直嵌入含 4 个沿圆周均匀分布的硅橡胶包裹层内部, 并与 4 个均匀的环氧树脂连接短板组成的新型二维双侧不对称空心散射体声子晶体单胞结构, 如图 1 所示, 其中, 图 1a 为单胞立体结构图, 图 1b~图 1c 为单胞平面结构图和剖面图, 图 1d 为第一 Brillouin 区(阴影部分为不可约 Brillouin 区)。

该声子晶体晶格常数为 a 、高度为 h_1 、空心钨圆锥台散射体高度为 h_2 、硅橡胶包裹层厚度与环氧树脂连接短板高度相等为 h_3 、连接短板宽为 l 、空心圆锥台散射体顶部内半径为 r_1 、外半径为 r_2 , 且 r_1, r_2 同为空心钨圆柱散射体的内外半径、空心圆锥台散射体的底部内半径为 r_4 、外半径为 r_3 。该声子晶体空心圆锥台散射体顶部内外半径值之差 $r_2 - r_1$ 与底部内外半径之差 $r_3 - r_4$ 相等, 即圆柱与圆锥台壁厚一致, $r_2 - r_1 = r_3 - r_4$; 包裹层缺口角度为 θ 。表 1 为新型声子晶体结构各部分的材料参数。

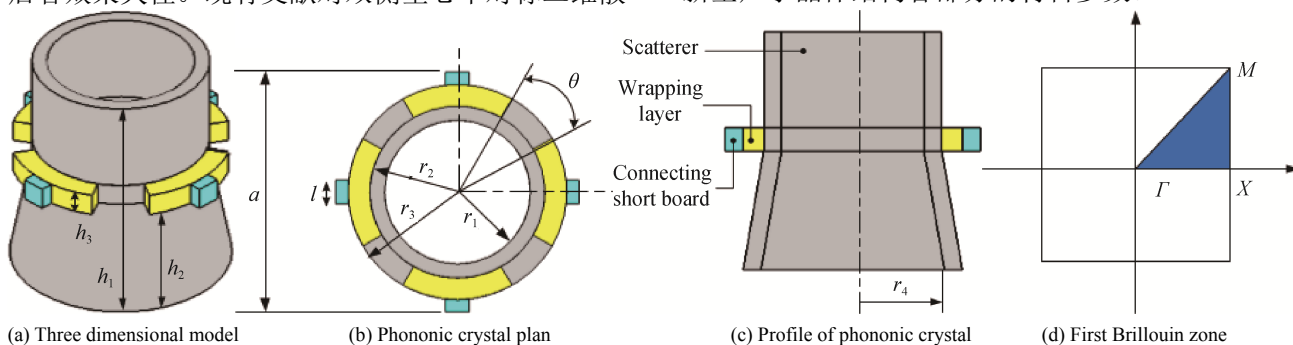


图 1 双侧不对称二维空心散射体声子晶体单胞结构及第 1 Brillouin 区

Fig. 1 Single cell structure of two-dimensional asymmetric hollow scatterer phononic crystals and the first Brillouin zone

表 1 新型声子晶体结构各组分材料参数

Table 1 Material parameters of new phononic crystal structural components

Material	Density/(kg·m ⁻³)	Elastic modulus/GPa	Poisson ratio
Tungsten	19 100	354.10	0.350
Silicon rubber	1 300	1.175×10^{-4}	0.469
Epoxy	1 180	4.35	0.370

提出的新型声子晶体在 x 和 y 方向上是无限周期结构, 根据 Bloch 定理, 只需研究单个周期的晶胞性质^[20]。故周期结构本征波场量 $u(\mathbf{r}, t)$ 可表示为

$$u(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})e^{i\omega t} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{r}$ 为 (x, y, z) 为空间位置矢量; t 为时间; i 为虚数单位; ω 为波动角频率。

本征波场量中与空间位置 $\mathbf{r}$ 相关的部分 $u(\mathbf{r})$ 又可进一步表述为空间平面波形式:

$$u(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})e^{-ik \cdot \mathbf{r}} \quad (2)$$

