

引用格式: 汪洪源, 武少冲, 郑循江, 等. 星点随机误差对星敏传感器精度影响的解析模型[J]. 飞控与探测, 2025, 8(5): 61-69.

Citation: WANG H Y, WU S C, ZHENG X J, et al. Analytical model for the influence of random errors in star points on the accuracy of star sensors [J]. Flight Control & Detection, 2025, 8(5): 61-69.

星点随机误差对星敏传感器精度影响的解析模型

汪洪源¹, 武少冲¹, 郑循江^{2,3}, 孙朔冬^{2,3},
叶志龙^{2,3}, 张徐玮^{2,3}, 姚 帅¹, 杨 振⁴

(1. 哈尔滨工业大学 空间光学工程研究中心 · 哈尔滨 · 150001;

2. 上海航天控制技术研究所 · 上海 · 201109;

3. 上海市空间智能控制技术重点实验室 · 上海 · 201109;

4. 哈尔滨工业大学 激光空间信息全国重点实验室 · 哈尔滨 · 150080)

摘要: 星敏传感器通过观测恒星进而解算载体的姿态信息, 其姿态精度决定了系统的导航精度。为了分析星点随机误差对星敏传感器精度的影响, 基于 QUEST 算法, 通过求解 Wahba 问题, 提出了星点随机误差对星敏传感器精度影响的解析模型。利用该模型分析了星点随机质心误差与星敏传感器精度之间的关系, 仿真结果表明星点相对于探测器原点的均匀性和平均距离影响了星敏传感器的姿态精度, 而非星敏传感器的视场。解析模型揭示了星点随机误差、星点的位置和姿态精度之间的关系。所提解析模型的三轴姿态解算准确率为 (98.1%, 93.3%, 96.1%), 而经验模型的三轴姿态解算准确率为 (58.8%, 61.5%, 26.9%)。星敏传感器的精度分析对星敏传感器光学系统设计、标定和天文导航具有重要的指导意义。

关键词: 星点位置; 随机误差; 姿态精度; 星敏传感器; QUEST 算法

中图分类号: V11

文献标志码: A

文章编号: 2096-5974(2025)05-0061-09

DOI: 10.20249/j.cnki.2096-5974.2025.05.007

Analytical Model for the Influence of Random Errors in Star Points on the Accuracy of Star Sensors

WANG Hongyuan¹, WU Shaochong¹, ZHENG Xunjiang^{2,3}, SUN Shuodong^{2,3},
YE Zhilong^{2,3}, ZHANG Xuwei^{2,3}, YAO Shuai¹, YANG Zhen¹

(1. Research Center for Space Optical Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001;

2. Shanghai Aerospace Control Technology Institute, Shanghai 201109;

3. Shanghai Key Laboratory of Aerospace Intelligent Control Technology, Shanghai 201109;

4. National Key Laboratory of Laser Space Information, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080)

Abstract: Star sensor is a high-precision attitude measurement device, and its attitude measurement accuracy plays a decisive role in navigation. In order to analyze the impact of star points' random errors on

基金项目: 科技部国家重点研发计划专项项目 (2019YFA0706003); 中国航天科技集团有限公司第八研究院产学研合作基金资助项目 (SAST2023-058); 航空科学基金 (2024Z073077006)

作者简介: 汪洪源, 男, 博士, 教授, 博士生导师。

the accuracy of star sensors, based on the QUEST algorithm, an analytical model for the influence of star points' random errors on the star sensor accuracy is proposed by solving the Wahba problem. The relationship between the random centroid error of star points and the accuracy of star sensors is analyzed using this model. The simulation results show that the uniformity and average distance of star points relative to the detector origin affect the attitude accuracy of star sensors, rather than the field of view. The analytical model reveals the relationship between the star points' random error, the star points position and attitude accuracy. The three-axis attitude solution accuracy of the proposed model is (98.1%, 93.3%, 96.1%), while that of the empirical model is (58.8%, 61.5%, 26.9%). The accuracy analysis of star sensors has important guiding significance for the design, calibration, and astronomical navigation of star sensor optical systems.

Keywords: star point position; random error; attitude accuracy; star sensor; QUEST algorithm

0 引言

星传感器是一种高精度的姿态测量设备,通过观测恒星解算载体的姿态,常用于卫星导航。近年来,星传感器导航技术正由单纯的空间应用逐渐向更广泛的领域发展,被尝试应用于诸如飞机、气球和船只等平台。基于星传感器的星光制导技术可以提升导航系统的精度和可靠性^[1]。

测姿精度是星传感器的一项重要指标,而探测器的暗电子噪声、天空背景噪声以及星点提取算法引入的星点质心随机误差限制了星传感器的测姿精度^[2]。星点提取算法根据观测星点的能量分布提取观测星的位置,而探测器的暗电子噪声和天空背景噪声会影响探测星点的能量分布。暗电子噪声和天空背景噪声具有高斯分布的特点^[3],因此星点随机位置误差也呈现高斯分布的特征。

