

不同透水条件下海底饱和沉积层 动力响应特性分析

李腾达^{1,2}, 单振东^{1,2}, 李金恺^{1,2}, 景立平^{1,2}

(1. 中国地震局工程力学研究所 地震工程与工程振动重点实验室, 黑龙江 哈尔滨 150080;
2. 地震灾害防治应急管理部重点实验室, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 海床沉积层的透水条件可以直接影响其在地震中的动力响应特性, 但是在现有的理论研究中, 大部分都直接假设海床沉积层的底部为不透水边界。为此, 基于 Biot 饱和多孔介质理论, 通过求解沉积层瞬态响应和稳态响应的解析解或半解析解, 研究了沉积层底部透水条件对其在地震中动力响应特性的影响。研究表明, 在底部位移激励的条件下, 快波和慢波经过沉积层的不透水底部边界时会产生一类压缩波, 经过沉积层完全透水底部边界时会产生两类压缩波; 即使在相同的激励条件下, 不同透水性能的沉积层中产生的两类压缩波的振动幅值也具有非常显著的差异; 沉积层底部透水条件也会影响海床的频率响应特性, 低频时底部透水的沉积层的位移放大系数较大; 相反, 高频时底部不透水的沉积层的位移放大系数较大。

关键词: 海域地震; 动力响应; 透水边界条件; 饱和沉积层; 动力渗透系数

中图分类号: TU435

文献标识码: A

Analysis of dynamic response characteristics of seabed saturated sediment under different permeability conditions

LI Tengda^{1,2}, SHAN Zhendong^{1,2}, LI Jinkai^{1,2}, JING Liping^{1,2}

(1. Key Laboratory of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, Institute of Engineering Mechanics, China Earthquake Administration, Harbin 150080, China; 2. Key Laboratory of Earthquake Disaster Mitigation, Ministry of Emergency Management, Harbin 150080, China)

Abstract: The pervious conditions of seabed sediments can directly affect their dynamic response characteristics during earthquakes, but most existing theoretical studies directly assume that the bottom of the sediments was an impermeable boundary. Therefore, based on Biot's saturated porous media theory, through the analytical and semi-analytical solutions of the seabed transient response or steady-state response, the influence of the bottom water permeability conditions of the sedimentary layer on its dynamic response characteristics in earthquakes is studied. It is found that under the condition of bottom displacement excitation, fast wave or slow wave will generate the same type of compression wave when passing through the impermeable boundary of the sediment layer, and two types of compression waves will be generated when passing through the completely permeable boundary of the sediment layer. Even under the same excitation conditions, the vibration amplitudes of the two types of compression waves generated in the sediment layers with different permeabilities are significantly different. Permeable conditions at the bottom of the sediment layer also affect the frequency response characteristics of the seabed, and the displacement amplification coefficient of the bottom permeable sediment layer is large at low frequency. On the contrary, at high frequency, the displacement amplification coefficient of the bottom impermeable sediment layer is large.

收稿日期: 2023-02-04; 修回日期: 2023-05-08

基金项目: 国家自然科学基金项目 (U2039209, 41874067); 黑龙江省自然科学基金项目 (YQ2021D010)

作者简介: 李腾达 (1997—), 男, 硕士研究生, 主要从事岩土地震工程方面研究。E-mail: t13236010801@163.com

通讯作者: 单振东 (1985—), 男, 研究员, 博士, 主要从事岩土地震工程方面研究。E-mail: shanzhendong@gmail.com

Key words: sea area earthquake; dynamic response; permeable boundary conditions; saturated sedimentary layer; dynamic permeability coefficient

0 引言

近几十年来,随着人类对海洋的开发利用进程加快,海域工程逐渐增多,考虑到波浪荷载和海域地震对海域基础设施和海床稳定性的重要影响(如海床液化和海上工程结构物失稳等问题),以减少其对海洋工程的破坏、减轻经济损失等为目的的相关研究逐年增加,如 OHKAWA 等^[1]对沙质海床的水声探测的研究,LIU 等^[2]对波浪引起的海床液化的研究,LEE 等^[3]对海域结构物在地震动作用下的动力响应分析等。显然,对海床地震动特性进行深入且透彻地研究,具有重要的理论和工程意义。

自 BIOT^[4]建立多孔介质理论以来,大量学者开展了多孔介质动力特性的研究,其中关于海域地震动力学的解析和数值研究却是仍然有限^[5],依然有很多难题亟待解决。STOLL 等^[6]最早将海床视为各向同性半无限多孔介质,并影响了诸多学者的研究工作;现实中,海床通常会包括一层厚厚的沉积物,因此,海床实际上更像是具有下伏基岩的层状沉积物^[7]。在单层多孔介质海床的研究问题上,凌道盛等^[8-9]计算了任意竖向荷载作用下单层饱和多孔介质一维瞬态响应精确解以及半解析解,SHAN 等^[10]在此基础上计算了单层非饱和和海床的精确解等。海水层对沉积层海床的动力响应也存在影响,如 MUNJAL^[11]研究了斜入射平面波引起的动力反应问题;王进廷等^[12]分析了位于弹性半空间上的理想流体层的动力响应问题;MADEO 等^[13]研究了波在纯流体/多孔介质界面上的传播;YE 等^[14]、CHEN 等^[15-16]研究了地震作用下海床的液化问题;SHAN 等^[17-18]计算了单层以及多层海床的瞬态响应问题的解析解或半解析解;LI 等^[19]计算了具有一般流体-多孔介质界面的海床动力响应问题。WANG 等^[20]研究了海床在波浪荷载下的动力响应问题。

此外,流体-多孔介质-弹性基岩系统的海底沉积层模型也被广泛应用,在研究中,基岩可以被视作弹性半无限体,如 CHEN 等^[21-22]研究了斜入射声波的反射特性,并提出了能够考虑海水可压缩性的海底界面地震诱导动水压力的修正公式;WANG 等^[23-24]讨论了平面波在多孔介质以及基岩界面处的反射和透射问题等。考虑弹性基岩具体厚度的研究也不在少数,如 WANG 等^[25]计算了 P 波、SV 波入射在流体-多孔介质-固体系统内引起的动压解析解;张奎等^[26-27]研究了深水地基场地的动力响应问题和等效线性分析方法;WANG 等^[28]研究了波浪和地震引起的海床的动力响应问题等。

然而,在上述研究中,仅讨论了沉积层底部为不透水边界条件的模型,未考虑沉积层底部的透水性对动力响应的影响。实际工程中,沉积层底部边界的透水情况却并不容忽略,比如:饱和砂层中超静孔隙水压力的计算^[29]、软黏土的震陷^[30]和固结^[31-32]计算、饱和土动力响应特性计算^[33]等都需要考虑透水条件对计算结果的影响。

因此,本文通过特征函数展开法和精细时程积分法,得到海床在多种典型边界条件下的解析解或半解析解。通过算例,分别讨论了沉积层底部透水性能以及不同动力渗透系数对地震中海床瞬态响应和稳态响应特性的影响,有助于深入探讨地震波在海床中的传播和耗散特性。

1 基本方程和界面条件

为研究海床在地震中的动力响应特性,建立如图 1 所示模型。本文分别讨论了饱和沉积层底部为完全透水边界和不透水边界 2 种情况对海床瞬态响应的影响。

1.1 基本方程

假设海水为理想流体,则流体层中的位移 u_F 和流体压力 σ_F 可表示为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_F}{\partial z^2} &= \frac{1}{c_F^2} \frac{\partial^2 u_F}{\partial t^2} \\ -\sigma_F &= \lambda_F \frac{\partial u_F}{\partial z} \end{aligned} \quad (1)$$

式中: u_F 为流体层位移; σ_F 为流体层压力; c_F 为流体波速, $c_F = \sqrt{\lambda_F / \rho_F}$, ρ_F 为流体密度, λ_F 为流体体积模量。

