

弯矩线性变化压弯杆弯扭屈曲的等效弯矩系数

童根树

(浙江大学高性能结构研究所, 杭州 310058)

摘要: 对弯矩沿杆长线性变化的压弯构件的弯扭屈曲采用能量法进行分析, 侧移和扭转角均取三项, 求得的解接近精确。求得了压力作用下的等效弯矩系数, 提出了精度高、略偏保守的新公式, 对新公式应用于钢结构设计标准中的结果和现行标准公式的结果进行了对比, 在稳定控制区域, 按本文公式得到的抗弯承载力有所提高。

关键词: 压弯杆; 平面外稳定; 等效弯矩系数; 弯扭屈曲

0 引言

压弯杆弯矩作用平面外的稳定验算公式是^[1]:

$$\frac{N}{\varphi_y A f_y} + \frac{\beta_{tx} M}{\varphi_b W_x f_y} \leq 1 \quad (1)$$

式中: N , M 分别为压杆轴力和最大弯矩; φ_y 为绕弱轴屈曲的压杆稳定系数; φ_b 为压杆纯弯时弯扭屈曲的稳定系数; A 为截面面积; f_y 为屈服强度; W_x 为受压纤维截面模量; β_{tx} 为弯扭屈曲的等效弯矩系数, 按式(2)计算。

$$\beta_{tx} = 0.65 + 0.35k \quad (2)$$

k 是压弯杆两端较小弯矩与较大弯矩之比, 以产生同向曲率时比值为正。本文对这个系数进行分析, 并且对是否有必要对式(1)修改进行分析。

1 纯弯时的公式

均匀受弯的压弯杆弯扭屈曲轴力 N -弯矩 M 关系为^[2]:

$$m_0^2 = (1 - n)(1 - \kappa n) \quad (3a)$$

$$M_{cr0} = i_0 \sqrt{N_{Ey} N_{E\omega}} \quad (3b)$$

其中 $n = \frac{N}{N_{Ey}}$

$$m_0 = \frac{M}{M_{cr0}}$$

$$N_{Ey} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2}$$

$$N_{E\omega} = \frac{1}{i_0^2} \left(GJ + \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} \right)$$

$$\kappa = \frac{N_{Ey}}{N_{E\omega}} = \frac{4i_0^2}{(1 + K_{J\omega})h^2}$$

$$K_{J\omega} = \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_\omega}$$

式中: M_{cr0} 为纯弯时的屈曲弯矩; i_0 为截面绕剪切中心的极回转半径; h 为上下翼缘中面的距离; E , G 分别为材料弹性模量和剪切模量; J 为自由扭转常数; I_ω 为翘曲惯性矩; L 为压杆长度。

式(3a)给出的轴力和弯矩相关关系是外凸的, 在 $N_{E\omega} \gg N_{Ey}$ 的情况下, 它给出上限曲线:

$$n + m_0^2 = 1 \quad (4)$$

$\kappa = 1$ 时, 给出下限直线:

$$n + m_0 = 1 \quad (5)$$

2 弯矩线性变化的压弯杆

弯矩线性变化时弯扭屈曲的轴力-弯矩相关曲线, 可采用能量法分析。在两端有支承的情况下, 对双轴对称截面下总势能公式进行分部积分后简化为^[2]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_L [EI_y u''^2 + EI_\omega \theta''^2 + (GJ - Ni_0^2) \theta'^2 - Nu'v^2 + 2Mu''\theta] dz \quad (6)$$

采用 Ritz 法求近似解, 设:

作者: 童根树, 教授, 主要从事钢结构稳定和抗震性能研究。

Email: tonggs@zju.edu.cn

收稿日期: 2025-02-11

$$u = C_1 \sin \frac{\pi z}{L} + C_2 \sin \frac{2\pi z}{L} + C_3 \sin \frac{3\pi z}{L} \quad (7a)$$

$$\theta = D_1 \sin \frac{\pi z}{L} + D_2 \sin \frac{2\pi z}{L} + D_3 \sin \frac{3\pi z}{L} \quad (7b)$$

