第 49 卷第 12 期
2021 年 12 月

硅 酸 盐 学 报
JOURNAL OF THE CHINESE CERAMIC SOCIETY

Vol. 49，No. 12
December，2021

http://www.gxyb.cbpt.cnki.net

DOI：10.14062/j.issn.0454-5648.20200848

高延性水泥基复合材料裂纹桥联应力与裂纹张开关系

吴建东[1]，郭丽萍[1,2,3]，丁 聪[1]

(1. 东南大学材料科学与工程学院，南京 211189； 2. 江苏省土木工程材料重点实验室，南京 211189；
3. 先进土木工程材料协同创新中心，南京 211189)

摘 要：基于单丝短切纤维在细观尺度从硬化基体中拔出的特性，考虑了界面化学键、潜在纤维脱黏断裂、潜在纤维滑移断裂和滑移硬化界面特性，对高延性水泥基复合材料(HDCC)设计理论的裂纹桥联应力 裂纹张开关系(σ_B–δ 关系)进行了系统分析和理论推导，并建立了σ_B–δ 关系模型。通过实验测试数据对建立的模型进行了验证，发现σ_B–δ 关系模型预测的有关复合材料特性，如抗拉强度和破坏后平均裂纹张开度与实验结果具有良好的一致性。

关键词：高延性水泥基复合材料；裂纹桥联σ_B–δ 张开关系；细观力学；断裂力学；微结构参数
中图分类号：TU525 **文献标志码**：A **文章编号**：0454–5648(2021)12–2667–09
网络出版时间：2021–10–29



Crack Bridging Stress-Crack Opening Relationship for High Ductility Cementitious Composites

WU Jiandong[1], *GUO Liping*[1,2,3], *DING Cong*[1]
(1. School of Materials Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 211189, China;
2. Jiangsu Key Laboratory of Construction Materials, Nanjing 211189, China;
3. Collaborative Innovation Center for Advanced Civil Engineering Materials, Nanjing 211189, China)

Abstract: The interface chemical bond, potential fiber de-bonding fracture, potential fiber slip fracture and slip hardening interface characteristics were concerned based on the micron-scale pull-out characteristics of single staple fiber from the hardened matrix. The crack bridging stress-crack (σ_B–δ)opening relationship based on high ductility cementitious composite (HDCC) design theory was analyzed, and the (σ_B–δ)relation model of HDCC was proposed. In addition, the established model was verified by the experimental test data, indicating that the properties (*i.e.*, tensile strength and average crack opening after failure) of HDCC predicted by the model are in reasonable agreement with the experimental results.

Keywords: high ductility cementitious composite; crack bridging stress-crack opening relationship; micromechanics; fracture mechanics; microstructure parameter

高延性水泥基复合材料(HDCC)是指能够在单轴拉伸应力下实现应变硬化行为和具有多缝开裂特性且拉伸延伸率大于 0.5%的一类特殊纤维增强水泥基材料。HDCC 又称经设计的工程水泥基复合材料(ECC)[1]、应变硬化水泥基复合材料(SHCC)[2]或超高韧性水泥基复合材料(UHTCC)[3]，最早由 Li 等基于细观力学理论和断裂力学理论设计提出[4]。HDCC 中的短切纤维可以显著提高复合材料的拉伸应变和断裂韧性，其基本原理是当基体第 1 次开裂后，由于纤维的桥联作用，使纤维在基体中发生脱黏和滑移现象，并将产生的应力返传递给周围未开裂的基体，当纤维传递的应力达到周围基体的开裂强度时，

收稿日期：2020–11–09。 修订日期：2021–03–12。
基金项目：国家自然科学基金(51778133)。
第一作者：吴建东(1990—)，男，博士研究生。
通信作者：郭丽萍(1979—)，女，博士，教授。

Received date: 2020–11–09. **Revised date:** 2021–03–12.
First author: WU Jiandong(1990–), male, Doctoral candidate.
E-mail: 632103168@qq.com
Correspondent author: GUO Liping (1979–), female, Ph. D., Professor.
E-mail: guoliping691@163.com

基体中形成新的裂缝，如此循环往复，复合材料将发生多次稳定开裂并表现出应变硬化行为[5–7]。与传统的纤维增强混凝土相比，HDCC 在承受应力作用时形成了大量均匀、细小的裂缝，产生了显著的拉伸应变延伸率(>0.5%)，并且裂缝宽度可以控制在低于 100 μm 范围内，使其在各种复杂环境暴露条件下具有优异的耐久性[8–10]。

为了实现 HDCC 的高性能、高性价比和高耐久性等特点，需要对纤维、基体和纤维/基体界面性能参数进行设计。基于细观力学理论和断裂力学理论计算得到的裂纹桥联σ_B–δ 张开关系是实现纤维、基体和纤维/基体界面性能与复合材料性能之间建立关键性联系的基础[4]。σ_B–δ 关系定义了在单轴拉伸应力下的极限拉伸应力、拉伸应变以及纤维桥联产生的能量消耗，这反过来又对 HDCC 结构构件的强度、延性和断裂韧性的设计进行指导。强度准则和能量准则是实现 HDCC 的多缝开裂和应变硬化特性的前提，强度准则和能量准则又是基于σ_B–δ关系模型计算得出[11–13]。因此，σ_B–δ关系对于指导 HDCC 结构性能的设计具有重要意义。Li 等[4]最初以疏水性聚乙烯纤维作为水泥基体中的增强材，随着拉伸荷载的增加，聚乙烯纤维与基体界面黏结较弱的特性使其破坏形式通常为拔出破坏。因此，σ_B–δ关系模型中假定界面仅有恒定不变的摩擦应力，并且纤维的破坏形式为全部拔出。然而，采用亲水性聚乙烯醇纤维时，其与基体界面的黏结性较强，当纤维的桥联应力超过纤维的抗拉强度时，纤维在拔出过程中往往发生断裂破坏。Maalej 等[6]给出了基于界面仅有恒定不变的摩擦应力和化学黏结应力，并且纤维的破坏形式为断裂破坏和拔出破坏的σ_B–δ关系模型。Lin 等[14]建立了基于滑移硬化效应、界面仅有摩擦应力且破坏形式为全部拔出的σ_B–δ关系模型。Kanda 等[15]基于纤维在拔出过程中的破坏形式为断裂破坏和拔出破坏、界面存在摩擦应力和化学黏结应力以及滑移硬化效应，建立了σ_B–δ关系模型。然而，纤维在滑移阶段仍存在断裂的可能，这增加了纤维在拔出过程中的复杂性和多样性。

本研究对 HDCC 关键性能进行了分析与理论推导，在分析和推导σ_B–δ关系模型中，考虑了以下因素：1) 纤维在脱黏阶段中界面存在恒定的化学黏结应力(弱或强)和恒定的摩擦应力；2) 纤维破坏形式为断裂破坏和拔出破坏；3) 脱黏后的滑移硬化系数；4) 纤维倾角引起的纤维断裂和纤维强度损失；5) 纤维脱黏阶段和滑移阶段均存在断裂破坏。