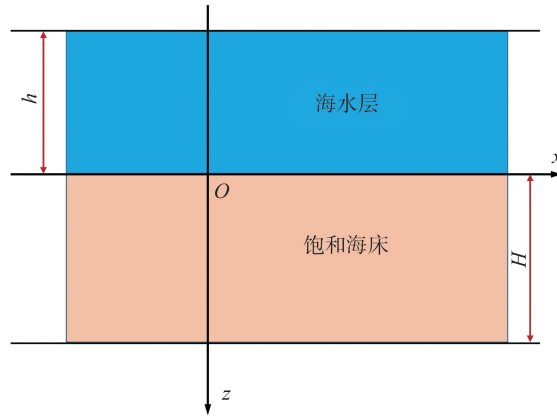


图 1 模型示意图

Fig. 1 Model diagram

根据 SIMON 等^[34]的推导,饱和多孔介质一维问题基本方程可表示为

$$\sigma = (\lambda + 2\mu)u_{,z} - \alpha p_F \tag{2}$$

$$-p_F = \alpha Q u_{,z} + Q w_{,z} \tag{3}$$

$$\sigma_{,z} = \rho u_{,zz} + \rho_F w_{,zz} \tag{4}$$

$$-p_{F,z} = \rho_F u_{,zz} + \frac{\rho_F}{n} w_{,zz} + \frac{1}{k_D} w_{,t} \tag{5}$$

式中: ρ 为多孔介质密度, $\rho = n\rho_F + (1-n)\rho_s$; ρ_s 为固体骨架密度; σ 为总应力; p_F 为流体压力; u 为固体骨架位移; w 为相对流体位移 $w = n(\bar{w} - u)$, 其中, \bar{w} 为流体位移, n 为孔隙度, k_D 为动力渗透系数, $k_D = k_f / \rho_F g$, k_f 为达西渗透系数; Q 和 α 为描述土骨架、固体颗粒可压缩性和流体可压缩性的参数,且 $1/Q = (\alpha - n) / K_s + n / \lambda_F$, $\alpha = 1 - K_b / K_s$, K_b 为固体骨架体积模量, K_s 为固体颗粒体积模量。

将式(2)~式(5)以位移的形式来表达,则有

$$K u_{,zz} - M u_{,zz} - C u_{,t} = 0 \tag{6}$$

式中:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu + \alpha^2 Q & \alpha Q \\ \alpha Q & Q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho & \rho_F \\ \rho_F & \rho_F / n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/k_D \end{bmatrix}$$

1.2 边界条件、连续条件和初始条件

根据建立的海床模型底部边界条件,为分析对该模型施加底部应力激励以及底部位移激励时的瞬态响应,设定以下 4 种边界条件:

$$\sigma_F(-h) = f_1(t), \quad u(H) = f_2(t), \quad p_F(H) = f_3(t) \tag{7}$$

$$\sigma_F(-h) = f_1(t), \quad u(H) = f_2(t), \quad w(H) = f_3(t) \tag{8}$$

$$\sigma_F(-h) = f_1(t), \quad \sigma(H) = f_2(t), \quad p_F(H) = f_3(t) \tag{9}$$

$$\sigma_F(-h) = f_1(t), \quad \sigma(H) = f_2(t), \quad w(H) = f_3(t) \tag{10}$$

式中,使 $p_F(H) = 0$ 可表示模型底部完全透水边界,使 $w(H) = 0$ 可表示模型底部为不透水边界。通过调节 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 可以分别给该模型施加不同的顶部和底部激励,在后文中简称式(7)为 up 边界条件,简称式(8)为 uw 边界条件,简称式(9)为 σp 边界条件,简称式(10)为 σw 边界条件。

根据流体和饱和多孔介质的性质,流体层和饱和多孔介质层之间的界面(即 $z = 0$ 处)满足以下 3 个界面条件:

$$\sigma(0, t) = -\sigma_F(0, t) \tag{11}$$

$$p_F(0, t) = \sigma_F(0, t) \tag{12}$$

$$u_F(0, t) = u(0, t) + w(0, t) \tag{13}$$

假设流体层-饱和多孔介质层系统的初始位移和初始速度为 0,则应满足如下条件:

$$u_F = u_{F,t} = 0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_{,t} = 0 \tag{14}$$

以 up 边界条件为例,介绍求解方法。碍于篇幅限制,后 3 种边界条件结果在附录 A 中给出。此时,基本方程(1)和方程(2)~方程(5)的定解条件即为 up 边界条件(7)、界面条件(11)、(12)、(13)和初始条件(14)。

2 瞬态响应解的推导

对于动力渗透系数 $k_D \rightarrow \infty$ 的特殊情况,文中采用了特征函数展开法和待定系数法来求解饱和沉积层的瞬态响应。在这种情况下,我们可以直接得到其解析解。对于具有任意动态透系数的一般情况,文中则需要采用精细时程积分法进行求解。

2.1 非齐次边界条件的变换

为了满足特征函数展开法的使用条件,首先应该将非齐次边界条件进行齐次化处理。为此,将流体层和饱和多孔介质层中的位移分别分为

$$u_F(z) = u_F^d(z) + u_F^s(z) \quad (15)$$

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{u}^d + \mathbf{u}^s = \begin{Bmatrix} u^d \\ w^d \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u^s \\ w^s \end{Bmatrix} \quad (16)$$

式中: $u_F^d(z)$ 和 $\mathbf{u}^d(z)$ 为动态解; $u_F^s(z)$ 和 $\mathbf{u}^s(z)$ 为静态解,且应满足 up 边界条件(7)、界面条件(11)、(12)、(13)以及初始条件(14),此时,可设 u_F 、 u 、 w 的静态解形式为

$$u_F^s(z) = \frac{f_1(t)}{2h\lambda_F} z^2 + f_2(t), \quad u^s(z) = f_2(t), \quad w^s(z) = -\frac{f_3(t)}{2HQ} z^2 \quad (17)$$

将方程(15)、方程(16)代入 up 边界条件(7),得

$$\sigma_F^d(-h) = 0, \quad u^d(H) = 0, \quad p_F^d(H) = 0 \quad (18)$$

此时, up 边界条件的齐次化就已经得到实现。

同样的,将方程(15)、方程(16)代入界面条件(11)、(12)、(13),得

$$\sigma^d(0,t) = -\sigma_F^d(0,t), \quad p_F^d(0,t) = \sigma_F^d(0,t), \quad u_F^d(0,t) = u^d(0,t) + w^d(0,t) \quad (19)$$

将方程(15)、方程(16)代入初始条件(14),得

$$u_{F,t}^d(z,0) = -u_{F,t}^s(z,0), \quad u_F^d(z,0) = -u_F^s(z,0) \quad (20)$$

$$\mathbf{u}_{,t}^d(z,0) = -\mathbf{u}_{,t}^s(z,0), \quad \mathbf{u}^d(z,0) = -\mathbf{u}^s(z,0) \quad (21)$$

通过代入方程(19)、方程(20),基本方程(1)~(5)也可以转换为

$$u_{F,zz}^d + u_{F,zz}^s = c_F^{-2} u_{F,tt}^d + c_F^{-2} u_{F,tt}^s \quad (22)$$

$$\mathbf{K}u_{,zz}^d - \mathbf{M}u_{,tt}^d - \mathbf{C}u_{,t}^d = \mathbf{S}(t) \quad (23)$$

式中,

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{M}u_{,tt}^s + \mathbf{C}u_{,t}^s - \mathbf{K}u_{,zz}^s \quad (24)$$

此时,非齐次边值问题已成功地转化为齐次边值问题,在已知边界条件(18)、界面条件(19)和初始条件(20)、(21)的情况下,我们通过使用特征函数展开法即可对方程(22)、方程(23)进行求解。

2.2 方程求解

基本方程(22)、方程(23)的特征方程为

$$u_{F,zz}^d - c_F^{-2} u_{F,tt}^d = 0 \quad (25)$$

$$\mathbf{K}u_{,zz}^d - \mathbf{M}u_{,tt}^d = 0 \quad (26)$$

方程(25)、方程(26)的解为

$$u_F^d = U_F^d \exp(-i\omega t) \quad (27)$$

$$u^d = U^d \exp(-i\omega t), \quad w^d = W^d \exp(-i\omega t) \quad (28)$$

式中: U_F^d 、 U^d 和 W^d 分别为 u_F 、 u 和 w 的本征函数, ω 是特征值,且为非负实数 i 为虚数单位。将方程解(27)、(28)代入到特征方程(25)、(26),当 $\omega = 0$ 时,得

$$U_{F,zz}^d = 0, \quad \mathbf{K} \begin{Bmatrix} U_{,zz}^d \\ W_{,zz}^d \end{Bmatrix} = 0 \quad (29)$$