对于单视场的星传感器,地面和在轨实验表明星传感器 z 轴的姿态精度受视场的限制, z 轴的姿态误差比 x 轴和 y 轴的误差大, z 轴姿态误差标准差是 x 轴和 y 轴姿态误差标准差的6倍及以上^[4]。为了提升星传感器的 z 轴姿态精度,研究人员设计了双视场和三视场星传感器^[5-7],通过扩大星传感器的视场以提高星传感器 z 轴的姿态精度。Liebe^[8]给出了星传感器精度的经验模型,该模型表明星传感器的精度是由观测星的数量、质心误差和星传感器的视场决定的。该经验模型虽然与实验结果基本吻合,但是并未给出推理过程。Fialho等^[9]仿真分析了星传感器姿态精度、光学系统视场和观测星分布的关系,然而也未给出星传感器的三轴测姿精度与观测星分布的解析关系。Ramachandran^[10]分析了星传感器精度与观测星分

布的关系,从几何意义方面解释了经验模型的合理性,给出的结论与经验模型一致。随着星光制导技术由空间领域向更广泛的近地面空间领域的应用发展,全天时星传感器成为研发的热点,由于白天天空背景较强,全天时星传感器只能探测到少量的恒星。当观测星较多时^[11],Liebe的经验模型与测量结果较为吻合,然而当星传感器在恶劣条件下只能观测到几个星点时,Liebe的经验模型将会不准确。

综上,现有的星传感器精度分析模型并未给出星点随机误差与星传感器精度的解析推导过程,也没有揭示观测星点、光学系统参数、星点随机误差和星传感器精度的关系,因此本文提出了一种星点随机误差对星传感器精度影响的解析模型。首先,分析星传感器的测量模型;其次,结合QUEST算法求解Wahba问题,提出一种星点随机误差对星传感器精度影响的解析模型,分析随机质心误差对星传感器姿态的影响;最后,进行仿真试验分析。

1 星传感器测量模型

如图1所示,星传感器是一种高精度姿态测量设备,探测器平面的中心为 O , (X_i, Y_i) 为观测星在探测器平面上的理想位置。观测到的星点对应的恒星观测矢量为 w'_i ^[12],可以表示如下

$$w'_i = \frac{1}{\sqrt{X_i'^2 + Y_i'^2 + f^2}} \begin{bmatrix} -X_i' \\ -Y_i' \\ f \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中, (X_i', Y_i') 为观测到的恒星在探测器平面上的实际位置, f 为星传感器的焦距。

惯性坐标系中的导航恒星可以用赤经和赤纬

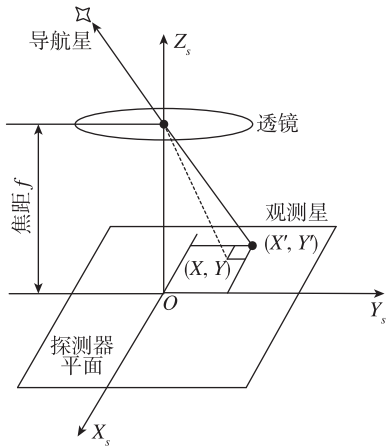


图 1 星敏传感器成像模型

Fig. 1 Star sensor imaging model

表示为 (α_i, δ_i) , 惯性参考系中的恒星矢量 v_i 可以表示为

$$v_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i \cos\delta_i \\ \sin\alpha_i \cos\delta_i \\ \sin\delta_i \end{bmatrix} \quad (2)$$

w'_i 和 v_i 之间的关系可以表示如下

$$w'_i = \hat{R}_i^s v_i \quad (3)$$

式中, \hat{R}_i^s 是星敏传感器相对于惯性坐标系的姿态矩阵。

当导航恒星的数量超过两颗时, QUEST 算法用于求解式 (3) 以获得最优姿态矩阵^[13]。QUEST 算法是解决 Wahba 问题的一种方法^[14], 通过求解最小化损失函数得到正交矩阵 \hat{R}_i^s , 如式 (4) 所示。

$$L(\hat{R}_i^s) = \sum_i |w'_i - \hat{R}_i^s v_i|^2 \quad (4)$$

探测器噪声、天空背景噪声以及星点提取算法的误差会影响观测星的位置和矢量信息 w'_i , 因此由式(4) 求解得到的星敏传感器矩阵 \hat{R}_i^s 将存在误差。

2 星敏传感器精度解析模型

2.1 姿态精度分析方法

理想条件下的星敏传感器姿态矩阵为 R_i^s , 而当观测星的星点位置存在误差时, 星敏传感器的姿态矩阵为 \hat{R}_i^s 。星敏传感器的姿态误差矩阵 R_Δ 定义为

$$R_\Delta = \hat{R}_i^s (R_i^s)^{-1} \quad (5)$$

因为矩阵 R_i^s 和 \hat{R}_i^s 是基于相同的导航星矢量计算得到的, 结合式 (3), 将式 (5) 变换可以得到

$$w'_i = R_\Delta w_i \quad (6)$$

式中, w_i 是观测星的理想矢量, w'_i 是包含误差的

观测星实际矢量。

观测星的矢量 w_i 和 w'_i 分别表示如下

$$w_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + f^2}} \begin{pmatrix} -X_i \\ -Y_i \\ f \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} w'_i &= \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = w_i + \Delta w_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{(X_i + dX_i)^2 + (Y_i + dY_i)^2 + f^2}} \begin{bmatrix} -(X_i + dX_i) \\ -(Y_i + dY_i) \\ f \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $\Delta w_i = (dx_i, dy_i, dz_i)^T$ 是观测星的矢量误差, (dX_i, dY_i) 是观测星的位置误差。 $dX_i = X'_i - X_i$ 和 $dY_i = Y'_i - Y_i$ 是探测器平面上的恒星位置误差。