1 单纤维拔出过程中桥联应力–应变(σ_b–δ)关系

纤维/基体界面中的剪切阻力可分为 2 类：摩擦应力主导型和化学键主导型[16]。摩擦应力主导型的行为受摩擦应力τ_0 的控制，纤维类型主要包括钢纤维和疏水性的有机合成(聚合物)纤维；化学键主导型是除摩擦应力τ_0 外，还存在化学键断裂能 G_d，纤维类型主要包括亲水性的有机合成(聚合物)纤维。考虑到建立单纤维桥联σ_B–δ 张开关系的完整性，本研究以平直型且横截面为圆形的化学键主导型纤维为例，其典型代表为聚乙烯醇(PVA)纤维。

在建立单纤维拔出过程中σ_B–δ 张开关系时，首先要明确[14]：1) 纤维在拔出过程中主要包括纤维脱黏阶段和纤维滑移阶段；2) 纤维的长径比高于 100，以便忽略纤维端部对总脱黏应力的影响；3) 在脱黏阶段，由于纤维与脱黏部分基体之间的相对滑移较小，脱黏依赖效应可以忽略，因此脱黏阶段内的摩擦应力τ_0 保持不变；4) Poisson's 效应忽略不计；5) 与纤维滑移量相比，完全脱黏后纤维的弹性拉伸忽略不计。未考虑异形纤维(如端勾纤维、波纹纤维等)的原因是在拔出过程中异形纤维会产生弯锚作用、索锚作用以及附加摩擦荷载，这对界面附近的基体造成较大损伤。随着滑移量的增大，基体内部孔道变大使得纤维脱黏后的滑移阶段产生的应力显著降低，这促使了滑移硬化系数β<0，出现应变软化现象，不利于应变硬化行为的发生。

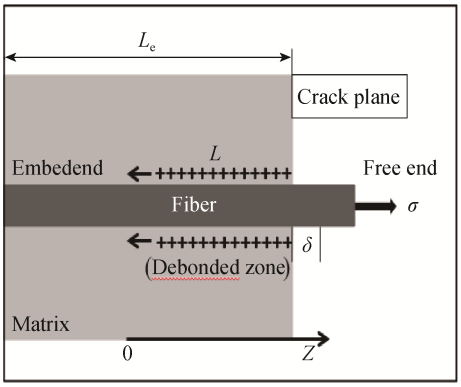
如图 1 所示，水泥基体中纤维埋入长度为 L_e，在外加应力的作用下，一部分纤维/基体界面先进入脱黏阶段，即纤维自由端部最先开始发生脱黏，并随应力的增加，脱黏区域逐渐向埋入端延伸发展。脱黏区的长度为 L，化学键断裂能为 G_d，在此范围内假定存在恒定的摩擦应力τ_0。Lin 等[14]基于应力分析和能量平衡原理，对一维(即纤维所受拉应力方向与纤维拔出方向一致)单纤维脱黏和拔出节点的理论计算公式进行了推导，并得到纤维完全脱黏时的位移为δ_0，即：

$$\delta_0=\frac{2\tau_0 L_e^2(1+\eta)}{E_f d_f}+\sqrt{\frac{8G_d L_e^2(1+\eta)}{E_f d_f}} \tag{1}$$

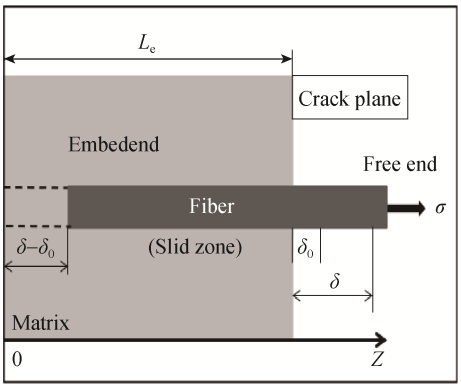
$$\eta=\frac{V_f E_f}{V_m E_m} \tag{2}$$

式中：d_f为纤维直径，m；E_f和 E_m分别为纤维和基体的弹性模量，Pa；V_f和 V_m分别是纤维和基体的体

积分数，%。其中，纤维的体积相对于水泥基体来说，可以忽略不计，因此，$\eta \approx 0$。



(a) Debonding stage



(b) Slid stage

L_e is fiber embedded length; L is fiber debonding length; δ_0 is displacement corresponding to complete debonding of fiber; δ is fiber pullout displacement; σ is fiber pullout stress; Z is fiber pullout direction.

图 1　单纤维拔出示意图[14]

Fig. 1　Schematic diagram of single fiber pulled-out[14]

纤维在裂缝处发挥桥联作用时，实际裂缝开口宽度δ是由裂缝 2 侧纤维同时脱黏量和单侧纤维滑移量组成。

纤维脱黏阶段的σ_B–δ 张开关系[14]：

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{4\tau_0 E_f(1+\eta))}{d_f}\delta + \frac{8G_d E_f}{d_f}}, 0 \leqslant \delta \leqslant 2\delta_0 \quad (3)$$

式中：σ_d纤维脱黏阶段的应力，Pa；δ 为纤维在基体中拔出的位移，m。

纤维脱黏阶段完成后，在外加应力的作用下，纤维进入滑移阶段(图 1b)，此阶段的纤维/基体界面仅有摩擦应力，并考虑了由纤维表面磨损堵塞滑移通道引起的滑移硬化系数β。因此，纤维在滑移阶段的摩擦应力τ为[7]：

$$\tau = \tau_0\left[1+\frac{\beta}{d_f}(\delta-2\delta_0)\right] \quad (4)$$

纤维滑移阶段的应力–应变(σ_B–δ)关系为[7]：

$$\sigma_s = \frac{4\tau_0}{d_f}\left[1+\frac{\beta}{d_f}(\delta-2\delta_0)\right](L_e-\delta+2\delta_0) 2\delta_0 < \delta \leqslant L_e \quad (5)$$

式中：σ_s为纤维滑移阶段的应力，Pa。

因此，单纤维在外加应力作用下的桥联σ_B–δ关系式为：

$$\sigma_b = \begin{cases} \sigma_d, & 0 \leqslant \delta \leqslant 2\delta_0 \\ \sigma_s, & 2\delta_0 < \delta \leqslant L_e \end{cases} \quad (6)$$

2　纤维夹角对单纤维桥联应力–应变(σ_b–δ)影响

在 HDCC 中，纤维以不同的角度与基体中的裂缝相交。在相同裂缝张开情况下，斜向纤维在基体裂纹截面上的桥联应力比直向纤维的桥联应力大。随着纤维与加载应力轴向方向之间夹角θ的增大，加载应力的增加变得更加显著，即所谓的“制动效应”[17]。然而，式(6)为纤维拔出方向与加载应力轴向方向一致的情况，并没有考虑纤维与加载方向之间夹角θ所带来的影响。因此，可以用制动系数 f 来表示夹角θ对纤维引起的“制动效应”。

图 2 为考虑纤维与加载方向存在夹角的单纤维拔出示意图。单纤维桥联应力的一般形式表示为[6]：

$$\sigma(\theta) = \sigma e^{f\theta} \quad (7)$$

式中：θ为埋入纤维与加载方向之间的夹角，且$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$；$\sigma(\theta)$为纤维在拔出过程中不同夹角下的外加应力，Pa；$\sigma$为纤维在拔出过程中$\theta$=0 下的外加应力，Pa。