为满足等式(29),通过推导, U_F^d 、 U^d 和 W^d 应存在如下关系:

$$U_F^d = W^d = c, \quad U^d = 0 \quad (30)$$

而在 $\omega > 0$ 时,根据方程(24)、方程(25)和其方程解(26)、(27),得

$$U_{F,zz}^d = -\omega^2 c_F^{-2} U_F^d \tag{31}$$

$$K U_{,zz}^d = -\omega^2 M U^d \quad \omega > 0 \tag{32}$$

通过使用状态空间法,可以得到其解的形式为

$$X_F(z) = Z_F(z) X_F(-h), \quad X(z) = Z(z) X(0) \tag{33}$$

式中,

$$X_F(z) = \left\{ -\sum_F^d, U_F^d \right\}^T, \quad X(z) = \left\{ \sum^d, -P^d, U^d, W^d \right\}^T$$

$$Z_F(z) = \exp[N_F(z+h)], \quad Z(z) = \exp[Nz]$$

式中, \sum^d 和 P^d 是有关于 σ 和 p_F 的本征函数,矩阵指数函数 $\exp[N_F(z+h)]$ 等以及后文中涉及到有关其他矩阵指数函数的相关计算,可以通过使用 Hamilton-Cayley 定理^[35]求得,此处不作叙述。

通过使用界面条件(19)和方程(32),得到以下结果:

$$X(z) = V(z) \left\{ \begin{matrix} X_F(-h) \\ W^d(0) \end{matrix} \right\}, \quad V(z) = Z(z) Y \left\{ \begin{matrix} Z_F(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\} \tag{34}$$

式中,

$$N_F = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_F \omega^2 c_F^{-2} \\ \lambda_F^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 M \\ N_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

将边界条件(18)中的后两项代入到方程(33),得

$$\begin{bmatrix} v_{22}(H) & v_{23}(H) \\ v_{32}(H) & v_{33}(H) \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} U_F^d(-h) \\ W^d(0) \end{matrix} \right\} = 0 \tag{35}$$

式中, v_{ij} 为矩阵 V 的元素。可以看出,当且仅当系数矩阵的行列式等于 0 时,上述方程具有非零解,因此,得到关于 ω 的特征方程为

$$v_{22}(H)v_{33}(H) - v_{23}(H)v_{32}(H) = 0 \tag{36}$$

方程(35)拥有无限个正根,从最小到最大使用 $\omega_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ 来表示。根据方程(35),还可以得到, $\{U_F^d(0), W^d(0)\}^T$ 的非零解:

$$U_F^d(-h) = 1, \quad W^d(0) = -v_{22k}(H)/v_{23k}(H) \tag{37}$$

式中, $k (k = 1, 2, 3, \dots)$ 对应所求得特征值 ω_k 。

根据上述推导,可将本征函数写成:

$$U_{Fk}^d = z_{F22k}(z) \tag{38}$$

$$U_k^d = \left\{ \begin{matrix} U_k^d(z) \\ W_k^d(z) \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} v_{32k}(z) & v_{33k}(z) \\ v_{42k}(z) & v_{43k}(z) \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -v_{22k}(H) \\ v_{23k}(H) \end{matrix} \right\} \tag{39}$$

对于所得上述特征函数的正交性的验证,SHAN 等^[17]已经给出过类似的推导,本文中不再作叙述。关于正交关系的等式为

$$\int_{-h}^0 U_{Fp}^d \lambda_F c_F^{-2} U_{Fq}^d dz + \int_0^H [U_q^d]^T M U_p^d dz = \begin{cases} 0 & p \neq q \\ G_p & p = q \end{cases} \tag{40}$$

式中, G_p 为一个与特征函数正交关系相关的一个可以求得的函数。

根据待定系数法和线性叠加原理,方程(22)、方程(23)的解为

$$u_F^d(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_{Fk}^d(z) \Omega_k(t) \tag{41}$$

$$u^d(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^d(z) \Omega_k(t) \tag{42}$$

式中, $U_{Fk}^d(z)$ 和 $U_k^d(z)$ 的表达式见式(38)和式(39), $\Omega_k(t)$ 是一个未知函数,可根据初始条件(20)、(21)在下文中求得。

在动力渗透系数 $k_p \rightarrow \infty$ 时,利用初始条件(20)、(21)和正交关系(39),得

$$\Omega_{p,u}(t) + \omega^2 \Omega_p(t) = \bar{S}(t) \tag{43}$$

式中,

$$\bar{S}(t) = -G_p^{-1} \int_0^H [U_p^d]^T S(t) dz - G_p^{-1} \int_{-h}^0 U_{Fp}^d \lambda_F [c_F^{-2} u_{F,u}^s(t) - u_{F,zz}^s] dz$$

求解得到:

$$\Omega_p(t) = \alpha_{T0}(t) \Omega_p(0) + \alpha_{T0}(t) \int_0^t \alpha_{T1}(-\xi) \bar{S}(\xi) d\xi + \alpha_{T1}(t) \Omega_{p,t}(0) + \alpha_{T1}(t) \int_0^t \alpha_{T0}(-\xi) \bar{S}(\xi) d\xi \quad (44)$$

式中 α_{T0} 、 α_{T1} 、 $\Omega_p(0)$ 和 $\Omega_{p,t}(0)$ 可通过使用状态空间方法求得。

此时,根据式(15)、式(16),将所求得的动态解与预设的静态解(7)以及 $\omega = 0$ 时所预设的解(29)求和,即可得到流体层中的位移 $u_F(z,t)$ 和饱和多孔介质中的位移 $\mathbf{u}(z,t)$,其表达式为

$$u_F(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_{Fk}^d(z) \Omega_k(t) + u_F^s + u_{F\omega 0}^d \Omega_{\omega 0}(t) \quad (45)$$

$$\mathbf{u}(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^d(z) \Omega_k(t) + \mathbf{u}^s + \mathbf{u}_{\omega 0}^d \Omega_{\omega 0}(t) \quad (46)$$

式中: $\Omega_{\omega 0}(t)$ 为在 $\omega = 0$ 时所求得的 $\Omega(t)$; $u_{F\omega 0}^d = 1$; $u_{\omega 0}^d = \{0, 1\}^T$ 。

对于动力渗透系数为其他情形时,可以使用精细时程积分法来求解 $\Omega(t)$,具体求解过程可参考 SHAN 等^[17]。

3 稳态响应解的推导

模型波场可写为如下形式。

流体层:

$$u_F = A_u \exp[i(-k_{uF}z - \omega t)] + A_d \exp[i(k_{dF}z - \omega t)] \quad (47)$$

式中, A_u 和 A_d 分别为流体层中上行波和下行波引起的相应振幅。根据等式(1),得

$$k_{uF} = k_{dF} = \frac{\omega}{c_F} \quad (48)$$

沉积层:

$$u = \sum_{n=1}^2 B_{un} \exp[i(-k_{un}z - \omega t)] + \sum_{n=1}^2 B_{dn} \exp[i(k_{dn}z - \omega t)] \quad (49)$$

$$w = \sum_{n=1}^2 \delta_{Pn} B_{un} \exp[i(-k_{un}z - \omega t)] + \sum_{n=1}^2 \delta_{Pn} B_{dn} \exp[i(k_{dn}z - \omega t)] \quad (50)$$

式中, B_{u1} 和 B_{u2} 分别为沉积层中两类上行波所引起的相应振幅; B_{d1} 和 B_{d2} 分别为沉积层中两类下行波所引起的相应振幅,式中波数以及沉积层中的固相和液相相关振幅比 δ_{Pn} 的求解过程及表达式见附录 B。

通过边界条件(7)以及界面条件(11)、(12)、(13),结合等式(46)、(48)、(49),即

$$\mathbf{M}[A_u, A_d, B_{u1}, B_{u2}, B_{d1}, B_{d2}]^T = \mathbf{N} \quad (51)$$

