

基于摄动法的负刚度-惯容减振器参数优化解析设计

许诺,王珏,张莹,任超凡

(河海大学机电工程学院,江苏常州 213200)

摘要:主结构阻尼对系统的动力特性具有一定的影响,但是采用解析法对减振器优化设计时为了简化计算,通常忽略主结构阻尼。该文基于摄动法对随机激励下,考虑主结构阻尼的负刚度-惯容减振器进行了参数优化解析设计。首先,建立系统在底部加速度激励下的运动控制方程,求解主结构的绝对加速度响应传递函数及其随机激励下的响应均方值;其次,引入摄动法得到 H_2 准则下考虑主结构阻尼的负刚度-惯容减振器的最优设计参数解析解,并验证了该解析解的有效性;然后,通过算例分析表明,当主结构阻尼比较大时,忽略主结构阻尼会引起负刚度-惯容减振器的最优设计参数与实际值产生较大偏差,说明了参数解析优化设计时考虑主结构阻尼的必要性;最后,针对含有阻尼的主结构,对比分别安装惯容减振器和负刚度-惯容减振器后,主结构在频域中的最优绝对加速度均方值以及在时域中的时程响应峰值,结果表明随着主结构阻尼比的减小,负刚度越能提升减振器性能,同时说明负刚度-惯容减振器能更有效抑制主结构时程响应峰值。

关键词:动力吸振器;负刚度; H_2 优化;摄动法;解析解

中图分类号: O32; TU31

文献标志码: A

Analytical design and parameter optimization for negative stiffness-inerter dampers based on the perturbation method

XU Nuo, WANG Jue, ZHANG Ying, REN Chaofan

(College of Mechanical & Electrical Engineering, Hohai University, Changzhou 213200, China)

Abstract: The damping of the primary structure has a certain impact on the dynamic characteristics of the system. However, the damping of the primary structure is often neglected when optimizing the design of DVAs using analytical methods to simplify calculations. This paper employs the perturbation method to derive an analytical solution for the optimized design parameters in negative stiffness-inerter dampers considering the damping of the primary structure under random excitation. Firstly, the governing equation of the vibration system under base acceleration excitation is established to obtain the absolute acceleration response transfer function and the corresponding mean square value. Secondly, the perturbation method is introduced to obtain the analytical solution of the optimal design parameters of the negative stiffness-inerter damper considering the primary structure damping under the H_2 criterion, and the validity of these analytical solutions is verified. Subsequently, through comparative case studies, it is demonstrated that neglecting the primary structure damping can cause significant deviations between the optimal design parameters of the negative stiffness-inerter damper and the actual values when the primary structure damping ratio is relatively large highlighting the necessity of considering primary structure damping in parameter analytical optimization design. Finally, the optimal mean square value of absolute acceleration in the frequency domain and the peak value of the time history response in the time domain are compared after installing negative stiffness-inerter dampers and inerter dampers for the primary structure with damping,

收稿日期:2024-05-07; 修回日期:2024-06-17

基金项目:国家自然科学基金项目(52178474);江苏省自然科学基金项目(BK20221233)

作者简介:许诺(2000—),男,硕士研究生,主要从事结构减振研究。E-mail:231319010031@hhu.edu.cn

通信作者:王珏(1988—),女,副教授,博士,主要从事土与结构动力相互作用、结构减振研究。E-mail:juewang@hhu.edu.cn

respectively. The result indicates that reducing the damping ratio of the main structure allows negative stiffness to increasingly improve the damper's effectiveness. Furthermore, it demonstrates that the negative stiffness-inertance damper is more efficient in controlling the peak time-history response of the main structure.

Key words: dynamic vibration absorber; negative stiffness; H_2 optimization; perturbation method; analytical solution

0 引言

动力吸振器(dynamic vibration absorber, DVA)是一种附加在主结构上的减振装置,用于控制由外部激励引起的振动。DEN HARTOG^[1]提出了经典的调谐质量阻尼器(tuned mass damper, TMD),结构简单但所需附加质量大,限于空间安装位置与建造成本。SMITH^[2]提出了双端点的力学元件惯容器,它与单端点的质量元件不同,能产生正比于其两端加速度之差的力,具有显著的质量放大作用^[3-4]。因此,惯容逐步应用于 DVA 的设计,例如将 TMD 中的质量元件替换为惯容形成的调谐惯容阻尼器(tuned inertia damper, TID),将阻尼并联上惯容形成的调谐黏滞质量阻尼器(tuned viscous mass damper, TVMD)等。在海洋平台^[5-6]、车辆悬架^[7-8]、基础隔振^[9-10]等领域中的研究表明,惯容减振器具有良好的减振潜力。近年来,负刚度作为一种新型力学元件也被引入振动控制。与传统的正刚度元件不同,负刚度元件在受到压缩或者拉伸时,可以提供一个与位移方向相同的反作用力,其机理可以通过预屈曲梁^[11]、预压缩弹簧^[12]、组合永磁体^[13-14]等方式实现。负刚度元件的主要优势在于能有效降低系统的固有频率、提升系统承载能力^[15],这些特性在斜拉索^[16-17]、车辆悬架^[18-19]、隔振平台^[20-21]等多个研究领域得到了有效验证。

虽然惯容和负刚度的力-位移关系相似,但惯容的出力依赖于振动频率,而负刚度能提供与振动频率无关的力。因此,研究者们开始关注新型的负刚度-惯容减振器(negative stiffness inerter damper, NSID),例如给 TID 和 TVMD 的惯容并联上负刚度分别得到含负刚度的调谐惯容阻尼器(tuned inertia damper with negative stiffness, N-TID)和含负刚度的调谐黏滞质量阻尼器(tuned viscous mass damper with negative stiffness, N-TVMD)^[22-26]。为了使这些新型的减振装置发挥最好的性能,对其进行参数优化设计是必要的。针对简谐荷载引起的振动,通常采用 H_∞ 优化准则,其目标是 minimized 谐波激励下幅频曲线的峰值。DEN HARTOG^[1]在忽略了主结构阻尼的情况下,提出了 H_∞ 优化的固定点理论,用于求解简谐力激励下 TMD 的最优参数解析解。YE 等^[22]基于固定点理论推导了简谐加速度激励下 N-TID 的最优设计参数解析解。针对地震激励或风荷载等随机激励引起的振动,通常采用 H_2 优化准则^[27],其目标是 minimized 所有频率下主结构振动的总能量。WARBURTON^[28]忽略主结构阻尼,首次将 H_2 准则用于白噪声激励下 TMD 的参数解析设计。TAI 等^[24]将 H_2 准则用于推导随机位移激励下的 N-TVMD 的最优阻尼比解析解,但未能推出最优刚度比与负刚度比的解。王珏等^[25-26]以最小化主结构位移 H_2 准则为优化目标,分别推导了 N-TID 和 N-TVMD 在随机位移及加速度激励下的最优设计参数解析解。CHOWDHURY 等^[29-30]基于 H_2 准则提出了多种 NSID 在白噪声加速度激励下的最优阻尼比和频率比解析解。上述研究在推导 DVA 的最优设计参数解析解时都忽略了主结构阻尼。