式中: $U(\mathbf{r})$ 为本征波波幅; $\mathbf{k}$ 为波矢。沿着不可约 Brillouin 区 ($M \rightarrow \Gamma \rightarrow X \rightarrow M$) 扫描波矢 $\mathbf{k}$, 以求解方程的本征值与固有频率。

借助有限元法(FEM)计算该新型声子晶体的能带结构与传输损失谱。采用有限元软件 COMSOL Multiphysics 特征频率求解器模块, 沿波矢 $\mathbf{k}=0$ 到 $\mathbf{k}=\pi$ 方向扫描, 求解得到该声子晶体单胞结构的固有频率, 进而得到该声子晶体单胞结构的能带结构。

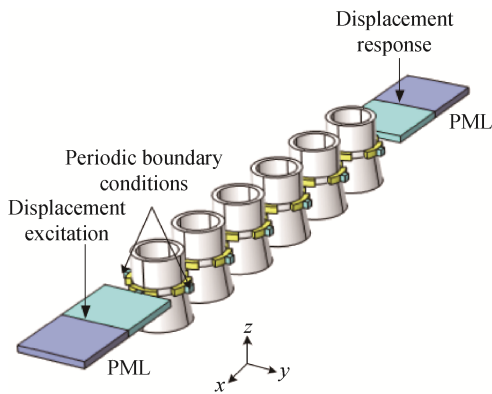


图 2 传输损失谱计算模型

Fig. 2 Calculation model of transmission loss spectrum

为验证声子晶体单胞结构能带计算结果, 借助 COMSOL, 基于有限元法计算声子晶体传输损失谱, 如图 2 所示传输损失谱计算模型。沿 x 方向阵列 6 个声子晶体单胞结构, 在 y 方向上施加 Bloch 周期性边界条件; 在 6 个声子晶体单胞结构两端建立 PML 完美匹配层, 防止能量反射对传输损失计算结果的影响; 在结构一端施加 z 方向的正弦位移激励信号, 另一端拾取响应信号, 结构传输损失 TL 定义为

$$TL = 20 \lg(P_{in} / P_{out}) \quad (3)$$

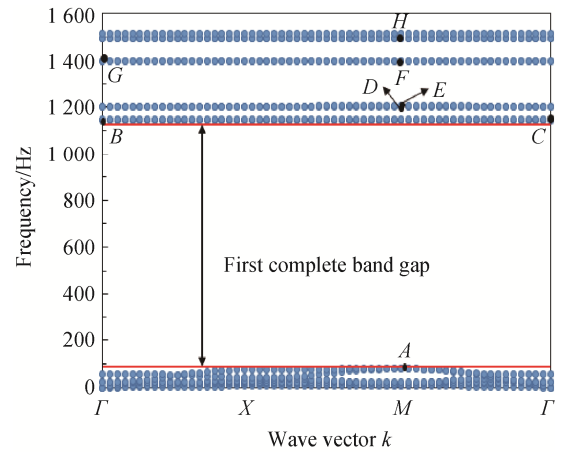
式中: P_{in} 为输入端的位移激励; P_{out} 为拾取端的位移响应, 通过改变输入端位移信号的频率即可得到该新型声子晶体的传输损失谱。

2 新型声子晶体带隙机理与分析

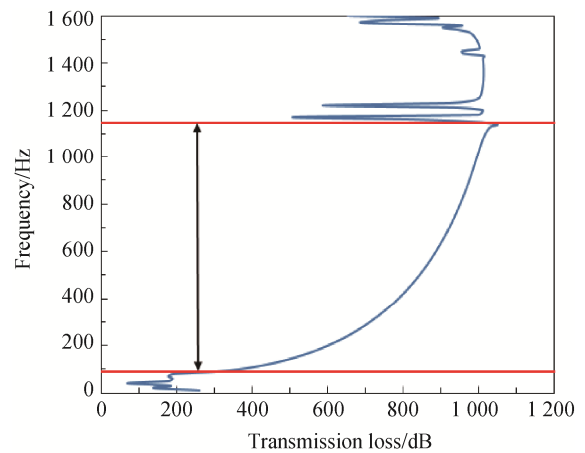
2.1 带隙计算

声子晶体参数取值如下: $a=10$ mm, $h_1=10$ mm, $h_2=5$ mm, $h_3=1$ mm, $l=1$ mm, $r_1=2.8$ mm, $r_2=3.6$ mm, $r_3=4.3$ mm, $r_4=3.5$ mm, $\theta=30^\circ$ 。