式中,矩阵 \mathbf{M} 和 \mathbf{N} 见附录 C。通过求解上述线性方程组,即可给出未知系数表达式。将系数代入方程中即可给出位移。

4 数值算例

为研究沉积层底部透水条件对两类压缩波(快波 P1 和慢波 P2)传播特性的影响。本节对比分析了模型在不同底部边界条件下(即 u_p 、 uw 、 σ_p 和 σ_w 边界条件)的瞬态响应特性。本文解是级数形式的解,在数值计算中应进行截断处理,其精度取决于截断阶数。以下算例中,当 $k_D \rightarrow \infty$ 时取前 2000 项,其他情形下取前 500 项时,已经可以看到吉布斯现象不明显,能够确保计算的精确度。采用材料参数为: $\lambda = 14.47 \times 10^7$ Pa, $\mu = 9.8 \times 10^7$ Pa, $K_s = 1.1 \times 10^{10}$ Pa, $\lambda_F = 2.25 \times 10^9$ Pa, $\rho_f = 1000$ kg/m³, $\rho_s = 2700$ kg/m³, $n = 0.48$ 。

4.1 瞬态响应分析

假设沉积层底部受到单个正弦载荷激励,即

u_p 边界条件:

$$\sigma_F(-h) = 0, u(H) = f_2(t), p_F(H) = 0$$

uw 边界条件:

$$\sigma_F(-h) = 0, u(H) = f_2(t), w(H) = 0$$

式中,

$$f_2(t) = \begin{cases} \sin(2000\pi t) & 0 \leq t \leq 0.001 \text{ s} \\ 0 & t > 0.001 \text{ s} \end{cases}$$

上述 2 种边界条件外加激励相同,但前者表示模型底部完全透水,而后者表示模型底部不透水。

图 2 显示了动力渗透系数趋于无穷大时,0.005 s 到 0.07 s 之间几个时间点海水层和沉积层内压缩波的传播情况,其中,*z* 在 0~20 m 时为饱和沉积层,*z* 在 -10~0 m 时为海水层。由于部分波多次反射或多次经过流固界面后,其实产生的幅值很小,为便于分析,0.05~0.07 s 的图例中只标注重要的波,图例主要使用几种不同的颜色以区分不同原因下出现的波。

首先以 *up* 边界条件进行说明,由图 2 可知,P1 波(黑色)到达流体-固体界面时会在流体层中产生一个透射波 P,在沉积层中产生 2 个反射波 P1 和 P2(绿色);海水层中 P(绿色)在流-固界面会产生一个反射 P 波和 2 个透射波 P1 和 P2(蓝色)。需要注意的是,由于底部边界的透水性不同,P1 波(绿色)到达不透水边界时,会产生一个反射波;但是,P1 波(绿色)到达完全透水边界时,会产生 2 个反射波,即多产生一个 P12 波(绿色),同样的还可以看到,由 P2 波(绿色)经过完全透水边界时额外产生的 P22 波(绿色),P1 波(蓝色)波经过完全透水边界时额外产生的 P12 波(蓝色),P1 波(橙色)经过完全透水边界时额外产生的 P12 波(橙色)。两类压缩波本质上是由于流体与固体之间的相对位移所引起的,在渗透系数很大时,两类压缩波都能被明显的观测,而当渗透系数很小时,第二类压缩波幅值很小,且在传播初始阶段就很快消散。由于底部边界条件的不同,在不透水边界处,假设的边界条件为 $w(H) = 0$,此时流固之间没有相对位移,而在完全透水边界处 $w(H) \neq 0$,流固之间存在相对位移,因而当波抵达完全透水边界时,会额外产生一类压缩波,即图中标示的 P12 波(绿色)、P22 波(绿色)、P12 波(蓝色)和 P12 波(橙色)。

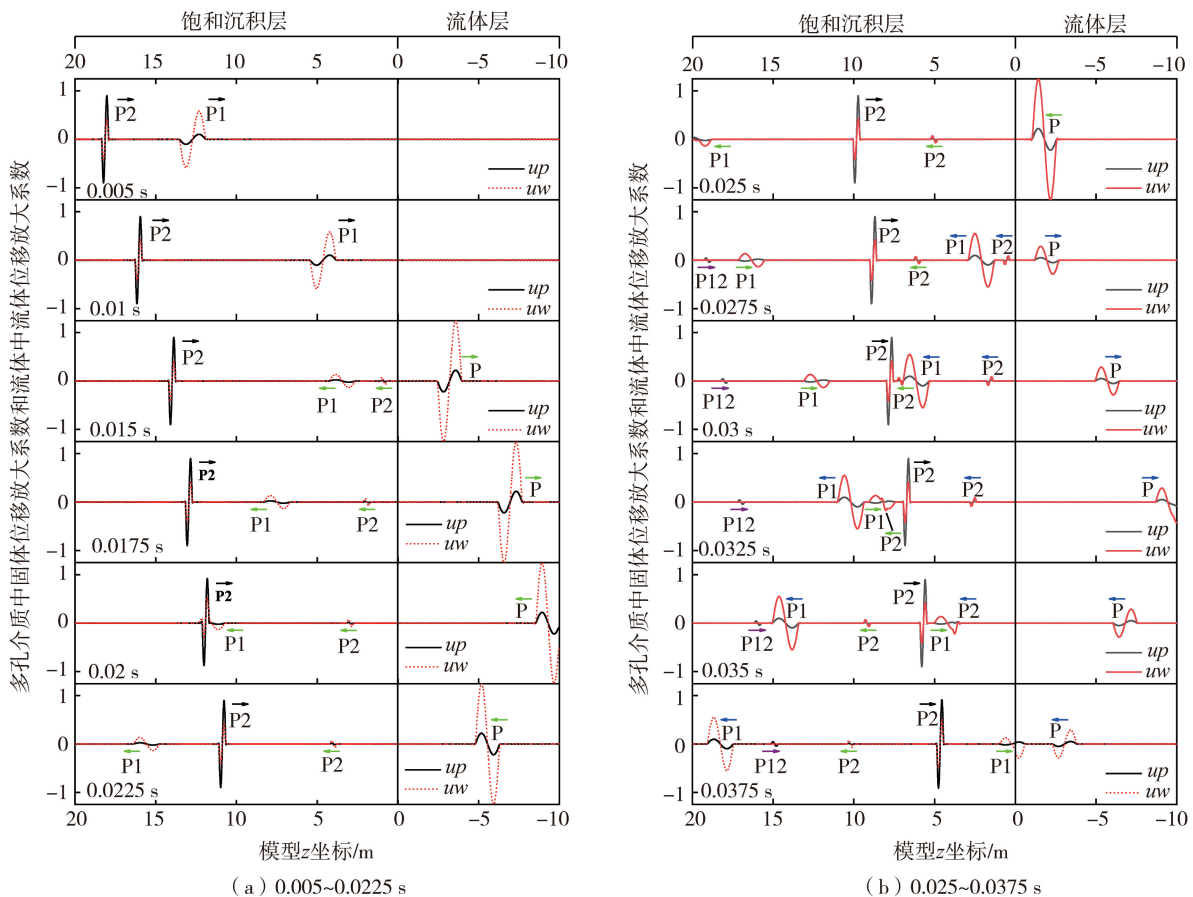


图 2 流体-饱和多孔介质系统在不同时间的位移分布

Fig. 2 Displacement distribution of fluid-saturated porous media system at different times

相同激励条件下,不同透水性能的沉积层中产生的两类压缩波的幅值具有显著的差异。如图2中黑色标记所示,不透水边界产生的P1波幅值要远大于完全透水边界产生的P1波幅值;P2波刚好相反,完全透水边界产生的P2波幅值要远大于不透水边界产生的P2波幅值。出现这一现象的原因是:当底部边界不透水时,可以认为渗透系数很小,在底部输入正弦荷载后,此时的P2波会在较短的时间内快速消散,且其产生的幅值相对较小;当底部边界完全透水时,可以认为渗透系数无穷大,在底部输入正弦荷载后,此时产生的P2波产生的幅值相对较大。

假设沉积层底部受到位移阶跃载荷激励,则

up 边界条件:

$$\sigma_F(-h) = 0, u(H) = u_0, p_F(H) = 0, u_0 = 1$$

uw 边界条件:

$$\sigma_F(-h) = 0, u(H) = u_0, w(H) = 0, u_0 = 1$$

不同动力渗透系数时, up 边界条件下和 uw 边界条件下的饱和沉积层中 $z = 2 \text{ m}$ 处的固体位移放大系数随时间变化曲线,如图3所示。如图3(a)、(b)所示,在动力渗透系数 k_D 较大时,沉积层底部透水性能对其固体位移响应影响较大。2条曲线的振动周期不同、位移峰值大小和出现时间不同。由图可知,P1和P2初次到达观测点时,2种边界条件产生的位移幅值存在着显著差异,即在不透水边界条件下,P1产生的位移放大系数约为0.6,明显大于完全透水边界条件时的0.1左右的位移放大系数;在完全透水边界条件下,P2产生的位移放大系数约为1左右,明显大于完全透水边界条件下产生的0.4左右的位移放大系数。