在工程实际中,振动的部分能量经主结构阻尼耗散^[31],故有研究者采用数值解法对考虑主结构阻尼的 DVA 进行参数优化。LEUNG 等^[32]将粒子群优化算法用于 TMD 参数优化设计,得到了不同主结构阻尼取值下的 TMD 最优频率比和阻尼比。TAI 等^[24]讨论主结构阻尼对 N-TVMD 的最优设计参数的影响,采用遗传算法数值优化得到了不同质量比下最优负刚度比及阻尼比与主结构阻尼比之间的关系曲线。通过数值搜索寻找 NSID 的最优设计参数,并将数值解拟合成经验公式^[33-35],这是目前考虑主结构阻尼时对 NSID 进行参数优化设计的常用方式。虽然数值法较为方便,但受限于各种优化算法的特性,实际可能遇到陷入局部最优、计算效率低、结果不稳定等问题,对此有研究者采用了不同的参数解析方法。ANH 等^[36]针对安装于含阻尼的主结构中的 TMD,提出了一种等效线性化方法,用不含阻尼的主结构中的等效刚度代替含阻尼的主结构中的阻尼和刚度,并基于 H_∞ 准则提出了 TMD 的最优频率比解析解。最近, XU 等^[37]改进了 ANH 等提出的等效线性化方法,将其用于推导 H_∞ 优化准则下 TID 的最优频率比和阻尼比解析解,同时对数值解验证了改进后解析解的有效性。虽然等效线性化方法能在一定程度上能体现主结构阻尼对减振器最优参数设

计,但作为一个近似方法,其结果在精度上仍然不是很理想。ASAMI 等^[38]将摄动法应用于 TMD 的参数优化解析设计,基于 H_2 准则提出了 TMD 最优频率比和阻尼比的解析解,并与数值解对比验证了其有效性。作为小参数法,摄动法较为准确地描述了主结构阻尼对减振器设计参数的影响,这为新型 NSID 减振器的参数优化解析提供了新的思路。

减振器的解析优化设计具有计算效率高和稳定性好的优点,但目前对新型的负刚度-惯容减振器进行解析优化时,为了简化计算通常忽略主结构阻尼对优化参数的影响。因此,本文为了提高主结构在底部随机激励下的振动舒适性,基于摄动法以主结构绝对加速度的 H_2 范数为优化目标,对考虑主结构阻尼的 N-TID 减振器进行了参数优化解析设计。取 N-TID 设计参数的二阶摄动解作为最优设计参数解析解,并通过与数值解的对比验证其有效性。通过对比考虑主结构阻尼和忽略主结构阻尼时所得的减振器最优设计参数,说明忽略主结构阻尼对 N-TID 最优设计参数的影响。最后,在频域中对比 N-TID 和 TID 的主结构最优绝对加速度均方值,在时域中对比 4 种实际激励下的主结构时程响应峰值,分析考虑主结构阻尼的情况下负刚度对 N-TID 减振性能和其主结构时程响应峰值的影响。

1 动力学建模及求解

考虑主结构阻尼的振动系统见图 1。图中, m 为主结构的质量, k 为主结构的刚度, c 为主结构的阻尼, a_g 为系统所受的底部加速度激励, x 为主结构相对于地面的振动位移, x_d 为减振器相对于地面的振动位移。为了降低主结构的绝对加速度以便提高其振动舒适性,安装了如图虚框部分所示的含负刚度的调谐惯容阻尼器 N-TID 减振器,其中 m_d 为惯容, k_n 为负刚度, k_d 为正刚度, c_d 为阻尼。

根据达朗贝尔原理,上述系统在底部加速度激励下的运动控制方程为

$$\begin{cases} m(\ddot{x} + a_g) + kx + m_d(\ddot{x} - \ddot{x}_d) + k_n(x - x_d) + c\dot{x} = 0 \\ m_d(\ddot{x}_d - \ddot{x}) + k_n(x_d - x) + k_d x_d + c_d \dot{x}_d = 0 \end{cases} \quad (1)$$

引入表 1 无量纲参数于式(1),同时为了简化方程和后续计算,调整时间 t 使方程独立于主结构的固有频率^[26],令无量纲时间 $\tau = t\omega_s$ 。此时, $d/dt = \omega_s(d/d\tau)$,且 $d^2/dt^2 = \omega_s^2(d^2/d\tau^2)$,同时进行拉氏变换,得

$$\begin{cases} s^2 X + A_g + X + s^2 \delta(X - X_d) + \kappa(X - X_d) + 2s\xi X = 0 \\ s^2 \delta(X_d - X) + \kappa(X_d - X) + \alpha X_d + 2s\xi X_d = 0 \end{cases} \quad (2)$$

表 1 无量纲参数表

Table 1 Dimensionless parameters

参数名	符号	表达式	参数名	符号	表达式
主结构固有频率	ω_s	$\omega_s = \sqrt{k/m}$	刚度比	α	$\alpha = k_d/k$
惯质比	δ	$\delta = m_d/m$	负刚度比	κ	$\kappa = k_n/k$
主结构阻尼比	ξ_s	$\xi_s = c/2m\omega_s$	频率比	λ	$\lambda = \omega/\omega_s$
减振器阻尼比	ξ	$\xi = c_d/2m\omega_s$			

令 $s = i\lambda$,从式(2)可得主结构相对加速度的传递函数,如式(2)所示:

$$H_{rel} = \frac{\ddot{X}_{rel}}{A_g} = \frac{(\alpha + \kappa)\lambda^2 + 2i\xi\lambda^3 - \delta\lambda^4}{\alpha + (1 + \alpha)\kappa + 2i(\xi + \kappa\xi + \alpha\xi_s + \kappa\xi_s)\lambda - [\alpha + (1 + \alpha)\delta + \kappa + 4\xi\xi_s]\lambda^2 - 2i(\xi + \delta\xi + \delta\xi_s)\lambda^3 + \delta\lambda^4} \quad (3)$$

考虑到激励为地面的加速度,选取地面为参考系,则有相对加速度与绝对加速度的换算关系为

$$\ddot{X}_{abs} = \ddot{X}_{rel} + A_g \quad (4)$$

结合式(3)和式(4),得主结构绝对加速度的传递函数为

$$H_{abs} = \frac{\ddot{X}_{abs}}{A_g} = \frac{\alpha + \kappa + \alpha\kappa + 2i(\xi + \kappa\xi + \alpha\xi_s + \kappa\xi_s)\lambda - (\delta + \alpha\delta + 4\xi\xi_s)\lambda^2 - i\delta(\xi + \xi_s)\lambda^3}{\alpha + (1 + \alpha)\kappa + 2i(\xi + \kappa\xi + \alpha\xi_s + \kappa\xi_s)\lambda - [\alpha + (1 + \alpha)\delta + \kappa + 4\xi\xi_s]\lambda^2 - 2i(\xi + \delta\xi + \delta\xi_s)\lambda^3 + \delta\lambda^4} \quad (5)$$

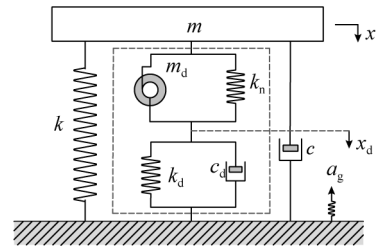


图 1 安装 N-TID 的含主结构阻尼振动系统
Fig. 1 A vibration system with main-structure damping installed with N-TID

当底部加速度激励为随机白噪声时,其功率谱密度满足 $S(\omega) = S_0$,则主结构的绝对加速度响应均方值可由式(6)计算,得

$$E[\dot{X}_{abs}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{abs}(i\lambda)|^2 S_0 d\omega = \omega_s S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_{abs}(i\lambda)|^2 d\lambda \quad (6)$$

对式(6)的均方值进行归一化处理,得

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{2\pi\omega_s S_0} E[\dot{X}_{abs}^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{abs}(i\lambda)|^2 d\lambda \\ &= \frac{\delta[4C_1^2(C_2C_5 - C_0C_6 + C_4C_6) + 8C_1C_6^2 + C_2C_6] - C_0C_2C_5 + C_2C_4C_5 - C_4^2C_6 - 4C_5C_6^2}{4C_6[C_6\delta - C_5(C_0 + C_4)] + 4C_2C_5^2} \end{aligned} \quad (7)$$

式中, $C_0 = \alpha + \kappa$, $C_1 = \xi + \xi_s$, $C_2 = C_0 + \alpha\kappa$, $C_3 = \xi(\kappa + 1)$, $C_4 = \delta + \alpha\delta + 4\xi\xi_s$, $C_5 = \delta C_1 + \xi$, $C_6 = C_3 + C_0\xi_0$.