图 3 为新型声子晶体能带结构图与传输损失谱。由图 3a 分析可知, 声子晶体在 1 600 Hz 内出现多个带隙; 第 1 完全带隙出现在 79.4 Hz~1 144.6 Hz 之间, 即第 6 与第 7 能带之间, 带宽为 1 065.2 Hz; 提出的双侧不对称二维空心散射体声子晶体第 1 完全带隙的起始频率有效降低至 80 Hz 以下, 带宽超过 1 000 Hz, 经过计算其在 1 500 Hz 内的带隙覆盖率达到 94.3%; 图 3b 传输损失谱图中, 能量衰减频率区间与能带结构中各带隙范围



(a) Band structure diagram



(b) Transmission loss spectrum

图 3 双侧不对称二维空心散射体声子晶体能带结构图与传输损失谱

Fig. 3 Band structure and transmission loss spectrum of two-dimensional asymmetric hollow scatterer phononic crystals

保持一致,且在部分频率周围有超过 1 000 dB 的衰减,验证了该新型声子晶体能带结构计算的准确性。

2.2 带隙形成机理

为阐明双侧不对称二维空心散射体声子晶体多带隙的形成机理,分析了如图 4 所示能带结构中各带隙上下边界的振动模式。由图 4a~图 4h 可见,点 A 对应第 1 完全带隙的下边界,钨散射体处于扭转

模式,环氧树脂连接短板保持静止,证实了第 1 完全带隙是由于钨散射体的局域共振而形成;点 B 对应的振动模式为 4 个连接短板沿 z 向平动,散射体保持静止;点 A 和点 B 的振动模式均不会在 x 与 y 方向产生,且第 1 完全带隙上下截止频率由散射体扭转与连接短板平动 2 种相互独立的振动模式决定;点 C~点 E 的振动模式与点 B 类似,均为连接短板的振动,与散射体无关;点 F~点 H 的振动模式