从式 (7) 中可以得到 3 个函数, 进而推得观测星的矢量误差 Δw_i 和位置误差 (dX_i, dY_i) 的关系, 如式 (9) 所示

$$\begin{cases} h^1(X, Y, f) = \frac{-X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + f^2}} \\ h^2(X, Y, f) = \frac{-Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + f^2}} \\ h^3(X, Y, f) = \frac{f}{\sqrt{X^2 + Y^2 + f^2}} \end{cases} \quad (9)$$

函数 $h^1(X, Y, f)$ 用作获取恒星矢量误差 Δw_i 和恒星位置误差 (dX_i, dY_i) 关系的示例, 该函数的偏导数为 h^1_x 和 h^1_y , 观测星矢量误差 Δw_i 的分量如式 (10) 所示。在式 (10) 中, 第二行的后两项比第一项小得多, 因此约等号成立。

$$\begin{aligned} dx &= h^1_x dX + h^1_y dY \\ &= -\frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + f^2}} dX + \frac{X^2}{(X^2 + Y^2 + f^2)^{\frac{3}{2}}} dX + \\ &\quad \frac{XY}{(X^2 + Y^2 + f^2)^{\frac{3}{2}}} dY \\ &\approx -\frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + f^2}} dX \\ &\approx \frac{-dX}{f} \end{aligned} \quad (10)$$

星敏传感器的视场通常小于 20° , 观测星的位置 (X_i, Y_i) 和光学系统焦距 f 的关系如式 (11) 所示。

$$\max(X^2 + Y^2) = 0.03f^2 \quad (11)$$

进一步, 可以推得观测星矢量误差 Δw_i 和位置

误差(dX_i , dY_i)之间的关系,如式(12)所示。

$$\Delta \mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \\ dz_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -dX_i/f \\ -dY_i/f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

进一步,结合式(6),可以得到观测星的矢量误差 $\Delta \mathbf{w}_i$ 和星敏感器的三轴姿态误差(α , β , γ)之间的关系。如式(13)所示,QUEST算法通过使损失函数最小,以得到星敏感器的误差矩阵 \mathbf{R}_Δ 。

$$L(\mathbf{R}_\Delta) = \sum_i |\mathbf{w}'_i - \mathbf{R}_\Delta \mathbf{w}_i|^2 \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + dx_1 & x_2 + dx_2 & \cdots & x_n + dx_n \\ y_1 + dy_1 & y_2 + dy_2 & \cdots & y_n + dy_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + \gamma y_1 - \beta z_1 & x_2 + \gamma y_2 - \beta z_2 & \cdots & x_n + \gamma y_n - \beta z_n \\ -\gamma x_1 + y_1 + \alpha z_1 & -\gamma x_2 + y_2 + \alpha z_2 & \cdots & -\gamma x_n + y_n + \alpha z_n \\ \beta x_1 - \alpha y_1 + z_1 & \beta x_2 - \alpha y_2 + z_2 & \cdots & \beta x_n - \alpha y_n + z_n \end{bmatrix}$$

式中, n 是观测到的恒星数量。

由式(11)可知,当星敏感器视场小于 20° 时, $X^2 + Y^2$ 远远小于 f^2 。在式(8)中,对于不同的观测星, z_i 都近似为1,而 x_i 和 y_i 都远远小于1。在式(15)中, βx_i 和 αy_i 远远小于 βz_i 和 αz_i ,因此忽略 βx_i 和 αy_i 的影响,则式(15)的解为

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta, \gamma] &= \operatorname{argmin}_{\alpha, \beta, \gamma} \{h(\alpha, \beta, \gamma)\} \\ &= \operatorname{argmin}_{\alpha, \beta, \gamma} \left\{ \sum_{i=1}^n \left\{ (dx_i - \gamma y_i + \beta z_i)^2 + (dy_i + \gamma x_i - \alpha z_i)^2 \right\} \right\} \\ h(\alpha, \beta, \gamma) &= 2 \sum_{i=1}^n \left\{ (dx_i - \gamma y_i + \beta z_i)^2 + (dy_i + \gamma x_i - \alpha z_i)^2 \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

式(16)表明,姿态误差(α , β , γ)是使函数 $h(\alpha, \beta, \gamma)$ 获取最小值时的最优解。基于式(16),可以推出 $h(\alpha, \beta, \gamma)$ 的偏导数,姿态误差(α , β , γ)是当3个偏导数等于零时的解,通过整理数据可以得到姿态误差的解如式(17)所示。式(17)的推导过程参考式(附录-1)~式(附录-6)。

$$\begin{cases} \alpha = d\bar{y} + \gamma \bar{x} \\ \beta = -d\bar{x} + \gamma \bar{y} \\ \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \end{cases} \quad (17)$$