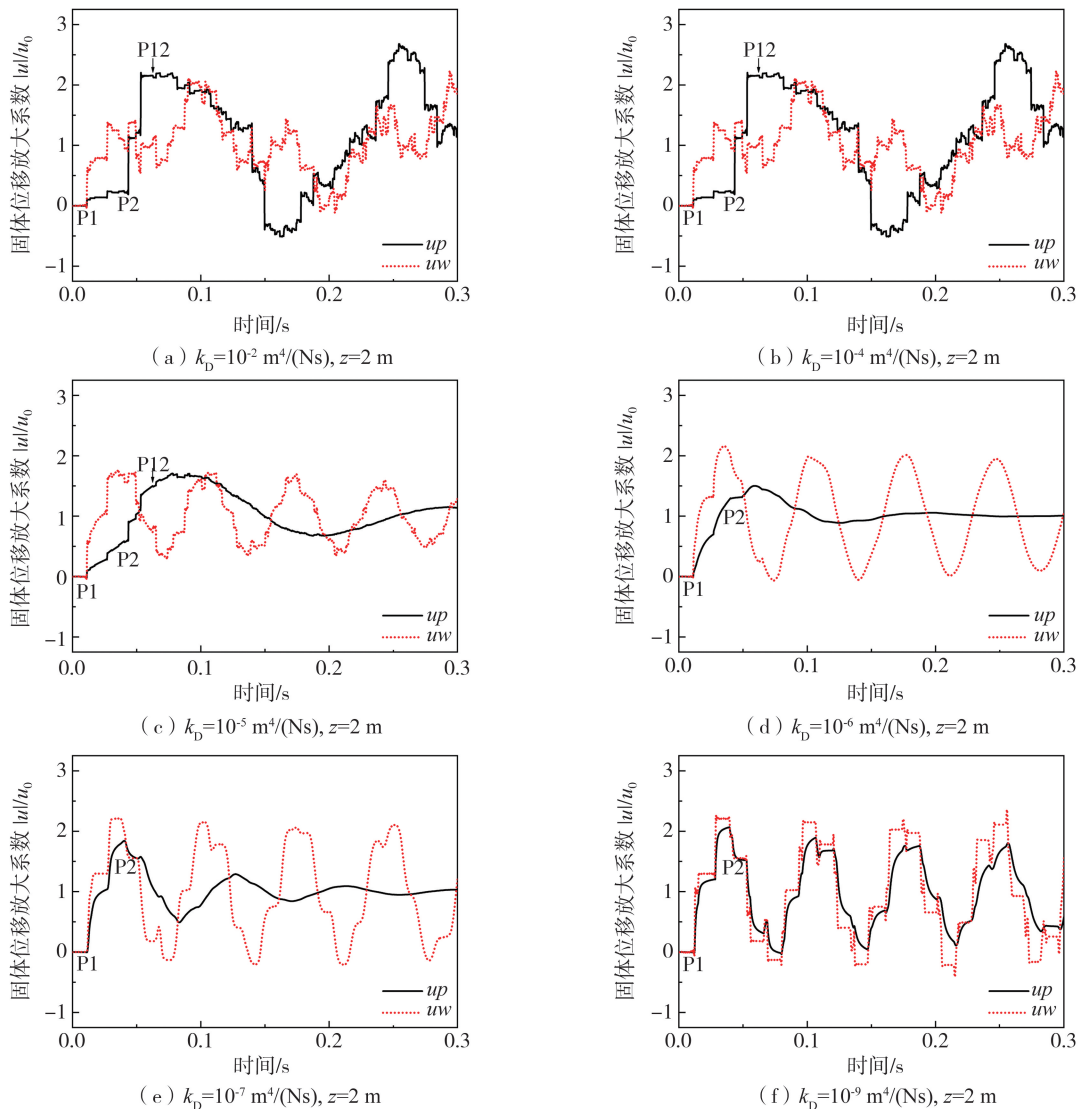


图3 $z = 2 \text{ m}$ 处多孔介质层固体位移放大系数随时间变化图

Fig. 3 Diagram of solid displacement amplification coefficient of porous media layer at a depth of $z = 2 \text{ m}$ changing with time

如图 3(c)~(e)所示, up 边界条件下压缩波在 $k_D = 10^{-6} \text{ m}^4/(\text{Ns})$ 时耗散最快, uw 边界条件下压缩波在 $k_D = 10^{-5} \text{ m}^4/(\text{Ns})$ 时耗散最快。与 uw 边界条件的模型相比, up 边界条件下模型压缩波耗散速度更快, 振动峰值偏小, 其放大系数峰值差最大能达到 1 左右。如图 3(e)所示, up 边界条件下产生的时间位移曲线与 uw 边界条件下产生的时间位移曲线开始趋于接近。当动力渗透系数继续减小时, 如图 3(f)所示, 在 2 种边界条件下, P1 产生的位移幅值基本相同, P2 产生的位移幅值分别也开始接近, 两类波产生的唯一幅值差异减少, 完全透水条件下产生的反射波 P12 也不能被明显观测到, 说明底部界面的透水性对于饱和沉积层固体位移影响逐渐减小, 最终趋于相同。

4.2 稳态响应分析

在沉积层底部施加 $u = u_0 \exp[-i\omega t]$ 的位移荷载时, 不同透水条件下沉积层表面 ($z = 0 \text{ m}$ 处) 位移放大系数随频率变化曲线如图 4 所示。

沉积层底部透水条件会影响模型的频率响应特性, 如图 4(b)~(f)所示, 低频时 up 模型的位移放大系数较大; 相反, 高频时 uw 模型的位移放大系数较大。