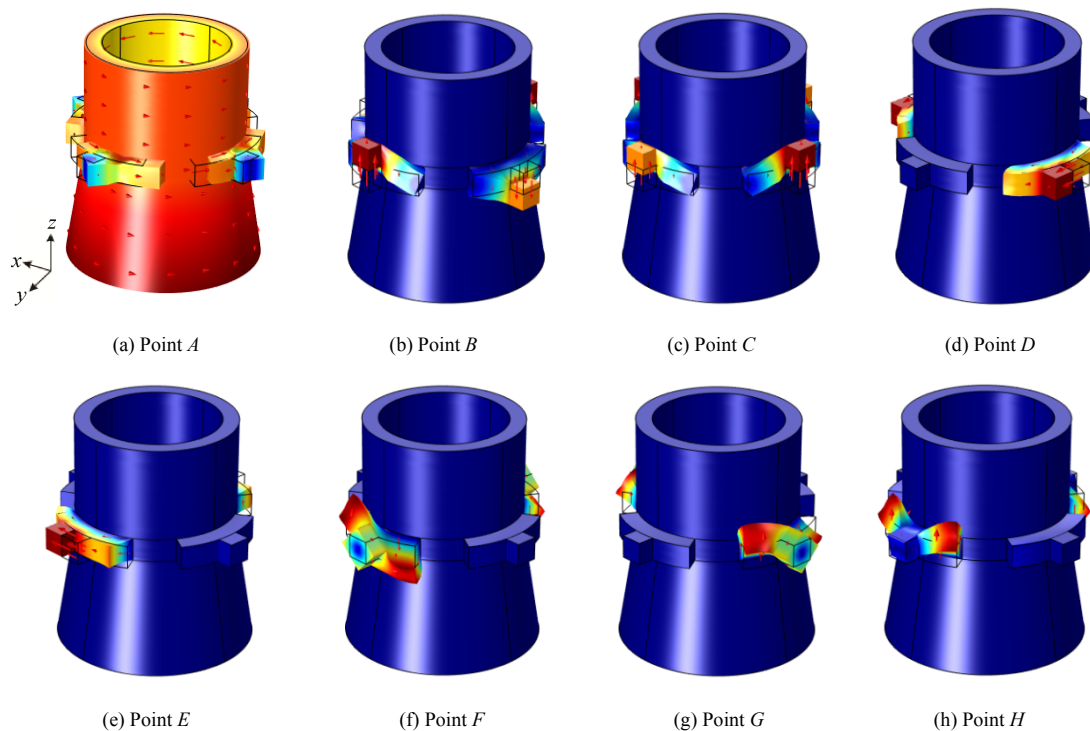


图 4 各带隙边缘标记点的本征模式

Fig. 4 Eigenmodes of the marked points at the edge of each band gap

以包裹层的振动为主,散射体振动为零,此时弹性波受刚性边界限制而发生多重弹性散射,形成一带宽为 95.9 Hz 的带隙,为 Bragg 带隙,表明提出的新型双侧不对称二维空心散射体声子晶体可在低频与高频段同时形成局域共振与 Bragg 2 种不同类型带隙的能力。

为进一步研究双侧散射体声子晶体相比单侧散射体对带隙的变化影响,将下端圆锥台散射体去掉,仅保留单侧圆柱散射体。包裹层与连接板尺寸参数、布置均与原声子晶体完全一致,图 5 为单侧散射体声子晶体能带结构图。由图 5 可见,双侧空心散射体声子晶体的第 1 完全带隙起始频率较单侧空心散射体声子晶体急剧下降,由 141.6 Hz 降低至 79.4 Hz,降低了 43.9%,截止频率保持不变,主要由于将双侧散射体变为单侧后,散射体变轻引起第 1 完全带

隙起始频率升高,截止频率仅与连接短板的振动部分有关,故截止频率不变。

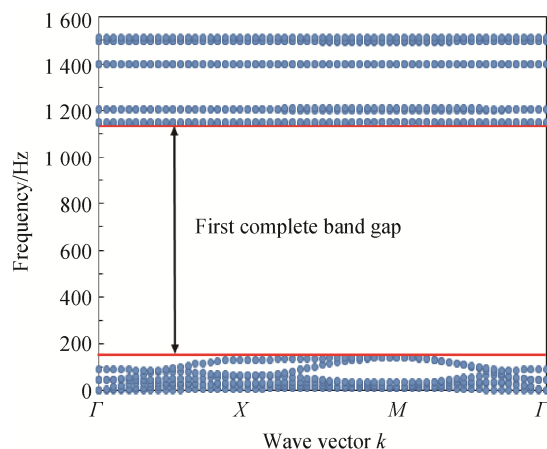


图 5 单侧散射体声子晶体能带结构

Fig. 5 Band structure of phononic crystals with unilateral scatterers

3 基于等效弹簧质量模型的声子晶体能带计算

图 6 为二维声子晶体等效弹簧质量系统模型。将包裹层视为散射体与连接短板间的弹簧单元, 忽略其质量, 故等效弹簧质量系统的带隙频率计算公式为,

$$f = (\sqrt{K/M}) / 2\pi \quad (4)$$

式中: K 为等效弹簧刚度; M 为散射体或连接短板振动部分决定的有效质量, $M = \delta M_i$; M_i 为散射体或连接短板质量; δ 为质量系数。