式中, γ_1 和 γ_2 的值如式(18)所示。如式(19)~式(21)所示, $d\bar{x}$ 和 $d\bar{y}$ 是 dx 和 dy 的平均值, \bar{x} 和

由于星敏感器是高精度的姿态传感器,姿态误差矩阵 \mathbf{R}_Δ 也是一个很小的量,可以表示为

$$\mathbf{R}_\Delta = \mathbf{R}_x(\alpha) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中, \mathbf{R}_x , \mathbf{R}_y 和 \mathbf{R}_z 分别是围绕 x , y 和 z 轴的旋转矩阵^[15]。 α 是星敏感器的 x 轴姿态误差, β 是星敏感器的 y 轴姿态误差, γ 是星敏感器的 z 轴姿态误差。

将式(6)展开,得到

\bar{y} 是 x 和 y 的平均值, A 和 B 是辅助参数。

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{A}{B} \\ \gamma_2 = \frac{\beta \bar{y} + \alpha \bar{x}}{B} \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} d\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n dx_i \\ d\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n dy_i \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i dx_i - x_i dy_i) \\ B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i^2) \end{cases} \quad (21)$$

x_i 和 y_i 可以按式(22)进行近似计算。

$$\begin{cases} x_i \approx \frac{-X_i}{f} \\ y_i \approx \frac{-Y_i}{f} \end{cases} \quad (22)$$

星敏感器的姿态误差与观测星的位置误差有关,姿态误差(α , β , γ)的解如式(23)所示。式(23)的推导过程参考式(附录-7)。

$$\begin{cases} \alpha = \frac{A\bar{x} + B\bar{y} - \bar{y}^2\bar{d}\bar{y} - \bar{x}\bar{y}\bar{d}\bar{x}}{B - \bar{x}^2 - \bar{y}^2} \\ \beta = \frac{A\bar{y} - B\bar{d}\bar{x} + \bar{x}^2\bar{d}\bar{x} + \bar{y}\bar{x}\bar{d}\bar{y}}{B - \bar{x}^2 - \bar{y}^2} \\ \gamma = \frac{A - \bar{y}\bar{d}\bar{x} + \bar{x}\bar{d}\bar{y}}{B - \bar{x}^2 - \bar{y}^2} \end{cases} \quad (23)$$

2.2 姿态精度解析模型

由于天空背景噪声、星点提取误差、光子噪声、暗电流噪声、放大器和探测器噪声的存在, 观测星点存在随机质心误差, 恒星位置的随机误差通常在 $0.05 \sim 0.1$ 像素的范围内^[12]。由于星点存在随机质心误差 (dX_i, dY_i), 探测器上的理想恒星的星点位置 (X_i, Y_i) 对应的实际位置 (X'_i, Y'_i) 为

$$\begin{bmatrix} X'_i \\ Y'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dX_i \\ dY_i \end{bmatrix} \quad (24)$$

式中, (dX_i, dY_i) 是相互独立的高斯分布噪声^[12]。

由式 (12) 可知, 观测星矢量误差 (dx_i, dy_i) = (dX_i, dY_i)/ f , 因此 (dx_i, dy_i) 也是互相独立的高斯分布噪声, 假设 (dx_i, dy_i) 服从的分布为 $dx_i \sim N(0, \sigma^2)$ 和 $dy_i \sim N(0, \sigma^2)$ 。当星敏感器的姿态固定时, 式 (23) 中的系数 A, B 是固定值。根据高斯分布的运算规律, 结合式 (24) 和式 (23), 可以得到星敏感器的三轴姿态误差标准差, 即星敏感器三轴姿态精度, 如式 (25) 所示。式 (25) 的推导过程参考式 (附录-7) ~ 式 (附录-12)。

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{B - \bar{y}^2}}{\sqrt{B - \bar{x}^2 - \bar{y}^2}} \\ \sigma_\beta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{B - \bar{x}^2}}{\sqrt{B - \bar{x}^2 - \bar{y}^2}} \\ \sigma_\gamma = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{B - \bar{x}^2 - \bar{y}^2}} \end{cases} \quad (25)$$

$$\sqrt{B} \approx \bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \quad (26)$$

式中: $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ 和 σ_γ 是 x, y 和 z 轴姿态误差的标准差; $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ 和 σ_γ 分别代表 x, y 和 z 轴的姿态精度。

参数 B 表示星点与探测器原点的平均距离, 根据式 (25) 和式 (26), 可以得出以下推论。

推论 1: 当观测到的星点数量相同且星点分布均匀时, \bar{x} 和 \bar{y} 接近 0。此时, z 轴的精度 σ_γ 将与

星点距原点的平均距离 \bar{r} 成反比。

推论 2: 假设观测到的星点数量不变, 且星点距原点的平均距离 \bar{r} 不变。如果星点分布改变, 那么 \bar{x} 和 \bar{y} 值将会改变, 此时, x, y 和 z 轴的精度将随着星点的分布而变化。