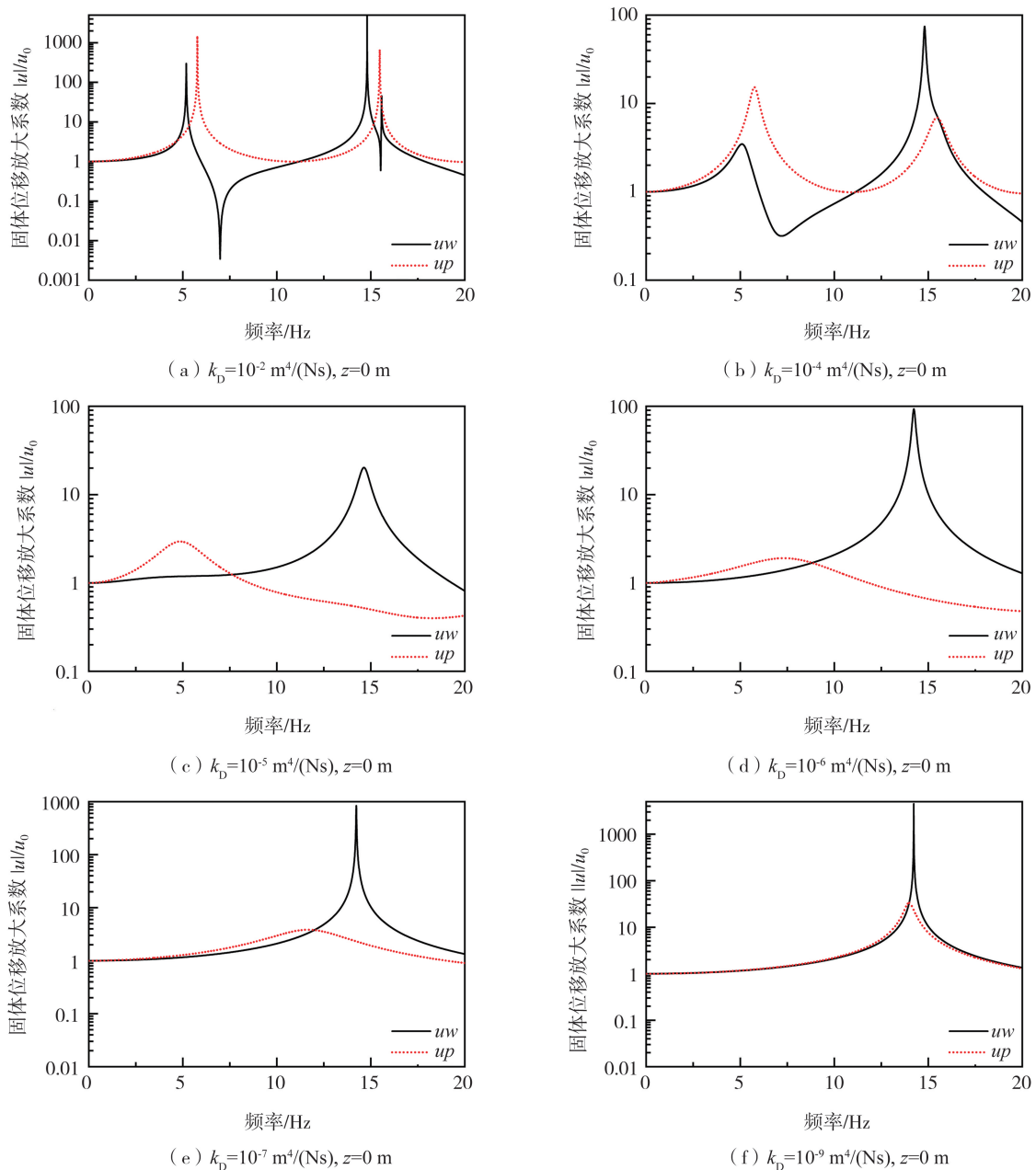


图 4 $z = 0 \text{ m}$ 处沉积层位移放大系数随频率变化

Fig. 4 Displacement amplification coefficient of sedimentary layer at a depth of $z = 0 \text{ m}$ changing with frequency

动力渗透系数的大小可以影响到多孔介质内流体与固体的耦合情况,因此,不同动力渗透系数的沉积层,底部透水条件对模型频率响应特性的影响不尽相同。由于两类压缩波的产生是流体与固体之间的位移引起的,在动力渗透系数较大时,沉积层内流固相对位移较大,所以压缩波产生的幅值较大,此时沉积层的固体位移放大系数也较大,且沉积层底部透水条件对位移放大系数影响异常显著。当动力渗透系数 k_D 的较小时,沉积层内流体与固体相对位移很小,沉积层基本可以视作单相介质,因此沉积层的固体位移放大系数也有所减小,且透水条件对位移放大系数的影响变小,如图4(f)所示。

另外,曲线中位移放大系数峰值对应着模型的固有频率。当沉积层动力渗透系数较大时,流固间耦合较小,图4(a)、(b)中出现了多个峰值。随着动力渗透系数逐渐减小,流固间耦合逐渐增大,图4(c)~(f)中仅出现了1个峰值,且 uw 模型曲线峰值对应固有频率变动较小, up 模型固有频率有较大的变化。

不同动力渗透系数条件下位移放大系数随深度变化情况如图5所示。由图可知,在频率2 Hz地震波作用下, up 模型位移放大系数整体都大于 uw 模型位移放大系数,这与从图4中观察到的现象相同。

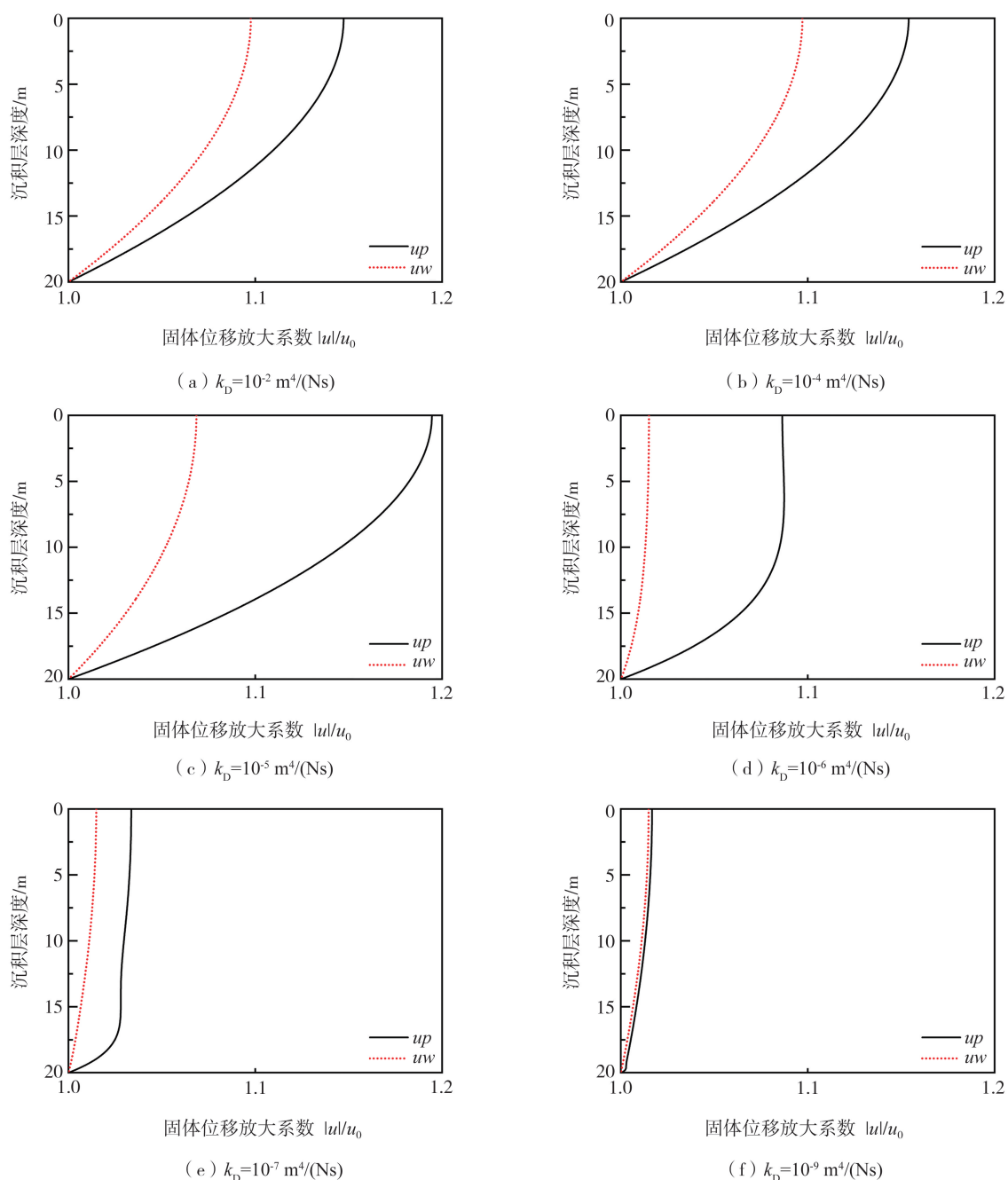


图5 $\omega=4\pi$ rad/s 时沉积层位移放大系数随深度变化

Fig. 5 Displacement amplification coefficient of sedimentary layer changing with depth when $\omega=4\pi$ rad/s

5 结论

本文给出了海域场地中饱和和沉积层在多种边界条件下瞬态响应和稳态响应的解析解以及半解析解。研究了沉积层底部透水性能和动力渗透系数对其动力响应特性的影响,分析了两类压缩波在不同边界条件下波动特性的差异。通过建立上文所述模型,采用所给定的参数,主要得到如下结论:

1) 在相同底部位移激励条件下,沉积层不透水的底部边界会产生一类反射波,完全透水的底部边界会产生两类反射波。

2) 在相同底部位移激励条件下,透水条件对两类压缩波产生的振动幅值存在着显著的影响,即相较于底面完全透水的沉积层,波 P1 在底面不透水的沉积层中产生的振动幅值明显更大,而 P2 的情况则刚好相反。

3) 在相同底部位移激励条件下,底部不透水的沉积层在高频时(10 Hz 以上)位移放大系数普遍较大,底部透水的沉积层在低频时(10 Hz 以下)位移放大系数普遍较大。

4) 在相同底部位移激励条件下,沉积层的固有频率受底部透水性能的影响,且随着动力渗透系数的减小,底部不透水的沉积层的固有频率基本稳定在 15 Hz 上下,其变化较小,底部透水的沉积层的固有频率则是逐渐增大,并最终趋近于 15 Hz。

参考文献:

- [1] OHKAWA K, YAMAOKA H, YAMAMOTO T. Acoustic backscattering from a sandy seabed[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2005, 30(4): 700-708.
- [2] LIU Z, JENG D S, CHAN A H C, et al. Wave-induced progressive liquefaction in a poro-elastoplastic seabed: A two-layered model[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2009, 33(5): 591-610.
- [3] LEE J H, KIM J K. Dynamic response analysis of a floating offshore structure subjected to the hydrodynamic pressures induced from seaquakes[J]. Ocean Engineering, 2015, 101: 25-39.
- [4] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. low-frequency range[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1956, 28(2): 168-178.
- [5] YE J H. Seismic response of poro-elastic seabed and composite breakwater under strong earthquake loading[J]. Bulletin of Earthquake Engineering, 2012, 10(5): 1609-1633.
- [6] STOLL R D, KAN T K. Reflection of acoustic waves at a water-sediment interface[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1981, 70(1): 149-156.
- [7] CHEN W Y, HUANG Y, WANG Z H, et al. Horizontal and vertical motion at surface of a gassy ocean sediment layer induced by obliquely incident SV waves[J]. Engineering Geology, 2017, 227: 43-53.
- [8] 凌道盛, 房志辉, 单振东. 单层饱和多孔介质一维瞬态响应半解析解[J]. 岩石力学与工程学报, 2011, 30(8): 1683-1689.
LING Daosheng, FANG Zhihui, SHAN Zhendong. A semi-analytical solution for one-dimensional transient response of single layered saturated porous media[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2011, 30(8): 1683-1689. (in Chinese)
- [9] 凌道盛, 王筠, 单振东, 等. 单层非饱和多孔介质一维瞬态响应半解析解[J]. 岩土力学, 2014, 35(1): 25-34.
LING Daosheng, WANG Yun, SHAN Zhendong, et al. A semi-analytical solution for one-dimensional transient response of single-layer unsaturated porous media[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, 35(1): 25-34. (in Chinese)
- [10] SHAN Z D, LING D S, DING H J. Exact solutions for the one-dimensional transient response of unsaturated single-layer porous media[J]. Computers and Geotechnics, 2013, 48: 127-133.
- [11] MUNJAL M L. Response of a multi-layered infinite plate to an oblique plane wave by means of transfer matrices[J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 162(2): 333-343.
- [12] 王进廷, 金峰, 张楚汉. 位于弹性半空间上的理想流体层动力反应—平面 P 波入射[J]. 工程力学, 2003, 20(6): 12-17.
WANG Jinting, JIN Feng, ZHANG Chuhan. Dynamic response of ideal fluid layer overlying elastic half-space due to P-wave incidence[J]. Engineering Mechanics, 2003, 20(6): 12-17. (in Chinese)
- [13] MADEO A, GAVRILYUK S. Propagation of acoustic waves in porous media and their reflection and transmission at a pure-fluid/porous-medium permeable interface[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2010, 29(5): 897-910.
- [14] YE J H, WANG G. Seismic dynamics of offshore breakwater on liquefiable seabed foundation[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2015, 76: 86-99.
- [15] CHEN W Y, JENG D, CHEN G X, et al. Momentary liquefaction of porous seabed under vertical seismic action[J]. Applied Ocean Research, 2018, 73: 80-87.
- [16] CHEN W Y, WANG Z H, CHEN G X, et al. Effect of vertical seismic motion on the dynamic response and instantaneous liquefaction in a

- two-layer porous seabed[J]. *Computers and Geotechnics*, 2018, 99: 165–176.
- [17] SHAN Z D, LING D S, XIE Z N, et al. A semianalytical solution for one-dimensional transient wave propagation in a saturated single-layer porous medium with a fluid surface layer[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2019, 43(13): 2184–2199.
- [18] SHAN Z D, JING L P, ZHANG L, et al. Transient wave propagation in a multi-layered soil with a fluid surface layer: 1D analytical/semi-analytical solutions[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2021, 45(13): 2001–2015.
- [19] LI J K, SHAN Z D, LI T D, et al. Effects of the fluid-solid interface conditions on the dynamic responses of the saturated seabed during earthquakes[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2023, 165: 107728.
- [20] WANG G, CHEN S, LIU Q, et al. Wave-induced dynamic response in a poroelastic seabed[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2018, 144(9): 06018008.
- [21] CHEN W Y, WANG Z H, ZHAO K, et al. Reflection of acoustic wave from the elastic seabed with an overlying gassy poroelastic layer[J]. *Geophysical Journal International*, 2015, 203(1): 213–227.
- [22] CHEN W Y, CHEN G X, JENG D, et al. Ocean bottom hydrodynamic pressure due to vertical seismic motion[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2020, 20(9): 06020025.
- [23] WANG J T, JIN F, ZHANG C H. Reflection and transmission of plane waves at an interface of water/porous sediment with underlying solid substrate[J]. *Ocean Engineering*, 2013, 63: 8–16.
- [24] WANG J T, ZHANG C H, JIN F. Analytical solutions for dynamic pressures of coupling fluid-solid-porous medium due to P wave incidence[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2004, 3(2): 263–271.
- [25] WANG J T, ZHANG C H, JIN F. Analytical solutions for dynamic pressures of coupling fluid-porous medium-solid due to SV-wave incidence[M]// *Seismic Safety Evaluation of Concrete Dams*. Amsterdam; Elsevier, 2013: 199–220.
- [26] 张奎, 李伟华, 赵成刚. 平面波入射下深水地基场地动力响应分析[J]. *岩土工程学报*, 2018, 40(6): 1066–1074.
ZHANG Kui, LI Weihua, ZHAO Chenggang. Dynamic responses of an underwater site subjected to plane P-or SV-wave incidence[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2018, 40(6): 1066–1074. (in Chinese)
- [27] 张奎, 李伟华, 赵成刚. 地震波斜入射下水下地基场地的等效线性化分析方法及应用[J]. *振动与冲击*, 2020, 39(22): 41–49.
ZHANG Kui, LI Weihua, ZHAO Chenggang. Application of equivalent linear method in underwater site analysis under oblique incidence of seismic waves[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, 39(22): 41–49. (in Chinese)
- [28] WANG P G, ZHANG G L, ZHAO M, et al. Semi-analytical solutions for the wave-induced and vertical earthquake-induced responses of a fluid-stratified seabed-bedrock system[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2020, 139: 106391.
- [29] 史宏彦, 许镇鸿. 竖向不同排水条件和上覆压力作用下砂基超静孔隙水压力计算[J]. *汕头大学学报(自然科学版)*, 1995, 10(2): 52–57, 66.
SHI Hongyan, XU Zhenhong. Calculation of excess pore water pressure of saturated sand foundation with different vertical drainage conditions and overburden pressure[J]. *Journal of Shantou University (Natural Science Edition)*, 1995, 10(2): 52–57, 66. (in Chinese)
- [30] 刘金韬, 金晓媚. 单向与双向排水时饱和和软黏土固结震陷的计算方法[J]. *科技导报*, 2013, 31(17): 15–19.
LIU Jintao, JIN Xiaomei. Estimation method of consolidation seismic subsidence of saturated soft clayey soil with one-side and two-side drainages[J]. *Science & Technology Review*, 2013, 31(17): 15–19. (in Chinese)
- [31] 何子舟, 周凤玺. 定荷载和双面排水条件下非饱和土一维固结的解析解[J]. *应用数学和力学*, 2019, 40(9): 1035–1047.
HE Zizhou, ZHOU Fengxi. Analytical solution for 1D consolidation of unsaturated soil under constant load and double-side drainage[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, 40(9): 1035–1047. (in Chinese)
- [32] NIU J J, LING D S, ZHU S, et al. Solutions for one-dimensional consolidation of unsaturated soil with general boundary conditions subjected to time-dependent load[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2021, 45(11): 1664–1680.
- [33] 赵云, 陈雪梅, 陈樟龙, 等. 不同透水边界下单层饱和和多孔介质一维瞬态响应解[J]. *岩土工程学报*, 2023, 45(6): 1133–1140.
ZHAO Yun, CHEN Xuemei, CHEN Zhanglong, et al. Semi-analytical solutions for transient response of one-dimensional saturated single-layer porous media under various permeable boundary conditions[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2023, 45(6): 1133–1140. (in Chinese)
- [34] SIMON B R, ZIENKIEWICZ O C, PAUL D K. An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1984, 8(4): 381–398.
- [35] BELLMAN R. *Introduction to matrix analysis*[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.