2 基于摄动法的设计参数解析优化

摄动法通过将某个微小的参数视为小扰动,将原始问题分解为一系列更简单的子问题,尤其适用于解决那些精确解法难以应对的复杂小参数问题。该方法的关键在于将原问题分解为主问题和一系列摄动子问题,主问题通常是可以直接解决的,而摄动问题则是在主问题解的基础上进行逐步修正和改进。对于本文研究的安装在考虑主结构阻尼系统中的 N-TID 优化问题,将不含主结构阻尼的优化视为主问题,将主结构阻尼视为微小扰动,以求解其最优刚度比 α_{opt} 和最优阻尼比 ξ_{opt} 的解析解。将 α_{opt} 和 ξ_{opt} 表示为主结构阻尼比 ξ_s 的级数形式,其表达式为

$$\begin{cases} \alpha_{opt} = \alpha_0 + \alpha_1\xi_s + \alpha_2\xi_s^2 + \dots + \alpha_i\xi_s^i + \dots + \alpha_n\xi_s^n \\ \xi_{opt} = \xi_0 + \xi_1\xi_s + \xi_2\xi_s^2 + \dots + \xi_i\xi_s^i + \dots + \xi_n\xi_s^n \end{cases} \quad (8)$$

式中: i 为摄动的阶数; α_i 和 ξ_i 分别为相应变量对应阶数的摄动系数, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ 。根据极值理论,最优设计参数 α_{opt} 和 ξ_{opt} 满足下列方程组,其中 σ^2 表达式为

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \sigma^2}{\partial \xi} = 0 \quad (9)$$

将式(8)代入式(9)得:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \alpha} = M_0(\delta, \kappa, \alpha_0, \xi_0) + M_1(\delta, \kappa, \alpha_0, \xi_0, \alpha_1, \xi_1)\xi_s + \dots + M_i(\delta, \kappa, \alpha_0, \xi_0, \alpha_1, \xi_1, \alpha_2, \xi_2, \dots, \alpha_i, \xi_i)\xi_s^i + \dots + \\ M_n(\delta, \kappa, \alpha_0, \xi_0, \alpha_1, \xi_1, \alpha_2, \xi_2, \dots, \alpha_n, \xi_n)\xi_s^n = 0 \\ \frac{\partial \sigma^2}{\partial \xi} = N_0(\delta, \kappa, \alpha_0, \xi_0) + N_1(\delta, \kappa, \alpha_0, \xi_0, \alpha_1, \xi_1)\xi_s + \dots + N_i(\delta, \kappa, \alpha_0, \xi_0, \alpha_1, \xi_1, \alpha_2, \xi_2, \dots, \alpha_i, \xi_i)\xi_s^i + \dots + \\ N_n(\delta, \kappa, \alpha_0, \xi_0, \alpha_1, \xi_1, \alpha_2, \xi_2, \dots, \alpha_n, \xi_n)\xi_s^n = 0 \end{cases} \quad (10)$$

对于 i 阶摄动表达式,要让上述方程组对于任意微小量 ξ_s 都成立,则有:

$$\begin{cases} M_0(\delta, \kappa, \alpha_0, \xi_0) = N_0(\delta, \kappa, \alpha_0, \xi_0) = 0 \\ M_1(\delta, \kappa, \alpha_0, \xi_0, \alpha_1, \xi_1)\xi_s = N_1(\delta, \kappa, \alpha_0, \xi_0, \alpha_1, \xi_1)\xi_s = 0 \\ \dots \\ M_i(\delta, \kappa, \alpha_0, \xi_0, \alpha_1, \xi_1, \alpha_2, \xi_2, \dots, \alpha_i, \xi_i)\xi_s^i = N_i(\delta, \kappa, \alpha_0, \xi_0, \alpha_1, \xi_1, \alpha_2, \xi_2, \dots, \alpha_i, \xi_i)\xi_s^i = 0 \\ \dots \\ M_n(\delta, \kappa, \alpha_0, \xi_0, \alpha_1, \xi_1, \alpha_2, \xi_2, \dots, \alpha_n, \xi_n)\xi_s^n = N_n(\delta, \kappa, \alpha_0, \xi_0, \alpha_1, \xi_1, \alpha_2, \xi_2, \dots, \alpha_n, \xi_n)\xi_s^n = 0 \end{cases} \quad (11)$$

由方程组(11)可解得各阶摄动系数 α_i 和 ξ_i , 将其代入式(8), 即可得到 i 阶的 N-TID 减振器最优设计参数摄动解析表达式。

2.1 0 阶摄动

摄动阶数为 0 阶,即取式(8)中的 $i=0$ 时, N-TID 最优刚度比和阻尼比表示为

$$\alpha_{opt} = \alpha_0, \quad \xi_{opt} = \xi_0 \quad (12)$$

依据式(10)和式(11)可得,

$$\begin{cases} M_0(\delta, \kappa, \alpha_0, \xi_0) = 2\alpha_0(1+\kappa) + \delta^2 + \kappa(2+\kappa) - 2\delta(1+\kappa) = 0 \\ N_0(\delta, \kappa, \alpha_0, \xi_0) = 4[(\delta-\kappa)(\delta-\kappa-2) + \delta + 1]\xi_0^2 - (1+\kappa)\alpha_0^2 - (\delta-\kappa)(\delta-\kappa-2)\alpha_0 - (\delta-\kappa)2 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

解方程组(13)得

$$\alpha_0 = \frac{(\delta - \kappa - 2)(\kappa - \delta)}{2(\kappa + 1)}, \quad \xi_0 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(\delta - \kappa)^2 [4\delta - (\delta - \kappa)^2]}{(\kappa + 1)[(\delta - \kappa)(\delta - \kappa - 2) + \delta + 1]}} \quad (14)$$

结合式(12)和式(14)可以看出,考虑0阶摄动时,最优刚度比和阻尼比的解析表达式中不含有主结构阻尼比 ξ_s ,实际上是忽略了主结构阻尼对N-TID最优设计参数的影响。0阶摄动解是本文摄动解析的出发点,在此基础上考虑主结构阻尼的扰动,对摄动解析解逐步修正直至满足精度要求。

2.2 1阶摄动

考虑摄动阶数为1阶,即取式(8)中的 $i=1$ 时,N-TID最优刚度比和阻尼比表示为

$$\alpha_{opt} = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_s, \quad \xi_{opt} = \xi_0 + \xi_1 \xi_s \quad (15)$$