这两个推论与经验模型^[8] 不完全一致, 经验模型认为星敏感器的三轴精度与星点无关, 而只与星点个数以及光学系统参数有关。

在式 (26) 中, \bar{x} 和 \bar{y} 表示观测星点相对于探测器原点的均匀性, \bar{x} 和 \bar{y} 越大, 星点的均匀性越差。当星点均匀分布时, \bar{x} 和 \bar{y} 都接近 0, 三轴姿态精度如式 (27) 所示。在式 (27) 中, 当星点数量足够多且分布均匀时, $0.382 5F_{ov}$ 可以表示星点的平均距离, 此时便对应经验模型^[8]。

$$\begin{cases} \sigma_\alpha \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \sigma_\beta \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \sigma_\gamma \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{B}} \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{0.382 5F_{ov}} \end{cases} \quad (27)$$

式中, F_{ov} 为星敏感器的全视场角。

式 (27) 为经验模型, 其认为星敏感器的精度由单个星点精度、探测星点个数以及视场决定。经验模型表明星敏感器视场越大, z 轴的姿态精度越高, 该结论在很多实验^[4] 和仿真中都得到了验证。但是从式 (25) 到式 (27) 的推导过程可知, 当星点较多时, 随着视场的增大, 星点离探测器原点的平均距离也增大, 这是大视场能够提升星敏感器 z 轴精度的根本原因。如果视场较大, 但是观测的星较少, 且分布集中在探测器原点附近, 则 z 轴的精度也不高。很多实验和仿真已经验证了在星点较多时的视场与星敏感器 z 轴精度的关系, 本文专注于揭示星点分布对星敏感器精度的影响, 其具有更广泛的意义。

3 仿真实验及结果分析

3.1 仿真参数设置

星敏感器的仿真参数如表 1 所示, 星点质心随机误差的标准差设置为 $2.8''$, 对应 0.089 个像素。仿真时, 星敏感器的姿态固定, 采样频率为 5 Hz , 在 3 min 内采集到 $1\,000$ 帧恒星图。模拟的星图如图 2 所示, 其中白色星号代表观测到的恒星, 总共有 25 颗被观测到的恒星。

表 1 星传感器的参数

Tab. 1 Parameters of star sensors

参数	数值
视场/ (°)	18×18
像素数	2 048×2 048
像素大小/μm	7.4×7.4
焦距/mm	48
星点随机误差/ (")	2.8

为了验证推论 1 和推论 2, 假设星传感器在某些情况下只观测到 3 颗恒星, 选择 3 组恒星分别求解姿态, 如图 2 所示。红色三角形包含 3 颗观测到的恒星 (简称 Star team I), 其中星点分布均匀, 星点距原点的平均距离较大; 绿色三角形包含 3 颗观测到的恒星 (简称 Star team II), 其中星点分布均匀, 距离原点的平均距离很小; 黄色三角形包含 3 颗观测到的恒星 (简称 Star team III), 其中星点分布不均, 距离原点的平均距离较大。

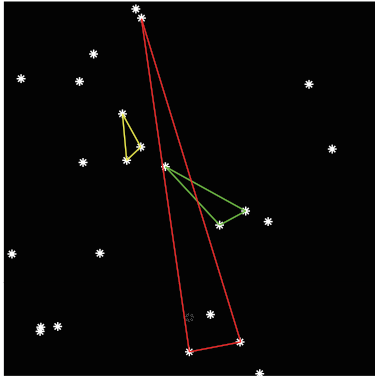


图 2 仿真星图和所用星组

Fig. 2 Simulated star map and star teams

3.2 评价参数

用以下参数评估星传感器精度解析模型的准确性, 并且将其与经验模型进行比较。

$$\begin{cases} PR_x = 1 - \left| \frac{\bar{\sigma}_{\alpha, Model} - \bar{\sigma}_{\alpha, Sim}}{\bar{\sigma}_{\alpha, Model}} \right| \\ PR_y = 1 - \left| \frac{\bar{\sigma}_{\beta, Model} - \bar{\sigma}_{\beta, Sim}}{\bar{\sigma}_{\beta, Model}} \right| \\ PR_z = 1 - \left| \frac{\bar{\sigma}_{\gamma, Model} - \bar{\sigma}_{\gamma, Sim}}{\bar{\sigma}_{\gamma, Model}} \right| \end{cases} \quad (28)$$

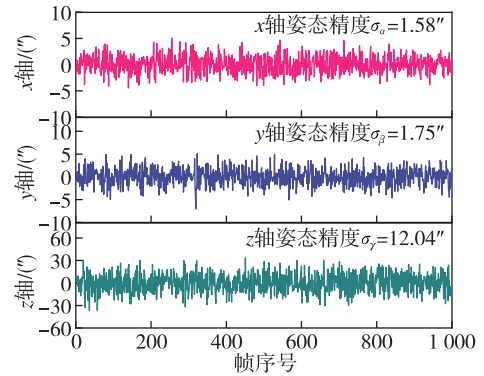
式中: $\bar{\sigma}_{\alpha, Model}$, $\bar{\sigma}_{\beta, Model}$ 和 $\bar{\sigma}_{\gamma, Model}$ 表示通过解析模