因此，带有夹角的单纤维在外加应力作用下的桥联σ_B–δ 张开关系式为：

$$\sigma_b = \begin{cases} \sigma_d(\delta,\theta) = \sigma_d e^{f\theta}, & 0 \leqslant \delta \leqslant 2\delta_0 \\ \sigma_s(\delta,\theta,L_e) = \sigma_s e^{f\theta}, & 2\delta_0 < \delta \leqslant L_e \end{cases} \quad (8)$$

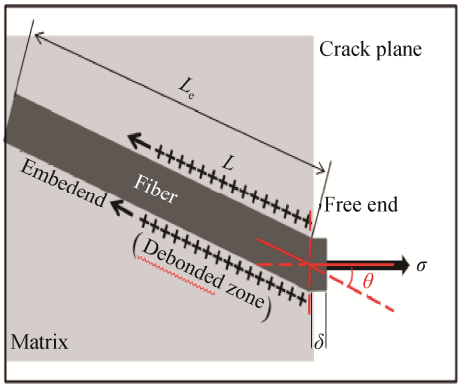


图 2　纤维与加载方向存在夹角的单纤维拔出示意图

Fig. 2　Schematic diagram of single fiber pulled-out with an angle between the fiber and the loading direction

由于纤维夹角的存在，纤维在拔出过程中其表面的磨损程度加剧，造成纤维在拔出通道中堵塞严重加剧；这反过来又造成纤维/基体界面处的基体出现剥落现象，进而又增加了纤维表面的磨损，如此反复循环，使纤维产生“强度退化效应”。因此，为了考虑这种效应，可以用强度折减系数f来表示[11]：

$$\sigma_{\mathrm{fu}}(\theta)=\sigma_{\mathrm{fu}}\mathrm{e}^{-f'\theta} \tag{9}$$

式中：$\sigma_{\mathrm{fu}}(\theta)$为纤维在不同夹角下的抗拉强度，Pa；$\sigma_{\mathrm{fu}}$为纤维的原始抗拉强度，Pa；$f$为纤维强度折减系数($f'$>0)。此外，制动系数$f$和纤维强度折减系数$f'$是通过对纤维在不同埋入角度$\theta$的试样进行测试，并对测试结果进行曲线拟合得到。

3 纤维断裂对单纤维桥联应力–应变(σ_{b}–δ)影响

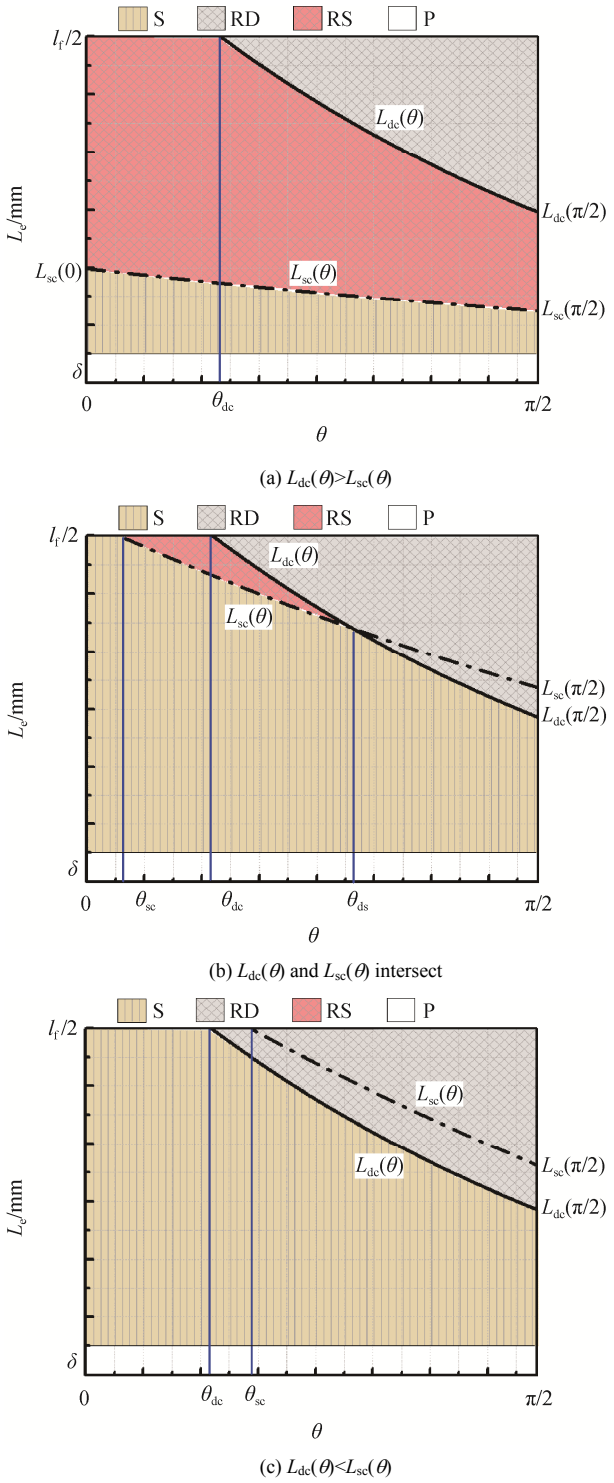
纤维/基体界面处的化学键和摩擦力能够促进纤维在脱黏过程中发生断裂现象，从而影响复合材料的力学性能[1]。以单纤维桥联σ_{B}–δ张开关系模型为基础，由于裂缝开口的增加，复合材料的桥联应力会出现大于纤维抗拉强度的情况，导致原始完整的纤维数量降低。这一现象可用数学统计来表示，即采用具有二维夹角θ和埋入长度L_{e}的纤维状态空间(θ, L_{e})[14]。纤维状态空间表示纤维在应力作用下所处于脱黏区、滑移区、断裂区和拔出区的条件和数量分布。空间中的每一点代表每根纤维与受拉应力方向形成的角度和此角度下的埋入长度。

纤维在拔出过程中的脱黏阶段和滑移阶段均有可能出现σ_{b}>σ_{fu}，造成纤维断裂。因此，纤维在脱黏阶段和滑移阶段分别存在一个临界断裂长度$L_{\mathrm{dc}}(\theta)$和$L_{\mathrm{sc}}(\theta)$：

$$L_{\mathrm{dc}}(\theta)=\frac{\sigma_{\mathrm{fu}}d_{\mathrm{f}}}{4\tau_0}\mathrm{e}^{-(f+f')\theta}-\sqrt{\frac{G_{\mathrm{d}}E_{\mathrm{f}}d_{\mathrm{f}}}{2\tau_0^2}} \tag{10}$$

$$L_{\mathrm{sc}}(\theta)=\sqrt{\frac{\sigma_{\mathrm{fu}}d_{\mathrm{f}}^2}{\tau_0\beta}\mathrm{e}^{-(f+f')\theta}}-\frac{d_{\mathrm{f}}}{\beta} \tag{11}$$