式中, α_0 和 ξ_0 为式(14)中已求得的0阶摄动解, α_1 和 ξ_1 为待求的1阶摄动系数。

主结构阻尼对减振器参数设计的影响从1阶摄动开始体现,同时摄动的1阶系数也代表着主结构阻尼对N-TID最优设计参数的最大影响部分。依据式(10)和式(11)可得:

$$\begin{cases} (\delta - \kappa)^3 [-4\delta^3(\kappa + 2) + \delta^2(2\kappa^2 + 10\kappa + 11) + 2\delta^4 - 2\delta(\kappa^2 + 2\kappa + 2) + \kappa^2] + 8(\kappa + 1)^3 [\alpha_1 \xi_0 (\delta - \kappa) + 4\delta \xi_0^2 (\delta - \kappa - 1)] = 0 \\ 8(\kappa + 1)^3 \{ 2\delta [8(\kappa + 1)\xi_0^4 - 2\xi_0^2(4\kappa\xi_1 + 3\kappa + 2\xi_1 + 2) + \kappa\xi_1] + \delta^2 [\xi_0^2(8\xi_1 + 4) - \xi_1] + \xi_1 [8(\kappa + 1)^2 \xi_0^2 - \kappa^2] + 4\kappa(\kappa + 1)\xi_0^2 \} + \\ (\delta - \kappa - 2) [\delta^2(\delta - \kappa - 2)2(\delta - \kappa)3 + 16\delta^2(\kappa + 1)2(\kappa + 3)\xi_0^2 + 16\kappa(\kappa + 1)3\xi_0^2 - 16\delta(\kappa + 1)2(\kappa^2 + 6\kappa + 3)\xi_0^2 + 4(\kappa + 1) \\ 2(\delta - \kappa - 2)(\delta - \kappa)2\xi_1] + 2(\kappa + 1)(\delta - \kappa)^2(\delta - \kappa - 2)^2 [4\delta(\delta + 1)\xi_0^2 - \delta^2 - (\kappa + 1)\xi_1] = 0 \end{cases} \quad (16)$$

将0阶摄动解(14)代入方程组(16),解得1阶摄动系数:

$$\begin{cases} \alpha_1 = [-2\delta^7 + 10\delta^6(\kappa + 1) - \delta^5(20\kappa^2 + 44\kappa + 21) + \delta^4(20\kappa^3 + 76\kappa^2 + 81\kappa + 25) + \delta^3(10\kappa^4 + 64\kappa^3 + 122\kappa^2 + 93\kappa + 25) + \\ \delta^2(2\kappa^5 + 26\kappa^4 + 78\kappa^3 + 97\kappa^2 + 55\kappa + 12) - \delta(4\kappa^5 + 17\kappa^4 + 23\kappa^3 + 15\kappa^2 + 4\kappa) + \kappa^5 + 2\kappa^4 + \kappa^3] / 2(\kappa + 1)^{5/2} \\ \sqrt{[(\delta - \kappa)^2 - 4\delta][(\delta - \kappa)^2 - \delta + 2\kappa + 1]} \\ \xi_1 = [\delta^{10} - 8\delta^9(1 + \kappa) + \delta^8(28\kappa^2 + 60\kappa + 30) - 2\delta^7(28\kappa^3 + 97\kappa^2 + 104\kappa + 35) + 2\delta^6(1 + \kappa)2(35\kappa^2 + 106\kappa + 57) - \\ 2\delta^5(1 + \kappa)2(28\kappa^3 + 139\kappa^2 + 178\kappa + 64) + 2\delta^4(14\kappa^6 + 134\kappa^5 + 450\kappa^4 + 730\kappa^3 + 632\kappa^2 + 282\kappa + 51) - 2\delta^3 \\ (4\kappa^7 + 55\kappa^6 + 240\kappa^5 + 503\kappa^4 + 590\kappa^3 + 400\kappa^2 + 146\kappa + 22) + \delta^2\kappa(\kappa^7 + 24\kappa^6 + 128\kappa^5 + 316\kappa^4 + 418\kappa^3 + 316\kappa^2 + \\ 132\kappa + 24) - 2\delta\kappa^2(1 + \kappa)^2(\kappa^4 + 2\kappa^3 + 2\kappa^2 - 2\kappa - 2)] / 4(\kappa + 1)^2 [(\delta - \kappa)^2 - 4\delta][(\delta - \kappa)^2 - (\delta - \kappa) + \kappa + 1]^2 \end{cases} \quad (17)$$

2.3 2阶摄动

摄动阶数为2阶,即取式(8)中的 $i=2$ 时,N-TID最优刚度比和阻尼比表示为

$$\alpha_{opt} = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_s + \alpha_2 \xi_s^2, \quad \xi_{opt} = \xi_0 + \xi_1 \xi_s + \xi_2 \xi_s^2 \quad (18)$$

式中: α_0 和 ξ_0 为式(14)中已求得的0阶摄动解; α_1 和 ξ_1 为式(17)中已求得的1阶摄动系数,与求解1阶摄动系数类似地,求得2阶摄动系数 α_2 和 ξ_2 ,如式(19)所示:

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{\sum_{p=1}^{17} (\delta^p f_p)}{2(\delta - \kappa)(1 + \kappa)^4 [(\delta - \kappa) - 4\delta]^2 [(\delta - \kappa)^2 - (\delta - \kappa) + \kappa + 1]^2} \\ \xi_2 = \frac{\sum_{q=0}^{20} (\delta^q g_q)}{8(\delta - \kappa)(1 + \kappa)^{7/2} [(\delta - \kappa) - 4\delta]^{5/2} [(\delta - \kappa)^2 - (\delta - \kappa) + \kappa + 1]^{7/2}} \end{cases} \quad (19)$$

式中: f_p 和 g_q 代表的多项式见附录, $p=1, 2, \dots, 17, q=0, 1, \dots, 20$ 。将2阶摄动表达式(18)作为本文的N-TID最优设计参数解析解,其中 α_0 和 ξ_0 为0阶摄动解见式(14), α_1 和 ξ_1 为1阶摄动系数见式(17), α_2 和 ξ_2 为0阶摄动系数见式(19)。

3 摄动解析解的验证

对比惯质比 $\delta = 0.15$,负刚度比 $\kappa = -0.15$ 时的0阶、1阶、2阶摄动解与优化目标为 $\min\{\sigma^2\}$ 的遗传算法数值解见图2,其中遗传算法主要配置项取值如下:种群数量为50,交叉率为0.8,最大代数为200,最大停滞代数为50,适应度函数容差为 1×10^{-6} 。由图可知,0阶摄动忽略了结构阻尼对最优设计参数的影响,但随着摄动阶数的增加,2阶摄动解析解趋于精确解值。为验证本文提出的摄动解析解的有效性,本文在常用的

(-1, 0) 区间内取不同的负刚度比值。由于负刚度的引入可能导致系统的动态行为不稳定, 本文在保证含负刚度的系统满足劳斯赫尔维茨稳定性准则的情况下, 取了负刚度比 κ 为 -0.05、-0.10、-0.15 这 3 组值。在不同惯质比和满足系统稳定性条件的负刚度比的取值下, 将摄动解析解与数值结果对比见图 3, 图中曲面代表解析解, 散点代表数值解。取摄动解析解与数值解偏差最大的点, 即 $\xi_s = 0.20, \kappa = -0.05, \delta = 0.25$ 处, 最优刚度比摄动解析解为 0.349 1, 数值解为 0.353 6, 偏差为 1.27%; 最优阻尼比摄动解析解为 0.141 1, 数值解为 0.145 2, 偏差为 2.82%, 证明摄动解析解与数值解有高度一致性, 表明最优刚度比和阻尼比的 2 阶摄动解析解是精确的。在主结构阻尼比 $\xi_s = 0.10$, 负刚度比 $\kappa = -0.10$, 惯质比 $\delta = 0.15$ 情况下, 绘制均方值和 N-TID 设计参数关系图见图 4。在该组系统参数下, 主结构绝对加速度均方值有一个最小值, 当且仅当 N-TID 的刚度比与阻尼比为 2 阶摄动解时取得, 进一步说明摄动解析解的有效性。