式中: $C_i, D_i (i=1, 2, 3)$ 为待定系数。

将式(7)代入式(6), 积分后得到总势能, 此处具体步骤不介绍。引入如下的记号:

$$N_{E\omega i} = \frac{1}{i_0^2} \left(GJ + \frac{i^2 \pi^2 EI_\omega}{L^2} \right) \quad i = 2, 3 \quad (8)$$

$$\chi_2 = \frac{N_{E\omega}}{N_{E\omega 2}} \quad (9a)$$

$$\chi_3 = \frac{N_{E\omega}}{N_{E\omega 3}} \quad (9b)$$

最终可获得如下形式的代数方程:

$$a(m_0^2)^3 + b(m_0^2)^2 + cm_0^2 + 36d = 0 \quad (10)$$

其中

$$a = -\frac{(1+k)^2}{144} \left[\frac{1354 \times 16^2 (1-k)^2}{625 \times 81 \pi^4} - \frac{(1+k)^2}{4} \right] \chi_2 \chi_3$$

$$b = \frac{\chi_2}{9} \left[\frac{b_1(1-n)}{4} + \frac{b_2}{4} \left(1 - \frac{n}{4} \right) + b_3 \left(1 - \frac{n}{9} \right) \right]$$

$$c = c_1(1-n)(1-\kappa n) - c_2(1-0.25n)(1-\kappa n \chi_2) +$$

$$c_3(1-n/9)(1-\kappa n \chi_3)$$

$$d = (1-n) \left(1 - \frac{n}{4} \right) \left(1 - \frac{n}{9} \right) (1-\kappa n)(1-\chi_2 \kappa n)(1-\chi_3 \kappa n)$$

$$b_1 = \left[\frac{(1+k)^2}{4} - \frac{48^2(1-k)^2}{625 \pi^4} \right] \chi_2 (1-\kappa n) + \frac{256(1-k^2)^2}{81 \pi^4} \left(\frac{1}{\chi_2} - \kappa n \right) \chi_3 - \frac{16^4(1-k)^4}{625 \pi^8} (1-\kappa n \chi_3)$$

$$b_2 = \frac{64(1-k^2)^2}{81 \pi^4} \chi_2 (1-\kappa n) + \frac{(1+k)^4}{4} \left(\frac{1}{\chi_2} - \kappa n \right) \chi_3 - \frac{72^2(1-k^2)^2}{625 \pi^4} (1-\kappa n \chi_3)$$

$$b_3 = \frac{16^4(1-k)^4}{15^4 \pi^8} \chi_2 (1-\kappa n) + \frac{256(1-k^2)^2}{625 \pi^4} \cdot \left(\frac{\chi_3}{\chi_2} - \kappa n \chi_3 \right) + \left[\frac{(1+k)^2}{4} - \frac{256(1-k)^2}{81 \pi^4} \right] (1-\kappa n \chi_3)$$

$$c_1 = \frac{72^2(1-k)^2}{625 \pi^4} \frac{\chi_2}{9} \left(1 - \frac{n}{4} \right) (1-\kappa n \chi_2) - \frac{32^2(1-k)^2}{625 \pi^4} \frac{\chi_2}{4} \left(1 - \frac{n}{9} \right) (1-\kappa n \chi_2)$$

$$c_2 = \frac{(1+k)^2}{4} \left[\frac{\chi_2}{9} (1-n)(1-\kappa n) + \left(1 - \frac{n}{9} \right) (1-\kappa n \chi_2) \right]$$

$$c_3 = 4(1-n)(1-\kappa n \chi_2) - \left[\frac{(1+k)^2}{16} (1-n) + \frac{64(1-k)^2}{81 \pi^4} \left(1 - \frac{n}{4} \right) \right] \chi_2 (1-\kappa n)$$