临界断裂长度$L_{\mathrm{dc}}(\theta)$和$L_{\mathrm{sc}}(\theta)$的物理含义为：当某一夹角θ下的纤维长度大于$L_{\mathrm{dc}}(\theta)$和$L_{\mathrm{sc}}(\theta)$中的最小值时，纤维处于潜在断裂区；当某一倾角θ下的纤维长度小于$L_{\mathrm{dc}}(\theta)$和$L_{\mathrm{sc}}(\theta)$中的最小值时，纤维处于未断裂区。$L_{\mathrm{dc}}(\theta)$和$L_{\mathrm{sc}}(\theta)$界定了潜在的纤维断裂空间：当基体裂纹打开时，位于曲线上方的纤维最终会断裂。由于存在制动系数f和纤维强度折减系数f'，纤维桥联应力$\sigma(\theta)$随夹角θ的增大而增大，而$L_{\mathrm{dc}}(\theta)$和$L_{\mathrm{sc}}(\theta)$随夹角θ的增大而减小。夹角θ值越高，纤维断裂的可能性越大。典型的纤维状态空间分布共分为 3 种(图 3)，包含滑移区(S)、脱黏断裂区(RD)、滑移断裂区(RS)和拔出区(P)。根据研究文献[18–20]所涉及到的纤维性能参数和纤维/基体界面参数进行任意组合，$L_{\mathrm{dc}}(\theta)$–$L_{\mathrm{sc}}(\theta)$的值基本处于大于 0 的状态，实际的纤维状态空间分布更接近图 3a。



θ is inclined angle.

图 3 典型的纤维状态空间分布

Fig. 3 Typical spatial distribution of fiber states

当θ=0 和θ=π/2 时，角度θ 对纤维在脱黏阶段和滑移阶段断裂的初始临界值和结束临界值为：

$$L_{\mathrm{dc}}(0)=\frac{\sigma_{\mathrm{fu}}d_{\mathrm{f}}}{4\tau_0}-\sqrt{\frac{G_{\mathrm{d}}E_{\mathrm{f}}d_{\mathrm{f}}}{2\tau_0^2}} \tag{12}$$

$$L_{\mathrm{dc}}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sigma_{\mathrm{fu}}d_{\mathrm{f}}}{4\tau_0}\mathrm{e}^{-(f+f')\frac{\pi}{2}}-\sqrt{\frac{G_{\mathrm{d}}E_{\mathrm{f}}d_{\mathrm{f}}}{2\tau_0^2}} \tag{13}$$

$$L_{\mathrm{sc}}(0)=2\sqrt{\frac{\sigma_{\mathrm{fu}}d_{\mathrm{f}}^2}{4\tau_0\beta}}-\frac{d_{\mathrm{f}}}{\beta} \tag{14}$$

$$L_{\mathrm{sc}}\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{\frac{\sigma_{\mathrm{fu}}d_{\mathrm{f}}^2}{4\tau_0\beta}\mathrm{e}^{-(f+f')\frac{\pi}{2}}}-\frac{d_{\mathrm{f}}}{\beta} \tag{15}$$

$L_{\mathrm{dc}}(0)$和 $L_{\mathrm{sc}}(0)$需要满足 $L_{\mathrm{dc}}(0)>0$ 且 $L_{\mathrm{sc}}(0)>0$，这表明所有的纤维不会处在断裂区，在纤维拔出过程中至少存在桥联应力。本研究考虑了 $L_{\mathrm{dc}}(\pi/2)>0$ 且 $L_{\mathrm{sc}}(\pi/2)>0$。

对于一个给定的纤维，当复合材料出现裂缝时，其最大埋入长度为 $L_{\mathrm{e}}=l_{\mathrm{f}}/2$，$l_{\mathrm{f}}$ 为纤维总长度。假定纤维存在断裂的可能，其断裂次序应是先在脱黏阶段断裂失效，如果脱黏阶段没有断裂，则完成脱黏阶段后在滑移阶段中断裂失效，若仍然没有断裂，则纤维继续拔出。因此，纤维在脱黏阶段断裂存在一个最小的夹角θ_{dc}。当夹角小于θ_{dc}时，纤维不会出现断裂；夹角大于θ_{dc} 时，纤维才会发生断裂。θ_{dc} 定义为纤维在脱黏阶段的最小潜在临界断裂角，如图 3a 所示。

$$\theta_{\mathrm{dc}}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{l_f}{2}\leqslant L_{\mathrm{dc}}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\\ -\dfrac{1}{f+f'}\ln\left(\dfrac{2\tau_0 l_{\mathrm{f}}}{\sigma_{\mathrm{fu}}d_{\mathrm{f}}}+\sqrt{\dfrac{8G_{\mathrm{d}}E_{\mathrm{f}}}{\sigma_{\mathrm{fu}}^2d_{\mathrm{f}}}}\right), & L_{\mathrm{dc}}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<\dfrac{l_{\mathrm{f}}}{2}\leqslant L_{\mathrm{dc}}(0)\\ 0, & \dfrac{l_f}{2}>L_{\mathrm{dc}}(0)\end{cases} \tag{16}$$

1) 纤维脱黏断裂

对于给定的裂纹张开位移δ，存在相对应的纤维处于脱黏阶段与滑移阶段的临界脱黏长度 $l_{\mathrm{d}}(\delta)$[7]：

$$l_{\mathrm{d}}(\delta)=\sqrt{\frac{(\tau_0\delta+2G_{\mathrm{d}})E_{\mathrm{f}}d_{\mathrm{f}})}{4\tau_0^2}}-\sqrt{\frac{G_{\mathrm{d}}E_{\mathrm{f}}d_{\mathrm{f}}}{2\tau_0^2}} \tag{17}$$

随着裂纹张开位移δ的增加，纤维达到完全脱黏长度 $l_{\mathrm{d}}(\delta)$的数量不断增大。当 $l_{\mathrm{d}}(\delta)>L_{\mathrm{dc}}(\pi/2)$时，处于潜在断裂区域的纤维开始发生断裂，具有埋入长度较长且夹角较大的纤维最开始发生断裂。纤维脱黏阶段的断裂区，主要考虑 2 部分：潜在脱黏断裂区和已断裂区，如图 4 所示。

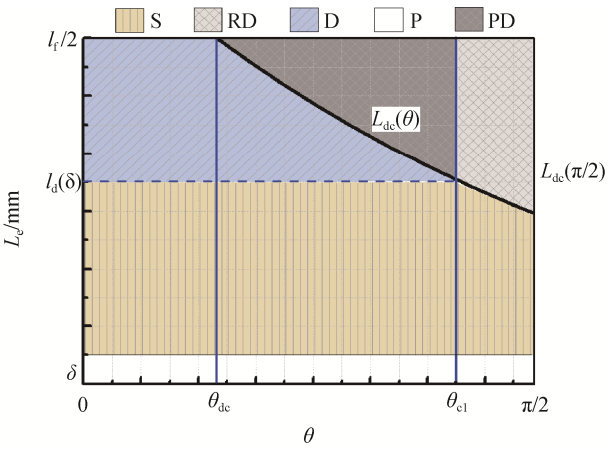


图 4　典型的纤维状态空间分布

Fig. 4　Typical spatial distribution of fiber states

当裂缝开口为δ 时，假设已经出现纤维断裂区，此区域代表纤维的开裂程度。脱黏断裂区域从 0 开始随着位移δ 的增大直至与 $L_{\mathrm{e}}>L_{\mathrm{dc}}(\delta)$区域重合，意味着当复合材料裂纹打开时，纤维埋入长度越大，且与加载应力轴向的夹角越大，纤维首先断裂失效。在脱黏断裂区域的夹角$\theta_{\mathrm{c1}}<\theta<\pi/2$ 范围内，纤维发生断裂。因此，θ_{c1} 为纤维实际临界断裂角：