附录 A

边界条件相关叙述

1) σ_p 边界条件

静态解:

$$u_F^s(z) = \frac{f_1(t)}{2h\lambda_F} z^2 \quad (\text{A1})$$

$$u^s(z) = \frac{f_2(t) + f_3(t)}{2H(\lambda + 2\mu)} z^2 \quad (\text{A2})$$

$$w^s(z) = - \left[\frac{\alpha f_2(t) + \alpha^2 f_3(t)}{2H(\lambda + 2\mu)} + \frac{f_3(t)}{2HQ} \right] z^2 \quad (\text{A3})$$

ω 的特征方程:

$$v_{12}(H)v_{23}(H) - v_{13}(H)v_{22}(H) = 0 \quad (\text{A4})$$

$\omega=0$ 时,

$$U_F^d = W^d + U^d = a_1 \quad (\text{A5})$$

U_{Fk}^d 和 U_k^d 的本征函数:

$$U_{Fk}^d = z_{F22k}(z) \quad (\text{A6})$$

$$U_k^d = \begin{Bmatrix} U_k^d(z) \\ W_k^d(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{32k}(z) & v_{33k}(z) \\ v_{42k}(z) & v_{43k}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{v_{12k}(H)}{v_{13k}(H)} \end{Bmatrix} \quad (\text{A7})$$

2) σw 边界条件

静态解:

$$u_F^s(z) = \frac{f_1(t)}{2h\lambda_F} z^2 + f_3(t) \quad (\text{A8})$$

$$u^s(z) = \frac{f_2(t)}{2(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q)H} z^2 \quad (\text{A9})$$

$$w^s(z) = f_3(t) \quad (\text{A10})$$

ω 的特征方程:

$$v_{12}(H)v_{43}(H) - v_{13}(H)v_{42}(H) = 0 \quad (\text{A11})$$

$\omega=0$ 时,

$$U_F^d = U^d = a_2, W^d = 0 \quad (\text{A12})$$

U_{Fk}^d 和 U_k^d 的本征函数:

$$U_{Fk}^d = z_{F22k}(z) \quad (\text{A13})$$

$$U_k^d = \begin{Bmatrix} U_k^d(z) \\ W_k^d(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{32k}(z) & v_{33k}(z) \\ v_{42k}(z) & v_{43k}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{v_{12k}(H)}{v_{13k}(H)} \end{Bmatrix} \quad (\text{A14})$$

3) uw 边界条件

静态解:

$$u_F^s(z) = -\frac{f_1(t)}{\lambda_F} z \quad (\text{A15})$$

$$u^s(z) = \frac{f_2(t) + \alpha f_3(t)}{\lambda + 2\mu} z \quad (\text{A16})$$

$$w^s(z) = - \left[\frac{f_2(t) + \alpha f_3(t)}{\lambda + 2\mu} + \frac{f_3(t)}{Q} \right] z \quad (\text{A17})$$

ω 的特征方程:

$$v_{32}(H)v_{43}(H) - v_{33}(H)v_{42}(H) = 0 \quad (\text{A18})$$

U_{Fk}^d 和 U_k^d 的本征函数:

$$U_{Fk}^d = z_{F22k}(z) \quad (\text{A19})$$

$$U_k^d = \begin{Bmatrix} U_k^d(z) \\ W_k^d(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{32k}(z) & v_{33k}(z) \\ v_{42k}(z) & v_{43k}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{v_{32k}(H)}{v_{33k}(H)} \end{Bmatrix} \quad (\text{A20})$$

附录中仅提供以上 3 种边界条件下的本征函数,4 种边界条件下基本方程的时域解求解步骤相同。

附录 B

饱和多孔介质中波场可表示为

$$u = \sum_{n=1}^2 A \exp[i(-kz - \omega t)] \quad (\text{B1})$$

$$w = \sum_{n=1}^2 B \exp[i(-kz - \omega t)] \quad (\text{B2})$$

将式(B1)、式(B2)代入控制方程中可以得到:

$$\begin{cases} -k^2(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q) + \omega^2 \rho & -k^2(\alpha Q) + \omega^2 \rho_F \\ -k^2(\alpha Q) + \omega^2 \rho_F & -k^2 Q + \frac{\omega^2 \rho_F}{n} - \frac{i\omega}{k_D} \end{cases} \begin{cases} u \\ w \end{cases} = 0 \quad (\text{B3})$$

当系数行列式为零,此方程有非零解,则

$$[-k^2(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q) + \omega^2 \rho] \left[-k^2 Q + \frac{\omega^2 \rho_F}{n} - \frac{i\omega}{k_D} \right] - [-k^2(\alpha Q) + \omega^2 \rho_F] [-k^2(\alpha Q) + \omega^2 \rho_F] = 0 \quad (\text{B4})$$

通过等式(B4),即可求出沉积层波束 k 的表达式为

$$\begin{cases} c_{p1} = \omega / \text{Re}[k_{p1}] \\ c_{p2} = \omega / \text{Re}[k_{p2}] \end{cases} \quad (\text{B5})$$

沉积层中的固相和液相相关振幅比为

$$\delta_{pn} = \frac{w_{pn}}{u_{pn}} = \frac{-k_{pn}^2(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q) + \omega^2 \rho}{\alpha Q k_{pn}^2 - \omega^2 \rho_F} \quad (\text{B6})$$

附录 C

根据边界条件以及界面条件:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{C1})$$

式中: $m_{11} = -i\lambda_F k_{uF} \exp[ihk_{uF}]$; $m_{12} = i\lambda_F k_{dF} \exp[-ihk_{dF}]$; $m_{13} = m_{14} = m_{15} = m_{16} = 0$; $m_{21} = -i\lambda_F k_{uF}$, $m_{22} = i\lambda_F k_{dF}$; $m_{23} = i(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q + \alpha Q \delta_{u1}) k_{u1}$; $m_{24} = i(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q + \alpha Q \delta_{u2}) k_{u2}$; $m_{25} = i(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q + \alpha Q \delta_{d1}) k_{d1}$; $m_{26} = i(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q + \alpha Q \delta_{d2}) k_{d2}$; $m_{31} = -i\lambda_F k_{uF}$, $m_{32} = i\lambda_F k_{dF}$; $m_{33} = iQ(\alpha + \delta_{u1}) k_{u1}$; $m_{34} = iQ(\alpha + \delta_{u2}) k_{u2}$; $m_{35} = iQ(\alpha + \delta_{d1}) k_{d1}$; $m_{36} = iQ(\alpha + \delta_{d2}) k_{d2}$; $m_{41} = m_{42} = 1$; $m_{43} = -(1 + \delta_{u1})$; $m_{44} = -(1 + \delta_{u2})$; $m_{45} = -(1 + \delta_{d1})$; $m_{46} = -(1 + \delta_{d2})$; $m_{51} = m_{52} = m_{61} = m_{62} = 0$; $m_{53} = \exp[-ik_{u1}H]$; $m_{54} = \exp[-ik_{u2}H]$; $m_{55} = \exp[ik_{d1}H]$; $m_{56} = \exp[ik_{d2}H]$

当使用不透水底部边界条件,即 $w(H) = 0$, 则

$$\begin{aligned} m_{63} &= \delta_{u1} \exp[-ik_{u1}H] \\ m_{64} &= \delta_{u2} \exp[-ik_{u2}H] \\ m_{65} &= \delta_{d1} \exp[ik_{d1}H] \\ m_{66} &= \delta_{d2} \exp[ik_{d2}H] \end{aligned}$$

当使用不透水底部边界条件,即 $p_F(H) = 0$, 则

$$\begin{aligned} m_{63} &= iQ(\alpha + \delta_{u1}) k_{u1} \exp[-ik_{u1}H] \\ m_{64} &= iQ(\alpha + \delta_{u2}) k_{u2} \exp[-ik_{u2}H] \\ m_{65} &= -iQ(\alpha + \delta_{d1}) k_{d1} \exp[ik_{d1}H] \\ m_{66} &= -iQ(\alpha + \delta_{d2}) k_{d2} \exp[ik_{d2}H] \end{aligned}$$

矩阵 N 可以表示为

$$N = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad u_0 \quad 0]^T \quad (\text{C2})$$