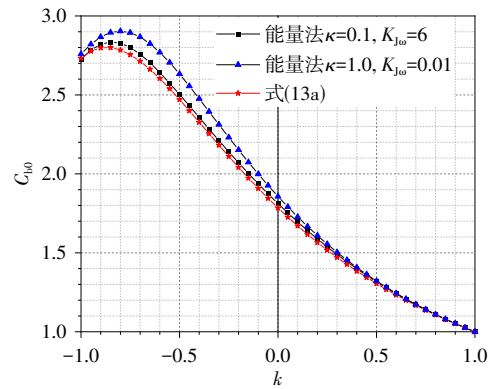
给定截面、长度和弯矩比, 从式(10)可以解出 m_0 , 等效弯矩系数是它的倒数。

3 仅弯矩作用时屈曲

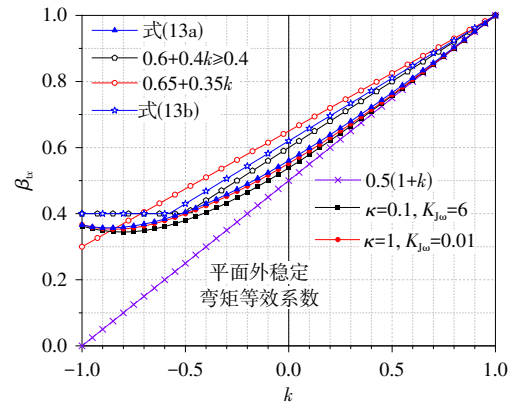
在式(10)中令 $n = 0$, 求解得到的临界弯矩表示成如下形式:

$$M_{cr} = C_{b0} M_{cr0} \quad (11)$$

式中: C_{b0} 为临界弯矩增大系数, 如图 1(a) 所示, C_{b0} 最大值发生在 $k = -0.8 \sim -0.85$ 之间。



(a) 临界增大系数



(b) 等效弯矩系数

图 1 临界弯矩增大系数和等效弯矩系数

Fig. 1 Critical moment amplification factors and equivalent moment coefficients

在 $\kappa = 0 \sim 1$, $K_{jw} = 0.01 \sim 7$ 范围内搜索并限制 $i_0/h = 0.37 \sim 0.55$, 该范围是实际上能遇到的工字形截面压杆的取值范围。

C_{b0} 的倒数是等效弯矩系数,有:

$$\beta_{tx} = \frac{1}{C_{b0}} \quad (12)$$

其物理意义是:将线性变化的弯矩等效成均布的弯矩 M_{eq} ,即 $M_{eq} = \beta_{tx} M_1$,两者临界弯矩相同。 β_{tx} 如图 1(b)所示。图 1 中还画出了式(2)和欧美钢结构设计标准中采用的式子 $0.6 + 0.4k \geq 0.4$ 以及式(13)相应的两条曲线。

$$\frac{1}{C_{b0}} = \beta_{tx} = \frac{1}{2} \left[(1+k)^{1.6} + 0.2(1-k)^{1.6} \right]^{0.625} \quad (13a)$$

$$\beta_{tx} = 0.62 + 0.38k \geq 0.4 \quad (13b)$$

可见, β_{tx} 的下限在 0.35~0.4 之间。式(13b)适用于箱形截面杆件。

4 压力-弯矩相关关系

求解式(10),得到轴力和弯矩相关关系,选两种截面,画出曲线如图 2 所示,图中 $m_b = M_1 / (C_{b0} M_{cr0})$ 。可见: $k < 0$ 时, k 值对相关关系影响大;截面形状和压杆长度也有较大的影响,长度大的曲线,外凸程度高,瘦高截面的曲线也高; $k = -1$ 时,式(10)中的系数 $a = 0$,此时式(10)会提供两个解,得到两条曲线,取较小值画出曲线。