$$\theta_{\mathrm{c1}}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \theta'_{\mathrm{c1}}\geqslant\dfrac{\pi}{2}\\ \theta'_{\mathrm{c1}}, & \theta_{\mathrm{dc}}<\theta'_{\mathrm{c1}}\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ \theta_{\mathrm{dc}}, & \theta'_{\mathrm{c1}}\leqslant\theta_{\mathrm{dc}}\end{cases} \tag{18}$$

$$\theta'_{\mathrm{c1}}=-\frac{1}{(2(f+f')}\ln\left[\frac{4E_{\mathrm{f}}}{\sigma_{\mathrm{fu}}^2d_{\mathrm{f}}}(2G_{\mathrm{d}}+\tau_0\delta)\right] \tag{19}$$

2) 纤维滑移断裂

纤维脱黏阶段完成后，埋入长度 $L_{\mathrm{e}}<L_{\mathrm{dc}}(\theta)$的纤维进入滑移阶段继续发挥作用，而脱黏断裂区的纤维和埋入长度小于δ 的纤维对纤维桥联应力不再发挥作用。由于纤维在滑移过程中的刮丝堵塞孔道效应，往往造成纤维在滑移过程中出现$\sigma_{\mathrm{s}}>\sigma_{\mathrm{fu}}$，即纤维在滑移阶段发生断裂现象。因此，对于给定$\delta$ 处的从基体中处于滑移阶段、已经完成滑移阶段和滑移阶段已经断裂的纤维也应当加以区分，因为已经完成滑移阶段和已经断裂的纤维不再有助于桥联应力的发展。

在给定的裂纹张开位移δ，也存在相对应的纤维处于滑移阶段中的临界断裂长度 $l_{\mathrm{s}}(\delta,\theta)$：

$$l_{\mathrm{s}}(\delta,\theta)=\frac{\sigma_{\mathrm{fu}}d_{\mathrm{f}}^2}{4\tau_0(d_{\mathrm{f}}+\beta(\delta-2\delta_0))}e^{-(f+f')\theta}+\delta-2\delta_0 \tag{20}$$

在给定的裂纹张开位移δ下，l_{s} 为关于θ 的函数，即 $l_{\mathrm{s}}(\theta)$。

图 5 为典型的纤维滑移断裂区间发展趋势。由图 5 可见，随着裂纹位移的增加，纤维发生滑移断裂的区间逐渐增大。

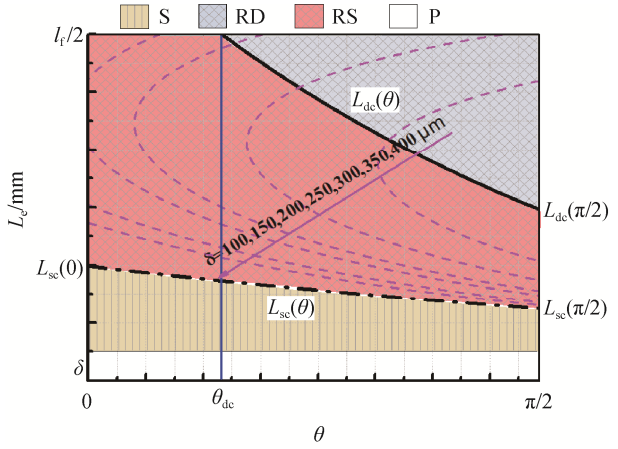


图 5 典型的纤维滑移断裂区间发展趋势

Fig. 5 Development trend of typical fiber slipping ruptured zone

图 6 是裂纹宽度为δ 的纤维滑移断裂区间。将$l_s(\theta)$依据抛物线顶点θ_p 分为上下 2 部分：$l_{s1}(\theta)>l_s(\theta_p)$和 $l_{s2}(\theta)>l_s(\theta_p)$。其中，$l_s(\theta)$与 $L_{dc}(\theta)$的交点定义为θ_{s1}，$l_{s2}(\theta)=l_f/2$ 得到交点θ_s。由于θ_p 和θ_{s1} 计算的复杂性，采用隐函数形式进行表达，即 θ'_p 和 θ'_{s1} 。

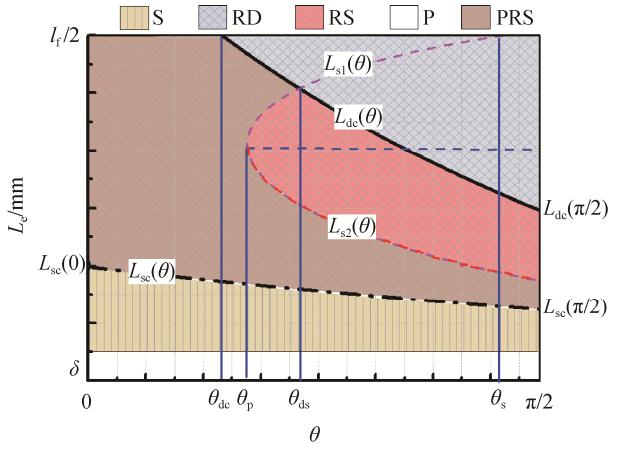


图 6 裂纹宽度为δ 的纤维滑移断裂区间

Fig. 6 Fiber slipping ruptured zone at crack opening δ

$$\theta_p=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \theta'_p\geqslant\dfrac{\pi}{2}\\ \theta'_p, & 0<\theta'_p<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \theta'_p\leqslant 0\end{cases} \tag{21}$$

$$\theta_{s1}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \theta'_{s1}\geqslant\dfrac{\pi}{2}\\ \theta'_{s1}, & \theta_{dc}<\theta'_{s1}\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ \theta_{dc}, & \theta'_{s1}\leqslant\theta_{dc}\end{cases} \tag{22}$$

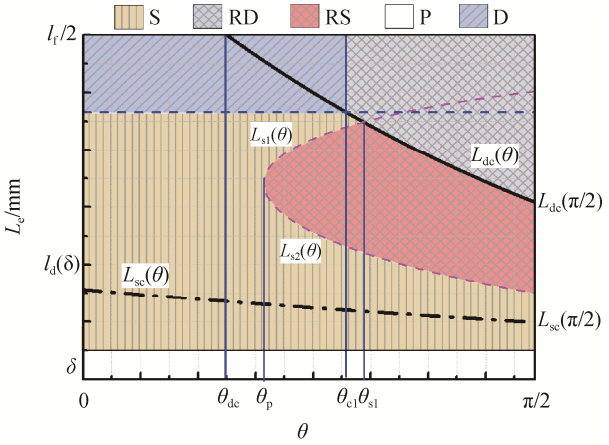
$$\theta_s=\begin{cases}\theta_{dc}, & \theta'_s\geqslant\theta_{dc}\\ \theta'_s, & 0<\theta'_s<\theta_{dc}\\ 0, & \theta'_s\leqslant 0\end{cases} \tag{23}$$

$$\theta'_s=-\frac{1}{(f+f')}\ln\left(\frac{2\tau_0(d_f+\beta(\delta-2\delta_0))(l_f-2\delta+4\delta_0)}{\sigma_{fu}d_f^2}\right) \tag{24}$$