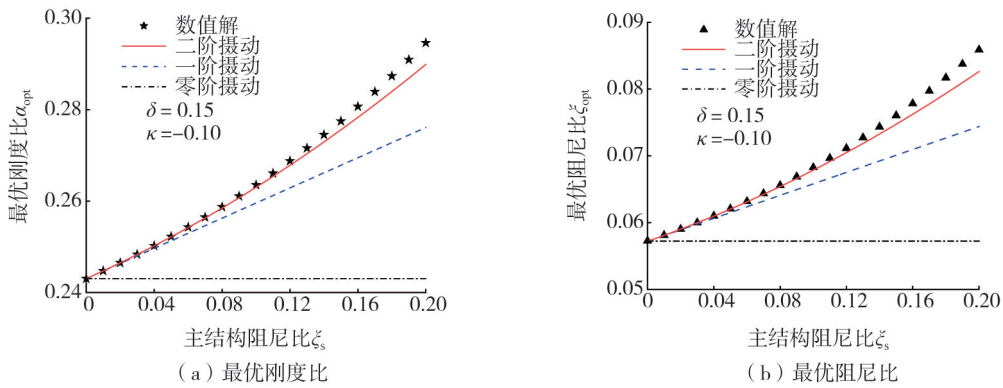


图 2 各阶摄动解析解和数值解的对比

Fig. 2 Comparison between perturbation analytical solutions and numerical solutions of each order

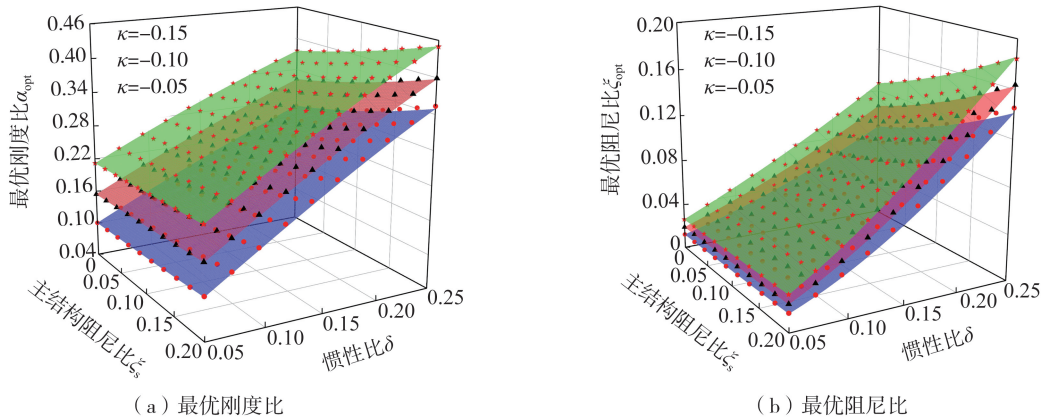


图 3 2 阶摄动解析解和数值解的对比

Fig. 3 Comparison between the second-order perturbation analytical solution and the numerical solution

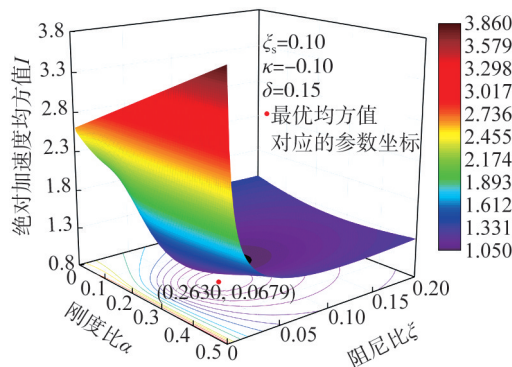


图 4 主结构绝对加速度均方值

Fig. 4 Mean square value of the absolute acceleration of the primary structure

4 参数分析

4.1 主结构阻尼对 N-TID 减振器设计参数的影响

主结构阻尼对系统的影响主要体现在 N-TID 的最优设计参数上,记 N-TID 的最优刚度比和最优阻尼比在考虑主结构阻尼时为 α_{opt} 和 ξ_{opt} ,忽略主结构阻尼情况下为 $\hat{\alpha}_{opt}$ 和 $\hat{\xi}_{opt}$,见表 2。由表可知,当主结构阻尼比 $\xi_s = 0.02$ 时,忽略主结构阻尼比引起的最优刚度比和阻尼比的偏差都在 5% 以内;随着主结构阻尼比增加到 0.10 时,大部分工况下,最优刚度比的偏差位于 5% 与 10% 之间,而最优阻尼比的偏差超过 10%,在惯质比 $\delta = 0.25$ 、负刚度比 $\kappa = -0.05$ 时最高达到 20%;随着主结构阻尼比进一步增大到 0.20,此时忽略主结构阻尼引起的设计参数偏差大,大部分工况下,最优刚度比偏差超过 10%,最高有 23.12%,最优阻尼比偏差超过 20%,最高接近 40%。当系统的主结构阻尼比较大时,宜考虑其对减振器最优设计参数的影响,本文提出的摄动解析解准确地描述了这部分影响。

表 2 主结构阻尼对 N-TID 最优设计参数的影响

Table 2 Influence of primary structure damping on the optimal design parameters of N-TID

惯质比 δ	负刚度比 κ	忽略 ξ_s		$\xi_s = 0.02$		$\xi_s = 0.10$		$\xi_s = 0.20$	
		$\hat{\alpha}_{opt}$	$\hat{\xi}_{opt}$	α_{opt}	ξ_{opt}	α_{opt}	ξ_{opt}	α_{opt}	ξ_{opt}
0.05	-0.15	0.2118	0.0261	0.2130	0.0264	0.2183	0.0278	0.2260	0.0302
	-0.10	0.1542	0.0189	0.1552	0.0192	0.1600	0.0205	0.1672	0.0227
	-0.05	0.1000	0.0121	0.1009	0.0123	0.1052	0.0134	0.1124	0.0153
0.15	-0.15	0.3000	0.0726	0.3037	0.0746	0.3206	0.0843	0.3468	0.0999
	-0.10	0.2431	0.0572	0.2465	0.0590	0.2630	0.0679	0.2899	0.0826
	-0.05	0.1895	0.0432	0.1927	0.0447	0.2091	0.0527	0.2375	0.0667
0.25	-0.15	0.3765	0.1273	0.3823	0.1317	0.4090	0.1527	0.4507	0.1859
	-0.10	0.3208	0.1054	0.3265	0.1095	0.3536	0.1296	0.3978	0.1629
	-0.05	0.2684	0.0853	0.2739	0.0891	0.3017	0.1082	0.3491	0.1411

4.2 主结构阻尼对绝对加速度均方差的影响

主结构响应的均方差是评估随机振动中减振器性能的一个重要参数,因为它考虑了整体频率下系统的总振动能量。主结构绝对加速度均方差受减振器设计参数的影响,而最优设计参数是关于系统惯质比、负刚度比、主结构阻尼比的函数,故本小节考察各系统参数的变化对于最优绝对加速度均方差的影响见图 5。由图可知,当主结构阻尼比较小时,随着负刚度比绝对值或惯质比的增加,主结构最优绝对加速度均方差得到显著降低,但是随着主结构阻尼的增大,负刚度比和惯质比对最优均方差的影响逐渐降低。