图 6 等效弹簧质量系统模型

Fig. 6 Equivalent spring mass system model

弹性波在声子晶体中的传播相当于应变能 W 传递, 并使声子晶体结构发生振动变形, 声子晶体各部分间存在弹性耦合, 使整个声子晶体结构产生势能 U 。当振动位移达到最大时, 应变能将完全转化为势能 U , 即 $U=W$, 可表示为,

$$U = \frac{1}{2} K x_{\max}^2 \quad (5)$$

式中: $x_{\max}$ 为振动位移最大值。

应变能 W 与最大振动位移 $x_{\max}$ 可通过有限元法计算, 由式(4)~式(5)可得到等效刚度 K 与等效频率 f_1 。

以图 3 标记点 A、点 D 为例, 结合上式(4)~式(5)计算了点 A、点 D 对应的第 6 和第 9 能带频率 f_1 , 与有限元法计算得出的能带频率 f_2 进行对比, 如表 2 所示。

表 2 能带频率计算结果对比

Band	$K/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	$M \times 10^{-6}/\text{kg}$	f_1/Hz	f_2/Hz	Error/%
6 th	231.4	1 120	72.4	79.4	8.8
9 th	147.2	2.64	1 189.0	1 199.4	0.9

2 种方法得出的计算结果较为吻合, 误差的产生主要源于有限元计算精度与 δ 选取等。

4 新型声子晶体结构参数对带隙的影响

新型声子晶体产生的第 1 完全带隙为局域共振带隙, 下边界主要由散射体的扭转振动形成, 上边界由 4 个连接短板 z 向振动引起。为进一步揭示双侧不对称二维空心散射体声子晶体能带结构特

征, 研究了包裹层缺口角度、连接短板宽度、空心圆柱散射体高度等声子晶体结构参数对带隙的影响规律。

4.1 包裹层缺口角度

图 7 为包裹层缺口角度对第 1 完全带隙的影响规律。由图 7 见, 当 θ 从 0° (即包裹层完整无缺口) 逐渐增大至 50° , 带隙起始频率保持在 78 Hz 左右, 截止频率由 1 151.6 Hz 小幅下降至 1 114.6 Hz, 降低了 3.2%, 主要由于作为等效弹簧的硅橡胶包裹层缺口增大导致包裹层等效刚度 K 下降, 而散射体与连接短板的质量保持不变。

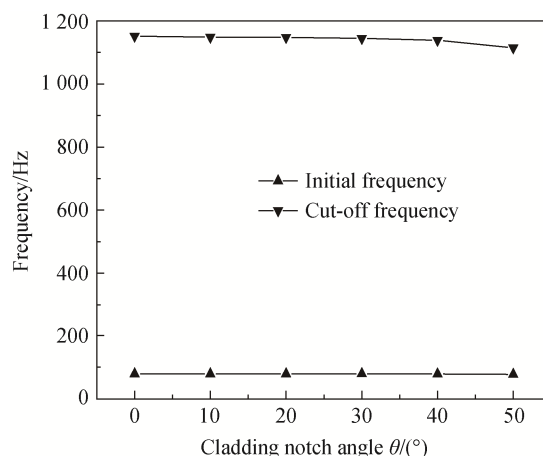


图 7 包裹层缺口角度对第 1 完全带隙的影响

Fig. 7 Influence of notch angle of cladding layer on first complete band gap

具有包裹层缺口的声子晶体在一定程度上降低了包裹层质量且节约了包裹层材料, 第 1 完全带隙起始频率与截止频率也仅小幅变化, 但研究发现包裹层缺口角度可有效调控 Bragg 带隙。以标记点 G 与点 H 对应能带为例, 图 8 为包裹层缺口角度对 Bragg 带隙宽度的影响规律。由图 8 可见, 当 θ 从 0° (即包裹层完整无缺口) 逐渐增大至 50° , Bragg 带隙宽度由 42.2 Hz 增大至 218.1 Hz, Bragg 带隙宽度提高了 4.17 倍, 主要是由于随着包裹层缺口增大弹性波在声子晶体各部分间的多重弹性散射效应增强, 且散射体振动趋于 0, 等效为刚性边界, 致使 Bragg 带隙逐渐增大。