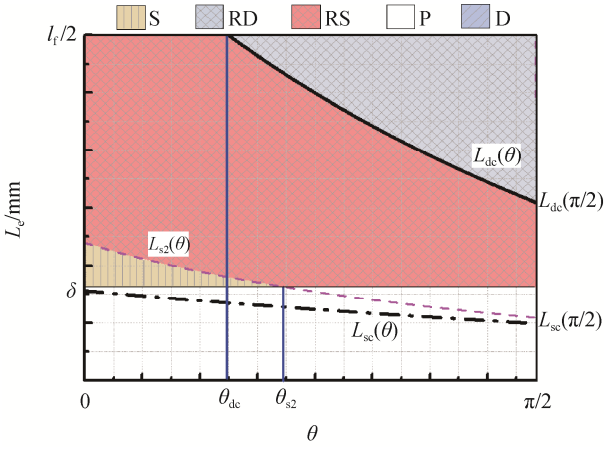
图 7 为典型的纤维滑移和断裂区间分布。对于给定裂纹位移δ，裂纹位移δ 曲线与 $L_{dc}(\theta)$和 $L_{s2}(\theta)$和相交，交点为θ_{a1} 和θ_{a2}，分别为：

$$\theta_{a1}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \theta'_{a1}\geqslant\dfrac{\pi}{2}\\ \theta'_{a1}, & \theta_{dc}<\theta'_{a1}<\dfrac{\pi}{2}\\ \theta_{dc}, & \theta'_{a1}\leqslant\theta_{dc}\end{cases} \tag{25}$$

$$\theta'_{a1}=-\frac{1}{(f+f')}\ln\frac{4\tau_0\delta+\sqrt{8G_dE_fd_f}}{\sigma_{fu}d_f} \tag{26}$$



(a) $\delta<l_{s2}(\pi/2)$



(b) $\delta\geqslant l_{s2}(\pi/2)$

图 7 典型的纤维滑移和断裂区间分布

Fig. 7 Typical fiber slipping and rupturing zone distribution

$$\theta_{a2}=\begin{cases}\theta_{s1},\ \theta'_{a2}\geqslant\dfrac{\pi}{2}\\ \theta'_{a2},\ \theta_p<\theta'_{a2}<\dfrac{\pi}{2}\\ \theta_p,\ \theta'_{a2}\leqslant\theta_p\end{cases}\tag{27}$$

$$\theta'_{a2}=-\frac{1}{f+f'}\ln\frac{8\tau_0\delta_0(d_f+\beta(\delta-2\delta_0))}{\sigma_{fu}d_f^2}\tag{28}$$

4　高延性水泥基复合材料的桥联 σ_B–δ 张开关系

裂纹桥联应力–应变(σ_B–δ)关系是高延性水泥基复合材料的基本材料特性。基于单根纤维的桥联 σ_B–δ 张开关系，利用统计学原理对裂纹处所有桥联纤维的贡献进行统计并建立复合材料的裂纹桥联 σ_B–δ 张开关系[1]：

$$\sigma_B=V_f\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{l_f}{2}\cos\theta}\sigma_b(\delta,z,\theta)f(z)f(\theta)\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\tag{29}$$

式中：V_f为纤维体积掺量；$f(z)$为纤维质心到裂纹平面距离 z 的概率密度函数[1][式(29)]；$f(\theta)$为纤维夹角 θ的概率密度函数[式(31)][1]。

$$f(z)=\frac{2}{l_f},\quad 0\leqslant z\leqslant\frac{l_f}{2}\tag{30}$$

$$f(\theta)=\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\tag{31}$$

将纤维埋入长度 $L_e=l_f/2-z/\cos\theta$与式(30)和式(31)代入式(29)中得到复合材料修改后的裂纹桥联σ_B–δ张开关系[1]：

$$\sigma_B=\frac{V_f}{l_f}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{l_f}{2}}\sigma_b(\delta,L_e,\theta)\mathrm{e}^{f\theta}\sin2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}L_e\tag{32}$$

纤维在基体中脱黏阶段和滑移阶段产生的应力是裂纹桥联应力的主要来源。首先，根据裂缝开口δ的不同状态得到纤维在每个状态空间下发生脱黏断裂和滑移断裂相对应的夹角θ 和埋入长度L_e的边界条件；然后假定纤维在脱黏断裂区和滑移断裂区不发生断裂的情况下所产生的裂纹桥联应力；最后，用假定纤维不发生任何断裂产生的裂纹桥联应力减掉纤维在脱黏断裂区和滑移断裂区所产生的裂纹桥联应力，从而得到复合材料的裂纹桥联σ_B–δ关系。

4.1　未考虑纤维断裂

假定纤维在拔出过程中不会发生断裂，即全部纤维先完成脱黏过程，再完成滑移过程。脱黏过程和滑移过程中不存在因纤维断裂而消耗的附加应力。此时，纤维处于脱黏区的边界条件为：

$$S_{RD}=\left\{\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],L_e\in\left[0,\frac{l_f}{2}\right],l_d(\delta)\leqslant L_e\leqslant\frac{l_f}{2}\right\}\tag{33}$$

纤维处于滑移区的边界条件为：

$$S_{RS}=\left\{\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],L_e\in\left[0,\frac{l_f}{2}\right],0\leqslant L_e<l_d(\delta)\right\}\tag{34}$$

由纤维在每个状态空间下的脱黏区和滑移区相对应的夹角θ和埋入长度 L_e 的边界条件通过数学统计得到总的裂纹桥联应力–应变(σ_{RA}–δ)关系：

$$\sigma_{RA}(\delta)=\begin{cases}\dfrac{V_f}{l_f}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_\delta^{l_d(\delta)}\sigma_s(\delta,L_e)\mathrm{e}^{f\theta}\sin2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}L_e\\ \displaystyle+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{l_d(\delta)}^{\frac{l_f}{2}}\sigma_d(\delta)\mathrm{e}^{f\theta}\sin2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}L_e\end{array}\right\} & 0\leqslant\delta<2\delta_0\\ \dfrac{V_f}{l_f}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_\delta^{\frac{l_f}{2}}\sigma_s(\delta,L_e)\mathrm{e}^{f\theta}\sin2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}L_e & 2\delta_0\leqslant\delta\leqslant l_f/2\end{cases}\tag{35}$$

4.2　考虑纤维脱黏断裂

当裂纹位移不断增加，计算滑移断裂区域中的纤维在脱黏和滑移过程中所产生的应力。纤维在脱黏断裂区域发生脱黏过程的边界条件为：

$$S_{RD}=\left\{\theta\in\left[\theta_{c1},\frac{\pi}{2}\right],L_e\in\left[\min(l_d(\delta),\frac{l_f}{2}),\frac{l_f}{2}\right]\right\}\tag{36}$$