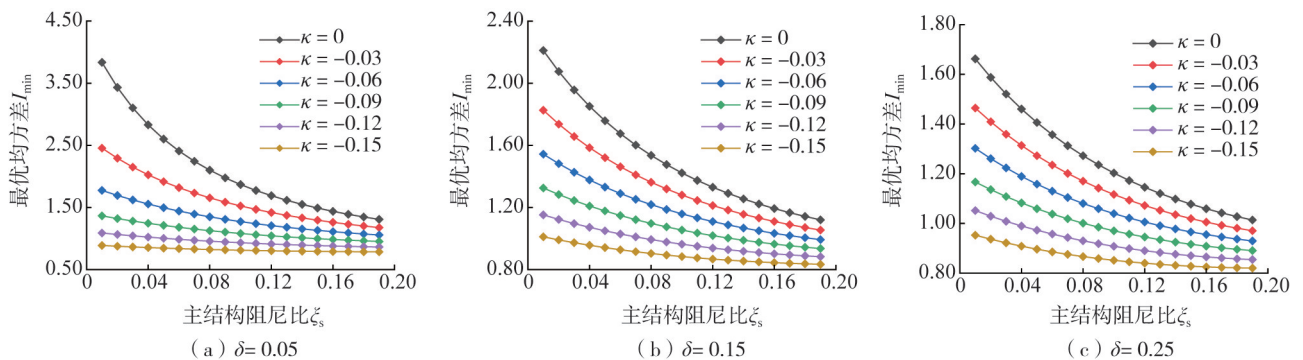


图 5 最优绝对加速度均方差

Fig. 5 Optimal mean square value of absolute acceleration

为进一步分析考虑主结构阻尼的情况下,负刚度比对主结构最优绝对加速度均方差的影响,定义了 TID 和 N-TID 的系统最优绝对加速度均方差 I_{TID} 和 I_{N-TID} 之间的减振比 η_1 见图 6, η_1 的表达式为

$$\eta_1 = \frac{I_{TID} - I_{N-TID}}{I_{TID}} \times 100\% \quad (20)$$

由图 6 可知,负刚度比绝对值较大时,减振比相对较大,在主结构阻尼比和惯质比较小时,减振比最高有 74.47%;负刚度绝对值减小时,减振比随之降低。考虑主结构阻尼时,负刚度比绝对值的增加能有效降低 N-TID 主结构的绝对加速度均方值;随着主结构阻尼比的减小,负刚度对 N-TID 减振性能的提升越大。

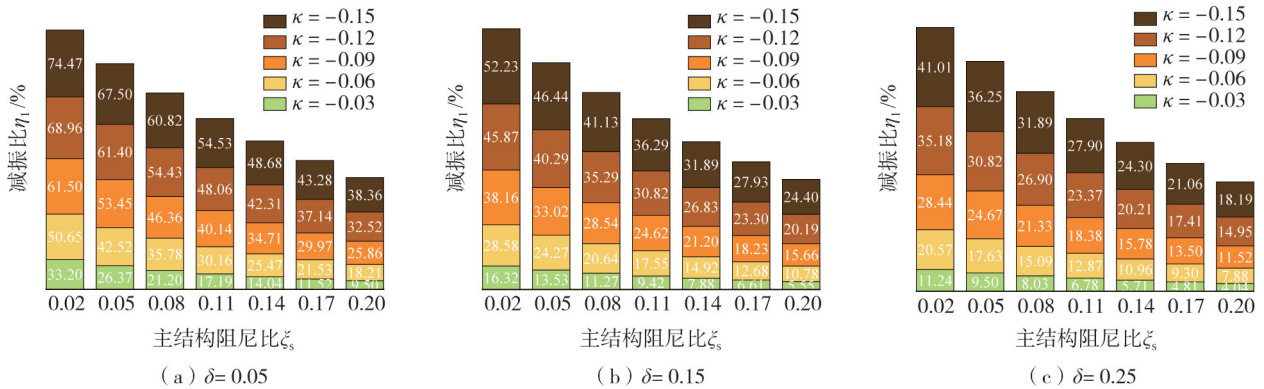


图 6 绝对加速度均方值减振比 η_1

Fig. 6 Damping ratio η_1 of the mean square value of absolute acceleration

4.3 工程时程响应分析

在 3 种天然地震波 El Centro、Kobe、Taft 波和一种人工波的激励下,分析 N-TID 中的负刚度对主结构时域响应的影响。以 Kobe 波为例,取 Kobe 波的加速度峰值为 2 m/s^2 ;选取主结构阻尼比 $\xi_s = 0.10$,惯质比 $\delta = 0.15$,负刚度比 $\kappa = -0.10$,依据式(18)得到 N-TID 最优设计参数为 $\alpha_{opt} = 0.2630, \xi_{opt} = 0.0679$ 。图 7 为自振周期为 $T = 1 \text{ s}$ 的主结构在 Kobe 波激励下的相对位移、相对速度、绝对加速度时程响应,可以看出负刚度能有效降低主结构的各时程响应。

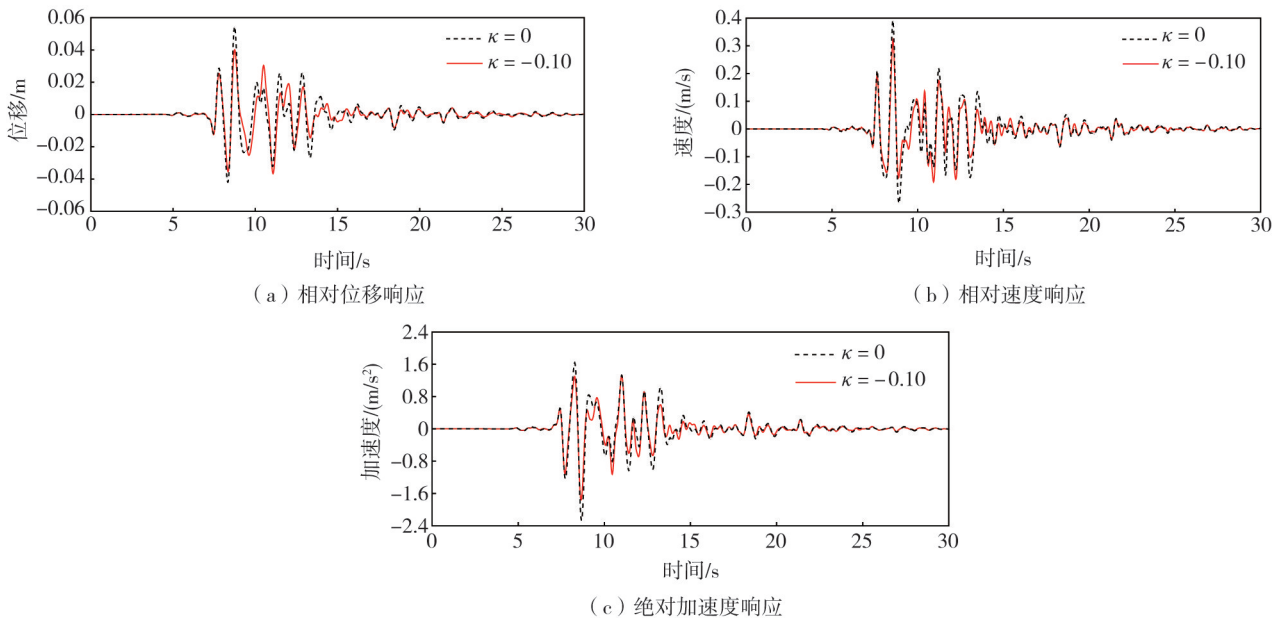


图 7 减振器有负刚度 2 种情况的主结构时程响应对比

Fig. 7 Comparison of the time history responses of primary structure with and without negative stiffness in dampers