图 2 的曲线显示,在弯矩线性变化的情况下,轴力-弯矩相关关系曲线的外凸程度比纯弯时的轴力-弯矩相关关系曲线的更大,设计时可以在等效弯矩系数中考虑轴力对相关曲线形状的影响。

图 2 的表示形式不便于拟合相关关系,故将临界弯矩仍然表示为式(3a)的形式:

$$m^2 = (1-n)(1-\kappa n) \quad (14)$$

其中 $m = \beta_{tx} m_0$

将 $m = \beta_{tx} m_0$ 代入式(14)得到:

$$\beta_{tx} = \sqrt{\frac{(1-n)(1-\kappa n)}{m_0}} \quad (15)$$

给定参数,从式(10)求得 m_0 ,代入式(15)算出等效弯矩系数,结果如图 3 所示。给定 n ,在搜寻的参数范围内 β_{tx} 曲线变化较小。图 3 显示 β_{tx} 受 κ 影响很小,所以图 4 只给出了 $\kappa = 0.4$ 的曲线。决定曲线形状的主要因素是 n 和 k 。 $k < 0$ 时, n 增加, β_{tx} 减小,对图 2 中的相关关系曲线影响很大。对 $k = -1$ 时的 β_{tx} 进行拟合,发现有:

$$\beta_{tx}|_{k=-1} = \beta_h = 0.366 \sqrt{\frac{1-n}{1-0.25n}} \quad (16)$$

以 β_h 为水平线,它与斜线 $\beta_{mid} = 0.5(1+k)$ 组合得到:

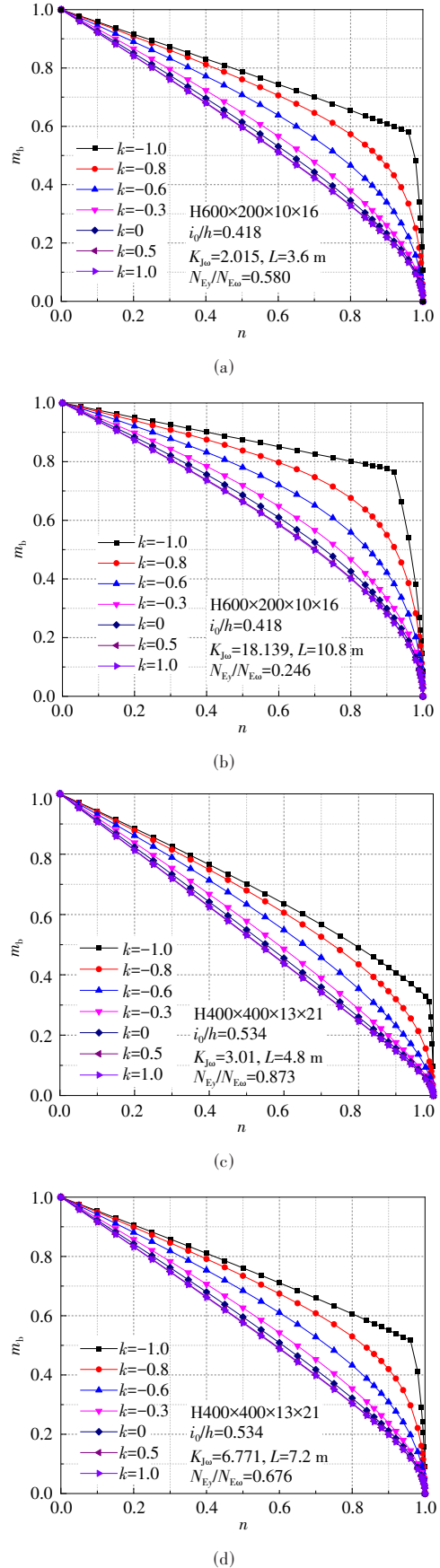
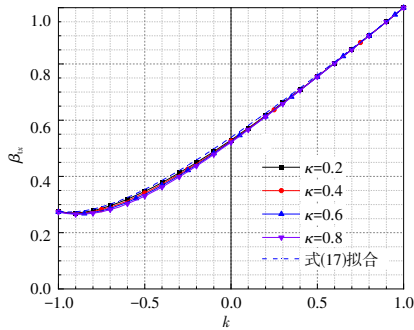