型计算的三轴姿态误差标准差平均值; $\bar{\sigma}_{\alpha, Sim}$, $\bar{\sigma}_{\beta, Sim}$ 和 $\bar{\sigma}_{\gamma, Sim}$ 为仿真得到的三轴姿态误差标准差平均值。

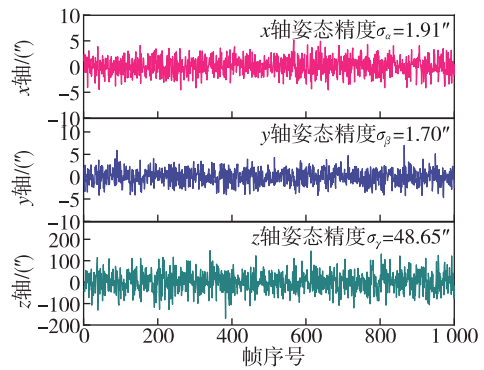
3.3 结果分析

在仿真过程中, 星传感器的真实姿态是已知的, 因此可以计算出星传感器的姿态误差。共仿真了 1 000 帧星图, 不同恒星组获得的姿态误差和姿态精度如图 3 所示。Star team I 解算的三轴姿态精度为: 1.58", 1.75", 12.04", 而 Star team III 解算的三轴姿态精度为: 4.77", 4.45", 94.96", 这表明星传感器的姿态精度不仅与解算的星点数、星传感器参数有关, 还与星点在探测器上的分布有关。

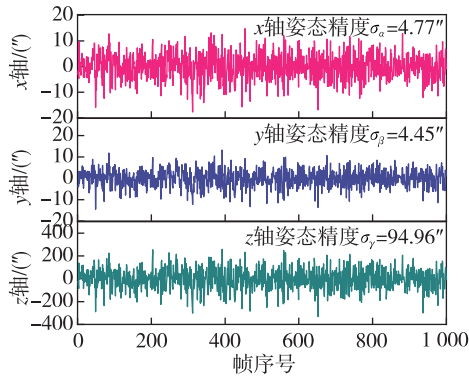
基于式 (7) 和星传感器的焦距、星点位置, 计算观测星矢量 $[x_i, y_i, z_i]$, 并统计星点分布信息, 不同恒星组的星点分布信息如表 2 所示。将星点分布信息代入式 (25), 计算出的星传感器精度如表 3 所示。



(a) Star team I 的姿态误差



(b) Star team II 的姿态误差



(c) Star team III 的姿态误差

图 3 不同星组的姿态误差以及精度

Fig. 3 Attitude errors and accuracy of different star groups

表 2 不同星组的星点相对探测器中心的分布特征

Tab. 2 Distribution characteristics of star points in different star groups relative to the detector center

星组	径向距离 \bar{r}	x 轴方向距离 \bar{x}	y 轴方向距离 \bar{y}
Star team I	0.137 8	0.001 8	-0.021 9
Star team II	0.038 7	-0.014 7	-0.009 3
Star team III	0.068 5	0.051 2	0.040 8

表 3 所提模型计算的星敏感器姿态精度

Tab. 3 The attitude accuracy of the star sensor calculated by the proposed model

星组	仿真的星敏感器 姿态精度/ (")			计算的星敏感器 姿态精度/ (")		
	x 轴	y 轴	z 轴	x 轴	y 轴	z 轴
Star team I	1.58	1.75	12.04	1.62	1.62	12.21
Star team II	1.91	1.70	48.65	1.75	1.68	45.59
Star team III	4.77	4.45	94.96	4.76	4.07	91.82

根据图 3、表 2 和表 3 的统计结果, Star team I 和 Star team II 的星点分布均匀, 因此在这两种情况下, x 轴和 y 轴的精度相等。但 Star team II 的星点离中心的距离较近, 因此 z 轴的精度较低, 该仿真结果与推论 1 一致。

根据图 3、表 2 和表 3 的统计结果, Star team III 的星点离中心的距离较远, 但星点分布不均匀, 因此 x, y 和 z 轴的精度仍然很低, 该仿真结果与推论 2 一致。

经验模型^[8]表明, 无论星点如何分布, 三轴姿态精度由星点的误差、星点个数和星敏感器的视场决定, 三轴姿态精度都应该是固定值 (1.62",

1.62", 13.48"), 经验模型的结果与仿真的结果不一致。在仿真中, 所提星敏感器精度影响的解析模型的准确率为 98.1%, 93.3%, 96.1%, 而经验模型的准确率则为 58.8%, 61.5%, 26.0%, 解析模型考虑了星点分布对三轴姿态精度的影响, 因此其更准确。

Star team I 星组可以假设认为是大视场星敏感器观测到的 3 颗星, 而 Star team II 星组可以假设认为是小视场星敏感器观测到的 3 颗星。Star team I 和 Star team II 的 x, y 轴精度相当, 而 Star team I 的 z 轴精度要比 Star team II 的 z 轴精度高, 这个结论与经验模型式 (27) 一致, 这证明本文所提的解析模型解释了经验模型的由来, 并扩大了经验模型的范围。与经验模型相比, 所提的解析模型能够更好地描述星敏感器的精度, 揭示星点误差和分布对星敏感器误差的影响机理。