统计主结构各时程响应的峰值,定义 TID 和 N-TID 的时程响应峰值为 Δ_0 和 Δ_1 ,时程响应的减振比 η_2 为

$$\eta_2 = \frac{|\Delta_0| - |\Delta_1|}{|\Delta_1|} \times 100\% \quad (21)$$

在 3 种天然波和一种人工波激励下,相对于不含负刚度的 TID,N-TID 的主结构各时程响应峰值均得到有效抑制见图 8。其中,Kobe 波和人工波激励下,在 TID 中引入负刚度对其主结构绝对加速度时程响应峰值的抑制效果最为明显,分别达到 29.4%、31.4%;El Centro 波激励下,主结构绝对加速度时程响应峰值减振比相对较小,为 15.7%。总体来看,绝对加速度时程响应峰值降低幅度最大,符合本文 H_2 的优化目标,同时主

结构的相对位移、相对速度时程响应峰值也有所下降,验证了本文提出的摄动解析解的有效性,表明 TID 中引入负刚度能有效减少其主结构的时程响应峰值。

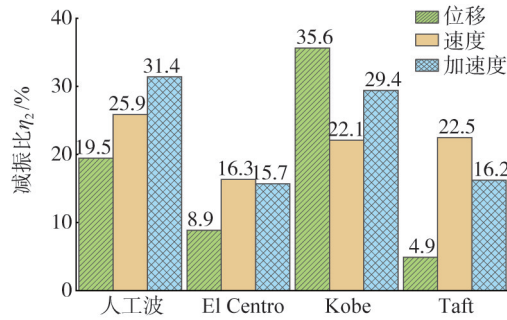


图8 时程响应峰值减振比 η_2

Fig. 8 Damping ratio of time history response peak η_2

5 结论

为了考虑结构阻尼对负刚度-惯容减振器参数优化设计的影响,本文基于摄动法推导了 N-TID 减振器在考虑主结构阻尼时,以底部加速度激励下主结构绝对加速度的 H_2 范数为优化目标下的最优设计参数解析解。通过算例分析得到如下结论:

1) 以主结构绝对加速度均方值为优化目标,得到的 N-TID 最优设计参数的二阶摄动解与数值解具有很好的一致性。但相对于数值解,本文提出的摄动解析解较为明确、更加稳定且有良好的普适性,具有较高的工程参考意义。

2) 对比了 N-TID 在考虑和忽略主结构阻尼 2 种情况下得到的最优设计参数,发现主结构阻尼比较大时,忽略主结构阻尼会引起 N-TID 最优设计参数产生较大偏差,说明了对 N-TID 进行设计参数时考虑主结构阻尼的必要性。

3) 以安装 N-TID 和 TID 系统的主结构绝对加速度均方值的减振比作为指标,得到随着主结构阻尼比的减小,负刚度越能提升 N-TID 减振性能的结论。在实际地震波激励下,分析 N-TID 和 TID 的主结构时程响应峰值的减振比,表明考虑主结构阻尼时,N-TID 相对于 TID 能更有效地抑制主结构时程响应峰值。

参考文献:

- [1] DEN HARTOG J P. Mechanical vibrations [M]. New York: Courier Corporation, 1985.
- [2] SMITH M C. Synthesis of mechanical networks: The inerter[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(10): 1648-1662.
- [3] 张瑞甫,曹嫣如,潘超. 惯容减震(振)系统及其研究进展[J]. 工程力学, 2019, 36(10): 8-27.
ZHANG Ruifu, CAO Yanru, PAN Chao. Inerter system and its state-of-the-art[J]. Engineering Mechanics, 2019, 36(10): 8-27. (in Chinese)
- [4] CHEN M Z Q, HU Y L, HUANG L X, et al. Influence of inerter on natural frequencies of vibration systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(7): 1874-1887.
- [5] XU T C, LI Y C, LENG D X. Mitigating jacket offshore platform vibration under earthquake and ocean waves utilizing tuned inerter damper[J]. Bulletin of Earthquake Engineering, 2023, 21(3): 1627-1650.
- [6] MA R S, BI K M, HAO H. Using inerter-based control device to mitigate heave and pitch motions of semi-submersible platform in the shallow sea [J]. Engineering Structures, 2020, 207: 110248.
- [7] WANG F C, YU C H, CHANG M L, et al. The performance improvements of train suspension systems with inerters[C]//Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, CA, USA. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2006: 1472-1477.
- [8] SOONG M F, RAMLI R, MAHADI W N L W. Vehicle suspensions with parallel inerter: Effectiveness in improving vibration isolation[J]. Journal of Vibroengineering, 2014, 16(1): 256-265.
- [9] DE DOMENICO D, IMPOLLONIA N, RICCIARDI G. Soil-dependent optimum design of a new passive vibration control system combining seismic base isolation with tuned inerter damper[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2018, 105: 37-53.
- [10] HASHIMOTO T, FUJITA K, TSUJI M, et al. Innovative base-isolated building with large mass-ratio TMD at basement for greater earthquake resilience[J]. Future Cities and Environment, 2017, 1: 9.
- [11] LEE C M, GOVERDOVSKIY V N, TEMNIKOV A I. Design of springs with "negative" stiffness to improve vehicle driver vibration isolation[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 302(4/5): 865-874.

- [12] PASALA D T R, SARLIS A A, NAGARAJAIAH S, et al. Adaptive negative stiffness: New structural modification approach for seismic protection[J]. *Journal of Structural Engineering*, 2013, 139(7): 1112–1123.
- [13] SHI X, ZHU S Y. Magnetic negative stiffness dampers[J]. *Smart Materials and Structures*, 2015, 24(7): 072002.
- [14] SHI X, ZHU S Y. Simulation and optimization of magnetic negative stiffness dampers[J]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2017, 259: 14–33.
- [15] 张也, 薛松岭, 常军. 基于负刚度的减振设备参数优化及其应用[J]. *地震工程与工程振动*, 2018, 38(2): 201–209.
ZHANG Ye, XUE Songling, CHANG Jun. Parameter optimization and application of vibration damping device based on negative stiffness[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Dynamics*, 2018, 38(2): 201–209. (in Chinese)
- [16] LI H, LIU M, OU J P. Negative stiffness characteristics of active and semi-active control systems for stay cables[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2008, 15(2): 120–142.
- [17] 程志鹏, 汪志昊, 郜辉, 等. 负刚度非线性黏滞阻尼器对斜拉索振动控制研究[J]. *振动工程学报*, 2022, 35(3): 652–62.
CHENG Zhipeng, WANG Zhihao, GAO Hui, et al. Nonlinear viscous dampers paralleled with negative stiffness for cable vibration control[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2022, 35(3): 652–62. (in Chinese)
- [18] YANG J, NING D, SUN S S, et al. A semi-active suspension using a magnetorheological damper with nonlinear negative-stiffness component[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 147: 107071.
- [19] SUMAN S, BALAJI P S, SELVAKUMAR K, et al. Nonlinear vibration control device for a vehicle suspension using negative stiffness mechanism[J]. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2021, 9(5): 957–966.
- [20] PLATUS D L, FERRY D K. Negative-stiffness vibration isolation improves reliability of nanoinstrumentation[J]. *Laser Focus World*, 2007, 43(10): 107–9.
- [21] YANG J, XIONG Y P, XING J T. Dynamics and power flow behaviour of a nonlinear vibration isolation system with a negative stiffness mechanism[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332(1): 167–183.
- [22] YE K, NYANGI P. H_{∞} optimization of tuned inerter damper with negative stiffness device subjected to support excitation[J]. *Shock and Vibration*, 2020, 2020: 7608078.
- [23] WANG H, GAO H, LI J, et al. Optimum design and performance evaluation of the tuned inerter-negative-stiffness damper for seismic protection of single-degree-of-freedom structures[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, 212: 106805.
- [24] TAI Y J, WANG H D, CHEN Z Q. Vibration isolation performance and optimization design of a tuned inerter negative stiffness damper[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, 241: 107948.
- [25] 王珏, 张莹, 黄隽, 等. 位移激励下含负刚度的惯容减振系统参数优化解析研究[J]. *振动工程学报*, 2023, 36(3): 804–14.
WANG Jue, ZHANG Ying, HUANG Su, et al. Analytical study on optimal inerter vibration absorbers with negative stiffness under displacement excitations[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2023, 36(3): 804–14. (in Chinese)
- [26] WANG J, ZHANG Y, LOOI D T. Analytical H_{∞} and H_2 optimization for negative-stiffness inerter-based systems[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, 249: 108261.
- [27] CRANDALL S H, MARK W D. *Random vibration in mechanical systems*[M]. New York: Academic Press, 2014.
- [28] WARBURTON G B. Optimum absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1982, 10(3): 381–401.
- [29] CHOWDHURY S, BANERJEE A, ADHIKARI S. The optimal design of dynamic systems with negative stiffness inertial amplifier tuned mass dampers[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2023, 114: 694–721.
- [30] CHOWDHURY S, BANERJEE A, ADHIKARI S. The optimal design of negative stiffness inerter passive dampers for structures[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, 258: 108551.
- [31] HU X Y, CHEN Q J, WENG D G, et al. Estimation of additional equivalent damping ratio of the damped structure based on energy dissipation[J]. *Advances in Civil Engineering*, 2019, 2019(1): 8052413.
- [32] LEUNG A Y T, ZHANG H J. Particle swarm optimization of tuned mass dampers[J]. *Engineering Structures*, 2009, 31(3): 715–728.
- [33] LI H, BI K M, HAO H. Effect of negative stiffness nonlinearity on the vibration control effectiveness of tuned negative stiffness inerter damper[J]. *Engineering Structures*, 2023, 293: 116641.
- [34] KIRAN K K, AL-OSTA M A, AHMAD S. Optimum design and performance of a base-isolated structure with tuned mass negative stiffness inerter damper[J]. *Scientific Reports*, 2023, 13(1): 4980.
- [35] ISLAM N U, JANGID R S. Closed form expressions for H_2 optimal control of negative stiffness and inerter-based dampers for damped structures[J]. *Structures*, 2023, 50: 791–809.
- [36] ANH N D, NGUYEN N X. Extension of equivalent linearization method to design of TMD for linear damped systems[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2012, 19(6): 565–573.
- [37] XU T C, LI Y C, LAI T, et al. A simplified design method of tuned inerter damper for damped civil structures: Theory, validation, and application[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2021, 28(9): e2798.
- [38] ASAMI T, NISHIHARA O, BAZ A M. Analytical solutions to H_{∞} and H_2 optimization of dynamic vibration absorbers attached to damped linear systems[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2002, 124(2): 284–295.