图 2 弯扭屈曲相关关系

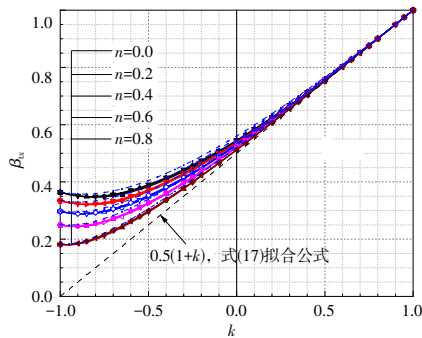
Fig. 2 Flexural-torsional buckling interaction relationship

$$\beta_{tx} = \frac{1}{2} \left[(1+k)^{1.6} + \frac{1}{5} \left(\frac{1-n}{1-0.25n} \right)^{0.8} (1-k)^{1.6} \right]^{0.625} \quad (17)$$

图3 参数 κ 对等效弯矩系数的影响($n=0.5$)Fig. 3 Effect of the parameter κ on the equivalent moment coefficient ($n=0.5$)

5 设计建议

式(1)是规范^[1]中的设计公式,采用无量纲,曲线是直线,即规范^[1]采用了下限曲线式(5),将线性式推广到线性变化的弯矩情况,得到:

(a) $n=0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$

$$\frac{N}{\varphi_y N_p} + \frac{\beta_{tx} M}{\varphi_b M_p} = 1 \quad (18)$$

其中 $n = \frac{N}{\varphi_y N_p}$

$$m_0 = \frac{M}{\varphi_b M_p}$$

$$\varphi_y = \frac{1}{1 + \lambda_y^2}$$

$$\varphi_b = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.4^4 + \lambda_b^4}} \leq 1.0$$

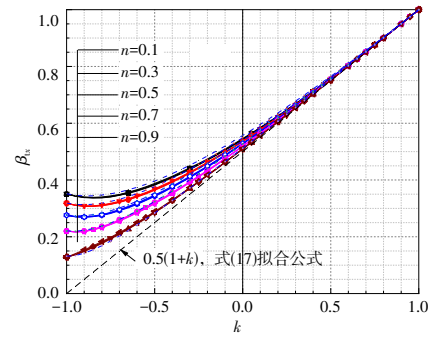
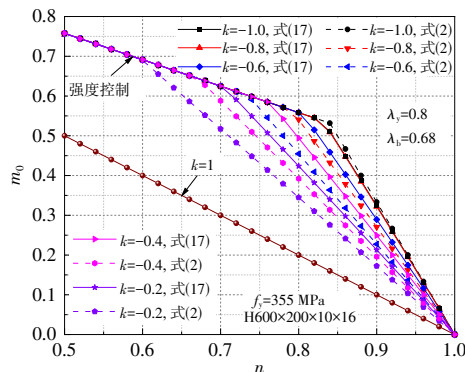
$$\lambda_y = \sqrt{N_p / N_{Ey}}$$

$$\lambda_b = \sqrt{M_p / M_{cr0}}$$

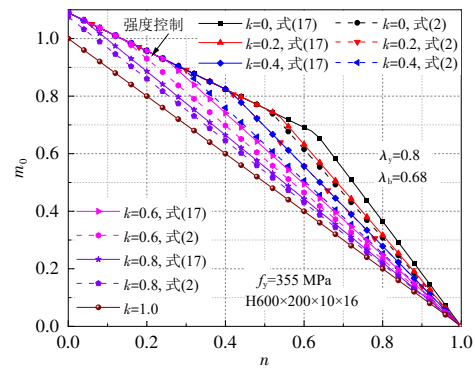
式中: N_p, M_p 分别为全截面屈服轴力和塑性弯矩。采用式(17)和式(2)计算的 β_{tx} 对比如图5所示。图中强度控制曲线计算式为:

$$m = \frac{1}{\varphi_b} (1 - \varphi_y n) \quad (19)$$

对 H600×200×10×16 和 H400×400×13×21 两种截面进行了计算,得到的无量纲相关曲线接近,因此图5只给出一种截面的结果。可见,在稳定控制的区域,采用式(17),曲线有所抬高。

(b) $n=0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ 图4 压弯杆的等效弯矩系数($\kappa=0.4$)Fig. 4 Equivalent moment coefficients of beam-columns ($\kappa=0.4$)

(a)



(b)

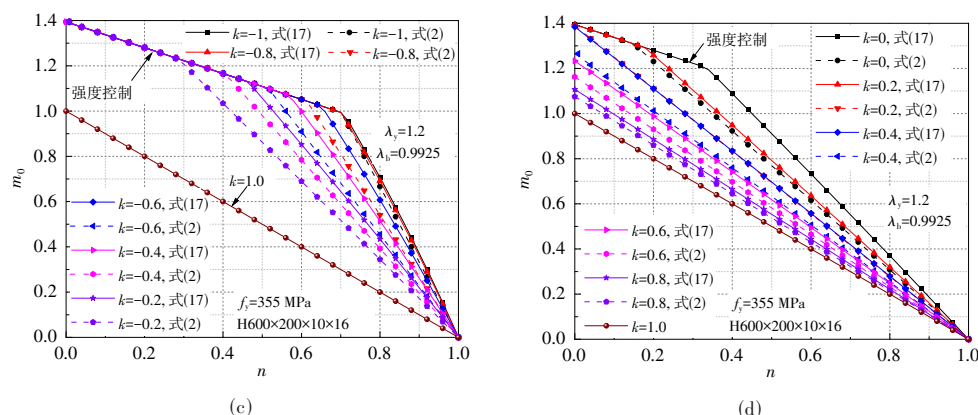


图5 等效弯矩系数新公式应用于标准中公式的比较

Fig. 5 Comparison of results obtained from the proposed equivalent moment coefficient (applied to the standard) with those from current specifications

6 结束语

本文对弯矩沿杆长线性变化的压弯构件的弯扭屈曲采用能量法进行分析,侧移和扭转角均取三项,求得的解接近精确。基于此求得了压力作用下的等效弯矩系数,提出了精度高、略偏保守的新公式,对新公式应用于钢结构设计标准中的结果和现行标准公式的结果进行了对比,在求得

控制的区域,按本文公式得到的抗弯承载力有所提高。

参考文献

- [1] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 钢结构设计标准:GB 50017—2017[S]. 北京:中国建筑工业出版社,2018.
- [2] 童根树. 钢结构的平面外稳定[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2013.

Equivalent Moment Coefficient for Flexural-Torsional Buckling of Beam-Columns Under Linearly Varying Bending Moments

Genshu Tong

(Institute of High Performance Structures, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

Abstract:

This paper analyzed the flexural-torsional buckling of beam-columns under linearly varying bending moments and axial forces. The Ritz method was adopted, in which both the lateral deflection and the twisting angle were represented by three terms, leading to results close to the exact solutions. The equivalent bending moment coefficient was derived, and new formulas with high accuracy and slight conservativeness were proposed. The results obtained using the proposed formulas in the standard design equations for the out-of-plane stability check of beam-columns were compared with those from current specifications. The results showed that the proposed formulas yielded a slightly higher flexural capacity when stability governed the design.

Keywords: beam-column; out-of-plane stability; equivalent moment coefficient; flexural-torsional buckling