4 结论

本文分析了星点随机误差对星敏感器姿态精度的影响, 提出了一种星点随机误差对星敏感器精度影响的解析模型, 一方面为传统经验模型提供了理论依据, 另一方面更深层次揭示了星点误差、星点位置和姿态精度之间的关系。本文只分析了随机误差对星敏感器姿态精度的影响, 后续将采用本文方法进一步分析星敏感器光学系统误差对星敏感器的影响。由于多视场星敏感器不共用一个探测器, 需要依据各视场星敏感器的安装关系转换到一个视场中进行姿态解算, 而现有多视场星敏感器种类繁多、系统结构多样, 因此本文只对单视场星敏感器进行了姿态精度分析。后续将基于特定的多视场星敏感器, 进一步展开多视场星敏感器的精度分析。

参考文献 (References)

- [1] 勾万祥, 佟帅, 贾靖玉, 等. 全天时星敏感器光学响应波段优化设计及试验验证[J]. 红外与激光工程, 2023, 52(11): 245-255.
GOU W X, TONG S, JIA J Y, et al. Optimization design and experimental verification of optical response band for all day star sensors [J]. Infrared and Laser Engineering, 2023, 52(11): 245-255 (in Chinese).
- [2] 张凯胜, 苏秀琴, 叶志龙. 大相对孔径全天时星敏感器光学系统[J]. 光子学报, 2022, 51(11): 282-292.
ZHANG K S, SU X Q, YE Z L. Large relative aper-

- ture optical system design for all day star sensor [J]. Acta Photonica Sinica, 2022, 51(11): 282-292 (in Chinese).
- [3] 格雷 D F. 恒星光球的观测和分析[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
GRAY D F. Observation and analysis of stellar photosphere [M]. Beijing: Science Press, 1981(in Chinese).
- [4] SCHMIDT U, ELSTNER C, MICHEL K. ASTRO 15 star tracker flight experience and further improvements towards the ASTRO APS star tracker [C]// AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit. Hawaii (Honolulu): IEEE, 2008: 6649.
- [5] 武少冲. 短波红外三视场空基星敏感器定位定向应用研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2020.
WU S C. Research on the application of short-wave infrared three field airborne star sensor for positioning and orientation [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2020 (in Chinese).
- [6] WU L, XU Q, WANG H, et al. Guide star selection for the three-FOV daytime star sensor[J]. Sensors, 2019, 19(6): 1457.
- [7] LI B H, SUN Q, ZHANG T S. A star pattern recognition algorithm for the double-FOV star sensor[J]. IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, 2015, 30(8): 24-31.
- [8] LIEBE C C. Accuracy performance of star trackers-a tutorial[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2002, 38(2): 587-599.
- [9] FIALHO M A A, MORTARI D. Theoretical limits of star sensor accuracy[J]. Sensors, 2019, 19(24): 5355.
- [10] RAMACHANDRAN M P. Analytical derivation of star sensor accuracies due to centroid error [J]. Sādhanā, 2021, 46(4): 1-5.
- [11] WANG W, WEI X, LI J, et al. Guide star catalog generation for short-wave infrared (SWIR) all-time star sensor [J]. Review of Scientific Instruments, 2018, 89(7): 1-3.
- [12] SUN J, LI G, WEN D, et al. A sub-pixel centroid algorithm for star image based on Gaussian distribution[J]. Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, 2011, 53(182), 307-310.
- [13] SHUSTER M D. A suboptimal algorithm for attitude determination from multiple star cameras[J]. Advances in the Astronautical Sciences, 2000, 105: 383-393.
- [14] WAHBA G. A least square estimation of spacecraft attitude[J]. SIAM Review, 1965, 7(3): 409-411.
- [15] WANG H, WU S, YE Z, et al. Research on joint calibration and compensation of the inclinometer installation and instrument errors in the celestial positioning system [J]. Journal of Field Robotics, 2022, 39(7): 1151-1161.

附录:

式(16)中函数 $h(\alpha, \beta, \gamma)$ 对于 α 的偏导数为

$$h_{\alpha}(\alpha, \beta, \gamma) = 2 \sum_{i=1}^n [z_i^2 \alpha - (dy_i + \gamma x_i)] \quad (\text{附录-1})$$

由式(11)可知, 当星敏感器视场小于 20° 时, $X^2 + Y^2$ 远远小于 f^2 。在式(8)中, 对于不同的观测星, z_i 都近似为 1, 以此对式(附录-1)进一步简化可得

$$h_{\alpha}(\alpha, \beta, \gamma) \approx 2 \sum_{i=1}^n [\alpha - (dy_i + \gamma x_i)]$$

$$\begin{aligned} &= 2(n\alpha - \sum_{i=1}^n dy_i - \gamma \sum_{i=1}^n x_i) \\ &= 2n(\alpha - d\bar{y} - \gamma \bar{x}) \end{aligned} \quad (\text{附录-2})$$