附录

$$f_1 = 2\kappa^9 (\kappa+1)^4$$

$$f_2 = \kappa^4 (\kappa+1)^2 (113.7\kappa^2 + 75.49\kappa + 15.99)$$

$$f_3 = -\kappa^2 (2298\kappa^3 + 1666\kappa^2 + 510\kappa + 63.99)$$

$$f_4 = (76.95\kappa^4 + 81.62\kappa^3 + 40.60\kappa^2 + 10.88\kappa + 1.28) \times 10^2$$

$$f_5 = -(28.18\kappa^2 + 15.64\kappa + 2.562) \times 10^2$$

$$f_6 = -(1322\kappa^4 + 877.7\kappa^3 + 248.4\kappa^2 + 32.37\kappa + 1.119) \times 10^2$$

$$f_7 = (319.5\kappa^4 + 244.3\kappa^3 + 85.83\kappa^2 + 15.79\kappa + 1.188) \times 10^3$$

$$f_8 = -(477.3\kappa^4 + 410.9\kappa^3 + 167.5\kappa^2 + 36.46\kappa + 3.356) \times 10^3$$

$$f_9 = (482.1\kappa^4 + 474.3\kappa^3 + 224.7\kappa^2 + 56.81\kappa + 6.032) \times 10^3$$

$$f_{10} = -(334.1\kappa^4 + 388.6\kappa^3 + 219\kappa^2 + 64.94\kappa + 7.970) \times 10^3$$

$$f_{11} = (153.2\kappa^4 + 224.3\kappa^3 + 157.1\kappa^2 + 55.97\kappa + 8.038) \times 10^3$$

$$f_{12} = -(74.17\kappa^3 + 80.03\kappa^2 + 36.37\kappa + 6.278) \times 10^3$$

$$f_{13} = (18.35\kappa^3 + 28.33\kappa^2 + 17.34\kappa + 3.775) \times 10^3$$

$$f_{14} = -(2.002\kappa^3 + 5.949\kappa^2 + 5.626\kappa + 1.679) \times 10^3$$

$$f_{15} = (5.46\kappa^2 + 10.85\kappa + 5.08) \times 10^2$$

$$f_{16} = -91(\kappa+1)$$

$$f_{17} = 7$$

$$g_0 = -3\kappa^8 (\kappa+1)^8$$

$$g_1 = 4\kappa^6 (\kappa+1)^6 (4\kappa^4 + 18\kappa^3 + 30\kappa^2 + 26\kappa + 9)$$

$$g_2 = -2\kappa^4 (\kappa+1)^4 (592.9\kappa^3 + 385.5\kappa^2 + 131\kappa + 23.99)$$

$$g_3 = -\kappa^3 (\kappa+1)^2 (2058\kappa^2 + 1128\kappa + 192)$$

$$g_4 = (331.9\kappa^5 + 324.4\kappa^4 + 135.3\kappa^3 + 28.49\kappa^2 + 2.56\kappa) \times 10^2$$

$$g_5 = (179.6\kappa^4 - 237.7\kappa^3 - 221.8\kappa^2 - 67.38\kappa - 7.681) \times 10^2$$

$$g_6 = -(8012\kappa^4 + 4509\kappa^3 + 972.2\kappa^2 + 64.71\kappa - 5.286) \times 10^2$$

$$g_7 = (2745\kappa^4 + 1817\kappa^3 + 540.5\kappa^2 + 84.89\kappa + 5.602) \times 10^3$$

$$g_8 = -(540.5\kappa^4 + 386\kappa^3 + 127.9\kappa^2 + 23.11\kappa + 1.835) \times 10^4$$

$$g_9 = (763.7\kappa^4 + 583.6\kappa^3 + 210.7\kappa^2 + 41.85\kappa + 3.669) \times 10^4$$

$$g_{10} = -(402.1\kappa^3 + 237.1\kappa^2 + 56.99\kappa + 5.555) \times 10^4$$

$$g_{11} = (409.7\kappa^3 + 249.8\kappa^2 + 64.23\kappa + 6.795) \times 10^4$$

$$g_{12} = -(307.3\kappa^3 + 205.1\kappa^2 + 58.51\kappa + 6.843) \times 10^4$$

$$g_{13} = (177.2\kappa^3 + 133.2\kappa^2 + 43.28\kappa + 5.704) \times 10^4$$

$$g_{14} = -(75.69\kappa^3 + 66.9\kappa^2 + 25.62\kappa + 3.905) \times 10^4$$

$$g_{15} = (22.41\kappa^3 + 24.9\kappa^2 + 11.82\kappa + 2.158) \times 10^4$$

$$g_{16} = -(40.64\kappa^3 + 64.14\kappa^2 + 40.74\kappa + 9.353) \times 10^3$$

$$g_{17} = (3.36\kappa^3 + 10.097\kappa^2 + 9.778\kappa + 3.041) \times 10^3$$

$$g_{18} = -30(24\kappa^2 + 48\kappa + 23)$$

$$g_{19} = 98(\kappa+1)$$

$$g_{20} = -6$$