调控声子晶体结构参数可有效解决一种声子晶体只存在局域共振型带隙形成机理的限制, 实现局域共振型与 Bragg 散射带隙同时存在的可能, 为单一声子晶体同时调控低频、高频带隙提供可能。

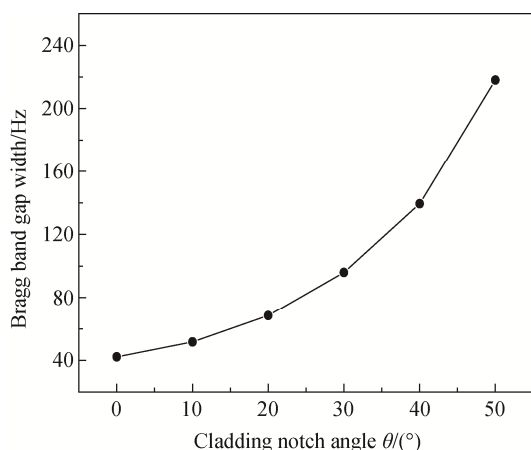


图8 包裹层缺口角度对 Bragg 带隙的影响

Fig. 8 Influence of notch angle of cladding layer on Bragg band gap

4.2 连接短板宽度

由于连接短板的高度与宽度对第 1 完全带隙的起始与截止频率影响结果相似, 仅选取连接短板宽度 l 作为对象研究其对第 1 完全带隙的影响。取 l 为 0.5 mm~3.0 mm, 以 0.5 mm 为间隔。

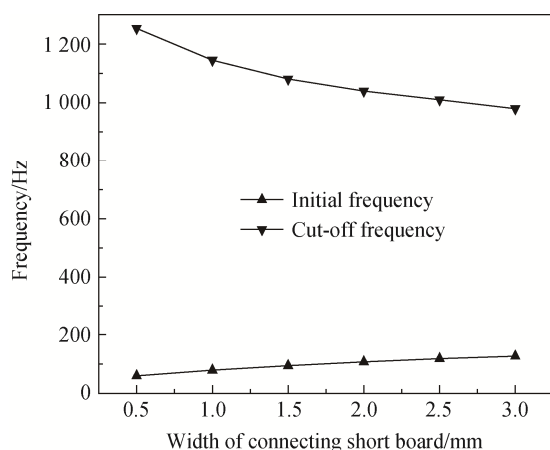


图9 连接短板宽度对第 1 完全带隙的影响

Fig. 9 Influence of the width of the short connecting plate on first complete band gap

图 9 为连接短板宽度对第 1 完全带隙的影响。由图 9 可见, 当 l 由 0.5 mm 增大到 3.0 mm 时, 第 1 完全带隙起始频率逐渐上升, 由 60.0 Hz 升至 127.0 Hz, 增大了 1.1 倍, 截止频率则逐渐降低由 1 253.3 Hz 下降至 979.5 Hz, 降低了 21.8%, 导致带隙宽度逐渐变窄, 主要由于连接短板宽度增加使振子质量 M 增加, 从而增大了对包裹层的压力致使等效刚度 K 增大, 导致第 1 完全带隙起始频率的增加与截止频率的降低。

4.3 圆柱散射体高度

由于圆锥散射体高度与圆柱散射体高度对第 1

完全带隙的起始与截止频率影响结果相似, 因此仅选取圆柱散射体高度作为对象研究其对第 1 完全带隙的影响。如图 10 所示, 取圆柱散射体高度为 1 mm~7 mm, 间隔 1 mm, 研究圆柱散射体高度对第 1 完全带隙的影响。