纤维在脱黏断裂区域发生滑移过程的边界条件：

$$S_{RS}=\left\{\theta\in\left[\theta_{c1},\frac{\pi}{2}\right],L_e\in\left[L_{dc}(\theta),\min(l_d(\delta),\frac{l_f}{2})\right]\right\}\tag{37}$$

在脱黏断裂区，由纤维在每个状态空间下的脱黏区和滑移区相对应的夹角θ 和埋入长度 L_e 的边界条件通过数学统计得到总的裂纹桥联σ_B–δ 张开关系：

$$\sigma_{RA}(\delta)=\begin{cases}\dfrac{V_f}{l_f}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\theta_{c1}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{L_{dc}(\theta)}^{\frac{l_f}{2}}\sigma_d(\delta)\mathrm{e}^{f\theta}\sin2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}L_e\\ \displaystyle+\int_{\theta_{c1}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{L_{dc}(\theta)}^{l_d(\delta)}\sigma_s(\delta,L_e)\mathrm{e}^{f\theta}\sin2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}L_e\end{array}\right\} & 0\leqslant\delta<2\delta_0\\ \dfrac{V_f}{l_f}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\theta_{c1}}^{\min(\theta_{a1},\frac{\pi}{2})}\int_{L_{dc}(\theta)}^{\frac{l_f}{2}}\sigma_s(\delta,L_e)\mathrm{e}^{f\theta}\sin2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}L_e\\ \displaystyle+\int_{\theta_{a1}}^{\frac{\pi}{2}}\int_\delta^{\frac{l_f}{2}}\sigma_s(\delta,L_e)\mathrm{e}^{f\theta}\sin2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}L_e\end{array}\right\} & 2\delta_0\leqslant\delta\leqslant l_f/2\end{cases}\tag{38}$$

4.3 考虑纤维滑移断裂

当裂纹位移不断增加，计算滑移断裂区域中的纤维在滑移过程中所产生的应力。纤维在滑移断裂区域发生滑移过程的边界条件：

$$S_{\mathrm{RS}}=\left\{\theta\in\left[\theta_{\mathrm{p}},\frac{\pi}{2}\right],L_{\mathrm{e}}\in\left[l_{\mathrm{s2}}(\theta),l_{\mathrm{s1}}(\theta)\right]\bigcup\left[l_{\mathrm{s2}}(\theta),\min(L_{\mathrm{dc}}(\theta),\frac{l_{\mathrm{f}}}{2})\right]\right\} \tag{39}$$

在脱黏断裂区，由纤维在每个状态空间下的脱黏区和滑移区相对应的夹角θ和埋入长度 L_{e} 的边界条件通过数学统计得到总的裂纹桥联应力–应变(σ_{RS}–δ)关系：

$$\sigma_{RS}(\delta)=\begin{cases}\dfrac{V_{\mathrm{f}}}{l_{\mathrm{f}}}\left\{\begin{aligned}&\int_{\theta_{\mathrm{p}}}^{\theta_{\mathrm{s1}}}\int_{l_{\mathrm{s2}}(\theta)}^{l_{\mathrm{s1}}(\theta)}\sigma_{\mathrm{s}}(\delta,L_{\mathrm{e}})\mathrm{e}^{f\theta}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}L_{\mathrm{e}}\\&+\int_{\theta_{\mathrm{s1}}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{l_{\mathrm{s2}}(\theta)}^{L_{\mathrm{dc}}(\theta)}\sigma_{\mathrm{s}}(\delta,L_{\mathrm{e}})\mathrm{e}^{f\theta}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}L_{\mathrm{e}}\end{aligned}\right\} & 0\leqslant\delta<2\delta_0\\ \dfrac{V_{\mathrm{f}}}{l_{\mathrm{f}}}\left\{\begin{aligned}&\int_{\theta_{\mathrm{p}}}^{\min(\theta_{\mathrm{s}},\theta_{\mathrm{s1}})}\int_{l_{\mathrm{s2}}(\theta)}^{l_{\mathrm{s1}}(\theta)}\sigma_{\mathrm{s}}(\delta,L_{\mathrm{e}})\mathrm{e}^{f\theta}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}L_{\mathrm{e}}\\&+\int_{\min(\theta_{\mathrm{s}},\theta_{\mathrm{dc}})}^{\min(\theta_{\mathrm{a2}},\theta_{\mathrm{dc}})}\int_{l_{\mathrm{s2}}(\theta)}^{\frac{l_{\mathrm{f}}}{2}}\sigma_{\mathrm{s}}(\delta,L_{\mathrm{e}})\mathrm{e}^{f\theta}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}L_{\mathrm{e}}\\&+\int_{\max(\theta_{\mathrm{dc}},\theta_{\mathrm{s1}})}^{\theta_{\mathrm{a2}}}\int_{l_{\mathrm{s2}}(\theta)}^{L_{\mathrm{dc}}(\theta)}\sigma_{\mathrm{s}}(\delta,L_{\mathrm{e}})\mathrm{e}^{f\theta}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}L_{\mathrm{e}}\\&+\int_{\max(\theta_{\mathrm{a2}},\theta_{\mathrm{dc}})}^{\theta_{\mathrm{a1}}}\int_{\delta}^{L_{\mathrm{dc}}(\theta)}\sigma_{\mathrm{s}}(\delta,L_{\mathrm{e}})\mathrm{e}^{f\theta}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}L_{\mathrm{e}}\\&+\int_{\min(\theta_{\mathrm{a2}},\theta_{\mathrm{dc}})}^{\theta_{\mathrm{dc}}}\int_{\delta}^{\frac{l_{\mathrm{f}}}{2}}\sigma_{\mathrm{s}}(\delta,L_{\mathrm{e}})\mathrm{e}^{f\theta}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}L_{\mathrm{e}}\end{aligned}\right\} & 2\delta_0\leqslant\delta\leqslant l_{\mathrm{f}}/2\end{cases} \tag{40}$$

因此，HDCC 单缝拔出的总裂纹桥联应力–应变(σ_{B}–δ)关系为：

$$\sigma_{\mathrm{B}}(\delta)=\sigma_{\mathrm{RA}}(\delta)-\sigma_{\mathrm{RD}}(\delta)-\sigma_{\mathrm{RS}}(\delta) \tag{41}$$

5 高延性水泥基复合材料σ_{B}–δ关系实验验证

聚乙烯醇(PVA)纤维在水泥基体中具有较强的化学键和滑移硬化界面行为[1]。采用 PVA 纤维增强 HDCCs 的单轴拉伸试验数据对模型进行验证。Yu 等[21]将 PVA 纤维体积分数设计为 2.5%。HDCC 的配合比和 PVA 纤维的物理性能分别列于表 1 和表 2[21]。通过单纤维拔出试验可以确定纤维/基体界面细观参数，见表 3[21]。

表 1 配合比[21]

Table 1 Mix proportions[21]

	Mix proportion/(kg·m^{-3})					
φ(fiber) /%	Cement	Fly ash	Silica Fume	Water	Silica Sand	HRWR[a]
2.5	258	1 149	28	287	287	5.9

φ—Volume fraction; [a] Polycarboxylate-based high range water reducer.