当偏导数 $h_{\alpha}(\alpha, \beta, \gamma)$ 等于 0 时, 对应得到姿态误差角 α 的解

$$\alpha = d\bar{y} + \bar{x} \quad (\text{附录-3})$$

同理可得 $h(\alpha, \beta, \gamma)$ 对于 β 的偏导数为

$$\begin{aligned} h_{\beta}(\alpha, \beta, \gamma) &= 2 \sum_{i=1}^n [\beta - (dx_i - \gamma y_i)] \\ &= 2n(\beta - d\bar{x} + \gamma \bar{y}) \end{aligned} \quad (\text{附录-4})$$

同理可得 $h(\alpha, \beta, \gamma)$ 对于 γ 的偏导数为

$$\begin{aligned}
h_\gamma(\alpha, \beta, \gamma) &= 2 \sum_{i=1}^n [y_i^2 \gamma - y_i(dx_i + \beta z_i)] + 2 \sum_{i=1}^n [x_i^2 \gamma + x_i(dy_i - \alpha z_i)] \\
&\approx 2 \sum_{i=1}^n [(x_i^2 + y_i^2) \gamma - (y_i dx_i - x_i dy_i + y_i \beta + x_i \alpha)] \\
&= 2 \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) \gamma - 2 \sum_{i=1}^n (y_i dx_i - x_i dy_i) - 2 \sum_{i=1}^n (y_i \beta + x_i \alpha) \\
&= 2n(B\gamma - A - (\bar{\beta y} + \bar{\alpha x}))
\end{aligned} \tag{附录-5}$$

当偏导数 $h_\gamma(\alpha, \beta, \gamma)$ 等于0时, 对应得到姿态误差角 γ 的解

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{A}{B} + \frac{\bar{\beta y} + \bar{\alpha x}}{B} \\
&= \gamma_1 + \gamma_2
\end{aligned} \tag{附录-6}$$

结合式(附录-1)~式(附录-6), 便可以得到第2章中的式(17)~式(21)。

为了从式(17)求解得到式(23), 可以先求解 γ 。将式(17)前两项代入式(17)第3项, 可以得到

$$\gamma = \frac{A}{B} + \frac{(-d\bar{x} + \gamma\bar{y})\bar{y} + (d\bar{y} + \gamma\bar{x})\bar{x}}{B} \tag{附录-7}$$

整理式(附录-7)便可以得到 γ 的解, 进一步将 γ 代入到式(17)前两项中, 便可以得到关于姿态误差 (α, β, γ) 的解, 如式(23)所示。

基于高斯分布的加法定律, 基于式(23)可以得到姿态误差的标准差。恒星位置噪声 dx_i 和 dy_i 是相互独立的高斯分布噪声 $dx_i \sim N(0, \sigma^2)$, $dy_i \sim N(0, \sigma^2)$, 则有

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_i dx_i \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n}) \\ \frac{1}{n} \sum_i dy_i \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n}) \end{cases} \tag{附录-8}$$

以式(23)中的第一项为例, 计算姿态误差的标准差, 式(23)中的第一项为

$$\alpha = \frac{A\bar{x} + B\bar{d y} - \bar{y}^2 \bar{d y} - \bar{x y} \bar{d x}}{B - \bar{x}^2 - \bar{y}^2} \tag{附录-9}$$

式(附录-9)的分母为常数项, 分子中的 B ,

\bar{x} 和 \bar{y} 也为常数项, 只与星点平均位置有关。将式(附录-9)中的分子项展开得到式(附录-10)。

$$\begin{aligned}
\alpha_{\text{分子}} &= A\bar{x} + B\bar{d y} - \bar{y}^2 \bar{d y} - \bar{x y} \bar{d x} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i dx_i - x_i dy_i) \bar{x} + B \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n dy_i - \\
&\quad \bar{y}^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n dy_i - \bar{x y} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n dx_i \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{x} y_i - \bar{x y}) dx_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (B - \bar{x} x_i - \\
&\quad \bar{y}^2) dy_i
\end{aligned} \tag{附录-10}$$

$\alpha_{\text{分子}}$ 服从的分布为 $\alpha_{\text{分子}} \sim N(0, \sigma_{\alpha_{\text{分子}}}^2)$, 基于式(附录-8)和式(附录-10)可得 $\sigma_{\alpha_{\text{分子}}}^2$ 为

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha_{\text{分子}}}^2 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (\bar{x} y_i - \bar{x y})^2 \sigma^2 + \\
&\quad \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (B - \bar{x} x_i - \bar{y}^2)^2 \sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{n^2} n (B^2 - \bar{x}^2 - 2B\bar{y}^2 + \bar{x}^2 \bar{y}^2 + \bar{y}^4) \\
&= \frac{\sigma^2}{n} (B^2 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2) (B^2 - \bar{y}^2)
\end{aligned} \tag{附录-11}$$

将式(附录-9)中的分母引入, α 服从的分布为 $\alpha \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$, σ_α 为

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{B - \bar{y}^2}}{\sqrt{B - \bar{x}^2 - \bar{y}^2}} \tag{附录-12}$$

同理可以得到三轴姿态误差的标准差如式(25)所示。