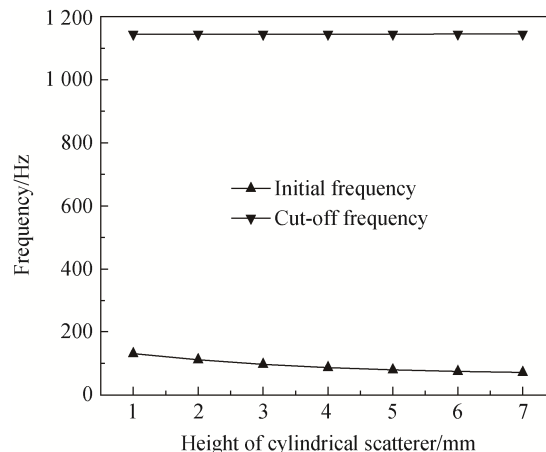


图10 圆柱散射体高度对第 1 完全带隙的影响

Fig. 10 Influence of cylindrical scatterer height on first complete band gap

随着散射体高度增加, 第 1 完全带隙起始频率由 130.2 Hz 逐渐降低至 71.4 Hz, 降低了 45.2%。由于散射体质量增加使 M 增大导致其起始频率降低, 而截止频率仅与连接短板的振动部分有关, 因此截止频率几乎保持不变。

5 结论

1) 新型双侧不对称空心散射体声子晶体在 1 600 Hz 以内存在多条带隙, 第 1 完全带隙出现在 79.4~1 144.6 Hz 之间, 即第 6 与第 7 能带之间, 带宽为 1 065.2 Hz; 提出的双侧不对称二维空心散射体声子晶体第 1 完全带隙的起始频率有效降低至 80 Hz 以下, 带宽超过 1 000 Hz, 在 1 500 Hz 内的带隙覆盖率达到 94.3%。相比现有声子晶体, 其带宽宽度与中低频带隙覆盖率均具有较大幅度提升。

2) 提出的双侧空心散射体声子晶体的第 1 完全带隙起始频率较单侧空心散射体声子晶体急剧下降, 由 141.6 Hz 降低至 79.4 Hz, 降低了 43.9%, 截止频率保持不变, 主要由于将双侧散射体变为单侧后, 散射体变轻引起第 1 完全带隙起始频率升高, 截止频率仅与连接短板的振动部分有关, 故截止频率不变。

3) 调控声子晶体连接短板宽度、空心圆柱散射体高度等参数可有效改变低频局域共振带隙带宽宽度, 调控声子晶体包裹层缺口角度, 在局域共振带

隙仅小幅变化的前提下可有效改变高频布拉格带隙带宽宽度,并在一定程度上降低了包裹层质量且节约了包裹层材料;改变声子晶体参数可实现同时调控单一声子晶体中局域共振型与 Bragg 散射型带隙的可能。

双侧不对称空心散射体声子晶体通过阵列形式制作成声子晶体板,并可附着在齿轮箱、变速箱、汽车面板等振动与噪声被控对象表面,其优越的振动与声衰减性能将为轨道列车、海洋船舶、航空航天等领域提供新的振动与噪声控制方案,但如何在复杂表面与极端工况下布置与应用该新型声子晶体还有待后续研究。

参考文献:

- [1] KUSHWAHA M S, HALEVI P, MARTINEZ G, et al. Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites[J]. *Phys Rev B, Condensed Matter*, 1994, 49(4): 2313–2322.
- [2] LIU Z, ZHANG X, MAO Y, et al. Locally resonant sonic materials[J]. *Science*, 2000, 289(5485): 1734–1736.
- [3] ZHANG H, LIU B, ZHANG X, et al. Zone folding induced tunable topological interface states in one-dimensional phononic crystal plates[J]. *Phys Lett A*, 2019, 383(23): 2797–2801.
- [4] CHEN L, GUO Y, YI H. Optimization study of bandgaps properties for two-dimensional chiral phononic crystals base on lightweight design[J]. *Phys Lett A*, 2021, 388: 127054.
- [5] 贺子厚, 赵静波, 姚宏, 等. 蜂窝状声子晶体带隙特性及隔振性能[J]. *硅酸盐学报*, 2019, 47(7): 983–989.
HE Zihou, ZHAO Jingbo, YAO Hong, et al. *J Chin Ceram Soc*, 2019, 47(7): 983–989.
- [6] 江卫锋, 殷鸣, 向召伟, 等. 三维金刚石晶格声子晶体超宽频带隙特性研究[J]. *振动与冲击*, 2018, 37(13): 190–194, 209.
JIANG Weifeng, YIN Ming, XIANG Zhaowei, et al. *J Vib Shock(in Chinese)*, 2018, 37(13): 190–194, 209.
- [7] 张佳龙, 姚宏, 杜军, 等. 基于局域共振型声子晶体在机舱内低频隔声特性[J]. *硅酸盐学报*, 2016, 44(10): 1440–1445.
ZHANG Jialong, YAO Hong, DU Jun, et al. *J Chin Ceram Soc*, 2016, 44(10): 1440–1445.
- [8] LI L, GANG X, SUN Z, et al. Design of phononic crystals plate and application in vehicle sound insulation[J]. *Adv Eng Softw*, 2018, 125: 19–26.
- [9] 吕锐翔, 李丽霞, 杨继博. 单边周期环形谐振径向声子晶体结构[J]. *振动与冲击*, 2021, 40(1): 68–72.
LV Ruixiang, LI Lixia, YANG Jibo. *J Vib Shock(in Chinese)*, 2021, 40(0): 68–72.
- [10] 麻乘榕, 邵晨, 万庆冕, 等. 用于汽车低频振动控制的局域共振声子晶体[J]. *应用声学*, 2018, 37(1): 152–158.
MA Chengrong, SHAO Chen, WAN Qingmian, et al. *Appl Acoust(in Chinese)*, 2018, 37(1): 152–158.
- [11] 张博强, 吴心平, 陈慧勇, 等. 局域共振型声子晶体在轮边驱动客车上的应用研究初探[J]. *材料导报*, 2019, 33(S1): 141–144.
ZHANG Boqiang, WU Xinping, CHEN Huiyong, et al. *Mater Rep(in Chinese)*, 2019, 33(S1): 141–144.
- [12] JUNG J, KIM H G, GOO S, et al. Realisation of a locally resonant metamaterial on the automobile panel structure to reduce noise radiation[J]. *Mech Syst Sign Pr*, 2019, 122: 206–231.
- [13] WU T T, HUANG Z G, TSAI T C, et al. Evidence of complete band gap and resonances in a plate with periodic stubbed surface[J]. *Appl Phys Lett*, 2008, 93(11): 111902.
- [14] 何宇漾. 声子晶体结构板件在车内噪声控制中的应用研究[J]. *噪声与振动控制*, 2020, 40(6): 193–197.
HE Yuyang. *Noise Vibra Contrl (in Chinese)*, 2020, 40(6): 193–197.
- [15] ASSOUAR M B, OUDICH M. Enlargement of a locally resonant sonic band gap by using double-sides stubbed phononic plates[J]. *Appl Phys Lett*, 2012, 100(12): 123506.
- [16] SONG A, WANG X, CHEN T, et al. Low-frequency bandgaps of two-dimensional phononic crystal plate composed of asymmetric double-sided cylinder stubs[J]. *Int J Mod Phys B*, 2016, 30(7): 1650029.
- [17] LI S, DOU Y, XU J, et al. Designing a broad locally-resonant bandgap in a phononic crystals[J]. *Phys Lett A*, 2019, 383(12): 1371–1377.
- [18] YANG Q, SONG T, WEN X D, et al. Simulations on the wide bandgap characteristics of a two-dimensional tapered scatterer phononic crystal slab at low frequency[J]. *Phys Lett A*, 2020, 384(35): 126885.
- [19] 康太凤, 孙小伟, 宋婷, 等. 二维空心散射体声子晶体板的低频带隙特性及其形成机理[J]. *声学学报*, 2020, 45(4): 601–608.
KANG Taifeng, SUN Xiaowei, SONG Ting, et al. *Acta Acust(in Chinese)*, 2020, 45(4): 601–608.
- [20] 温激鸿, 蔡力, 赵宏刚, 等. 声学超材料基础理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2018.