表 2 PVA 纤维物理性能[21]

Table 2 Physical properties of PVA fiber[21]

l_{f}/mm	d_{f}/μm	E_{f}/GPa	σ_{fu}/MPa
12	39	16.9	1 275

利用 PVA 纤维、基体和纤维/基体界面参数建立模型，得到σ_{B}–δ关系，并与实验结果进行对比，如图 8 所示。短切 PVA 纤维在 HDCC 中呈三维乱向分布，制备过程中纤维分散的不均匀性是导致实验结果存在离散性的主要原因。裂纹桥联模型是建立在纤维均匀分布的假设基础上，σ_{B}–δ关系可以代表统计平均裂纹桥联规律。由图 8 可以看出，模型预测的σ_{B}–δ关系与实验结果整体趋势具有一致性，然而预测模型最大桥联应力值高于实验测试范围值。这可以归结于HDCC进行单缝拉伸实验测试时，

表 3 基体、纤维/基体界面细观参数[21]

Table 3 Micro-parameters of matrix and fiber/matrix interface[21]

τ_0/MPa	G_{d}/(J·m^{-2})	β	f	f'
1.35	1.05	0.6	0.2	0.33

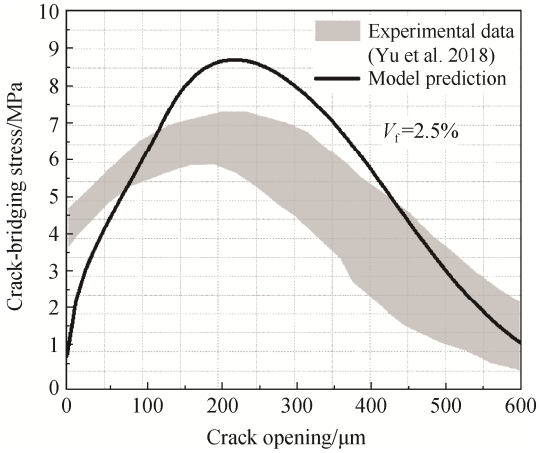


图 8 σ_{B}–δ曲线预测与实验比较

Fig. 8 Comparison of predicted and experimental σ_{B}–δ curve

由于纤维体积掺量过高(2.5%)，HDCC 的受拉区域往往出现几条裂缝，而不是纯粹的单缝开裂。多缝开裂耗散了原本属于单缝开裂所需要的能量，造成实验测试值偏小。

6 结论

以细观力学和断裂力学理论以及统计学原理为基础，考虑了界面化学键、潜在纤维脱黏断裂、潜在纤维滑移断裂和滑移硬化界面特性，分析并建立了高延性水泥基复合材料的桥联σ_B–δ 关系。

首先，纤维夹角的存在使其在拔出过程中受到切削作用，一方面增加了外加应力，另一方面纤维表面磨损程度加剧，造成纤维强度损失。外加应力的增加和纤维强度的损失导致纤维在基体脱黏阶段或滑移阶段发生断裂，这取决于“制动效应”和“纤维强度折减系数”。其次，在分析纤维处于滑移阶段断裂时，纤维临界断裂长度中的完全脱黏长度不可忽略。最后，通过实验测试数据对建立的模型进行了评估。结果表明：模型预测的抗拉强度和平均失效后裂纹开口与实验结果整体趋势具有良好的一致性。

参考文献:

[1] LI V C, WANG Y, BACKER S. A micromechanical model of tension-softening and bridging toughening of short random fiber reinforced brittle matrix composites[J]. J Mech Phys Solids, 1991, 39(5): 607–625.

[2] PEREIRA E B, FISCHER G, BARROS J A O. Direct assessment of tensile stress-crack opening behavior of strain hardening cementitious composites (SHCC)[J]. Cem Concr Res, 2012, 42(6): 834–846.

[3] XU S, WANG N. Flexural behaviors of RC beams strengthened with post-poured UHTCC layer[J]. Adv Mater Res, 2010, 150–151: 6–9.

[4] LI V C, LEUNG C K Y. Steady-state and multiple cracking of short random fiber composites[J]. J Eng Mech, 1992, 118(11): 2246–2264.

[5] LI V C, STANG H, KRENCHEL H. Micromechanics of crack bridging in fibre-reinforced concrete[J]. Mater Struct, 1993, 26(8): 486–494.

[6] MAALEJ M, LI V C, HASHIDA T. Effect of fiber rupture on tensile properties of short fiber composites[J]. J Eng Mech, 1995, 121(8): 903–913.

[7] LIN Z, LI V C. Crack bridging in fiber reinforced cementitious composites with slip-hardening interfaces[J]. J Mech Phys Solids, 1997, 45(5): 763–787.

[8] SAHMARAN M, LI V C. De-icing salt scaling resistance of mechanically loaded engineered cementitious composites[J]. Cem Concr Res, 2007, 37(7): 1035–1046.

[9] LI Q, HUANG B, XU S, et al. Compressive fatigue damage and failure mechanism of fiber reinforced cementitious material with high ductility[J]. Cem Concr Res, 2016, 90: 174–183.

[10] HUI M, QIAN S, ZHANG Z, et al. Tailoring engineered cementitious composites with local ingredients[J]. Constr Build Mater, 2015, 101: 584–595.

[11] KANDA T, LI V C. Multiple cracking sequence and saturation in fiber reinforced cementitious composites[J]. Concr Res Tech, 1998, 9(2): 1–15.

[12] LI V C. Advances in ECC research[J]. ACI Spec Public, 2002, 206: 373–400.

[13] KANDA T, LI V C. Practical design criteria for saturated pseudo strain hardening behavior in ECC[J]. J Adv Concr Tech, 2006, 4(1): 59–72.

[14] LIN Z, KANDA T, LI V C. On interface property characterization and performance of fiber-reinforced cementitious composites[J]. Concr Sci Eng, 1999, 1(1): 173–184.

[15] KANDA T, LI V C. Effect of fiber strength and fiber-matrix interface on crack bridging in cement composites[J]. J Eng Mech, 1999, 125(3): 290–299.

[16] KANDA T, LI V C. Interface property and apparent strength of high-strength hydrophilic fiber in cement matrix[J]. J Mater Civ Eng, 1998, 10(1): 5–13.

[17] LI V C, WANG Y, BACKER S. Effect of inclining angle, bundling, and surface treatment on synthetic fiber pull-out from a cement matrix[J]. Compos, 1990, 21(2): 132–140.

[18] DING C, GUO L, CHEN B. Theoretical analysis on optimal fiber-matrix interfacial bonding and corresponding fiber rupture effect for high ductility cementitious composites[J]. Constr Build Mater, 2019, 223: 841-851.

[19] KAN L, WANG W, LIU W, et al. Development and characterization of fly ash based PVA fiber reinforced Engineered Geopolymer Composites incorporating metakaolin[J]. Cem Concr Compos, 2020, 108: 103521.

[20] Amfa B, WANG M, CHEN J, et al. Experimental and numerical study on tensile behavior of surface modified PVA fiber reinforced strain-hardening cementitious composites (PVA-SHCC)[J]. Constr Build Mater, 2019, 217: 403-415.

[21] AYU J, CHEN X, LEUNG C K Y. Micromechanical modeling of crack-bridging relations of hybrid-fiber strain-hardening cementitious composites considering interaction between different fibers[J]. Constr Build Mater, 2018, 182: 629–636.