

基于谱元法的 Rayleigh 波频散特征计算与 模态叠加耦合机理研究

杨博^{1,2,3}, 张萌¹, 夏江海², 龙友明¹, 吴忱¹

(1. 重庆交通大学 土木工程学院, 重庆 400074; 2. 浙江大学 地球科学学院, 浙江 杭州 310027;
3. 重庆交通大学 交通土建工程材料国家地方联合工程实验室, 重庆 400074)

摘要: 为了提升 Rayleigh 波勘探成层结构力学参数的精细化水平, 基于谱元法, 构建了弹性层状半无限结构的 Rayleigh 波频散方程。针对半无限土基和“上软下硬”这 2 种规则成层结构, 运用谱元法与快速矢量传递法对比计算了 Rayleigh 波多阶模态的频散曲线。结果表明: 谱元法与解析法计算结果之间的相对误差在 0.05% 以下, 具有较高的计算精度。在此基础上, 进一步针对“上硬下软”的典型路面结构、含“软夹层”和含“硬夹层”的复杂成层结构, 结合谱元法, 推导了表面位移的计算方法, 通过分解 Rayleigh 波各模态相速度对表面位移能量的贡献, 建立了一种基于谱元法确定复杂成层结构中 Rayleigh 波多模态叠加耦合机理的半解析方法, 此方法确定的 Rayleigh 各阶模态叠加耦合频散特征与速度-应力有限差分方法仿真结果之间具有很好的吻合度, 表明基于谱元法计算 Rayleigh 波频散曲线并以此揭示成层结构中 Rayleigh 波模态叠加耦合机理是合理、可行的。

关键词: 谱元法; Rayleigh 波频散曲线; 模态叠加耦合; 成层结构; 面波勘探

中图分类号: TU435

文献标识码: A

Study on dispersion characteristics calculation and coupling mechanism of multi-modes superposition of Rayleigh wave based on spectral element method

YANG Bo^{1,2,3}, ZHANG Meng¹, XIA Jianghai², LONG Youming¹, WU You¹

(1. School of Civil Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China; 2. School of Earth Sciences, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China; 3. National and Local Joint Laboratory of Transportation and Civil Engineering Materials, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: In order to improve the refinement level of mechanical parameters of layered structures explored by Rayleigh wave, this study constructed the Rayleigh wave dispersion equation in layered elastic semi-infinite stratum based on the spectral element method. For the two stratum structures of semi-infinite and “upper soft and lower hard”, compared and calculated the dispersion curves of multi-modes Rayleigh wave with spectral element method and fast vector-transfer algorithm. The results show that the relative error between the calculation results of spectral element method and the corresponding results of fast vector-transfer algorithm is under 0.05%, which has high calculation accuracy. On this basis, for the three complex layered structures of “upper hard and lower soft” pavement structure, containing “soft interlayer” and containing “hard interlayer”, this study derived the calculation method of surface displacement based on spectral element method, and established an semi-analytical method to determine the superposition coupling mechanism of multi-modes Rayleigh wave in complex stratum structure by analyzing the contribution of each mode phase velocity of Rayleigh wave to surface displacement energy, which are

收稿日期: 2023-01-21; 修回日期: 2023-03-03

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51708071, 41830103); 国家重大科研仪器研制项目 (51927814); 重庆市自然科学基金项目 (CSTB2023NSCQ-MSX1024); 重庆交通大学自然科学类揭榜挂帅项目 (XJ2023000201); 重庆市研究生教育项目 (YKCSZ23123)

作者简介: 杨博 (1982—), 男, 副教授, 博士, 主要从事层状体系力学分析与性能监测方面的研究。E-mail: ybengineer@tom.com

in good agreement with the corresponding simulation results of velocity-stress finite element method, indicating that it is reasonable and feasible to calculate the dispersion curves of Rayleigh wave and reveal the superposition coupling mechanism of multi-modal Rayleigh wave based on spectral element method.

Key words: spectral element method; Rayleigh wave dispersion curves; mode superposition coupling; layered structure; surface wave exploration

0 引言

成层结构中 Rayleigh 波(R 波)频散曲线的正演计算是应用 R 波进行工程勘探的基本前提^[1-2],代表性的有 Thomson-Haskell 法^[3-4]、Schwab-Knopoff 法^[5]、 δ 矩阵法^[6]和 Abo-Zena 法^[7]等。在这些基础上,CHEN^[8]通过定义反射与透射波传递系数,建立了基于广义反射-透射系数的 R 波频散曲线正演算法。袁腊梅等^[9]通过无量纲化处理,进一步提高了广义反射-透射系数法的计算效率和稳定性。凡友华等^[10-11]通过采用 3 个五阶矩阵的乘积作为传递矩阵,建立了快速矢量传递算法,同时探讨了 R 波频散方程高频近似分解和多模式激发数目。对于“上软下硬”的规则成层结构,大量研究表明:R 波中的基阶模态能量占主导地位,此时 R 波频散特征就是其基阶频散曲线^[12],而对于“上硬下软”、或含“硬夹层”和含“软夹层”的非规则复杂成层结构,R 波频散方程变为复数方程^[13],相应频散特征则是多阶模态在特定频带共同作用的结果。对此,张碧星等^[14]通过构建不同激振源下 R 波多模态相应的位移计算方法,以此解译非规则复杂成层结构中 R 波频散曲线出现的“之”字形回折现象。杨天春等^[15]通过对比规则成层结构与含“硬夹层”和含“软夹层”中 R 波谱比特征,建议实际勘探过程中须考虑 R 波高阶模态的影响。由此可见,探索复杂成层结构中 R 波多阶模态叠加耦合机理对其应用于工程勘探技术精细化提升具有重要理论意义。

谱元法(spectral element method, SEM)是一种可用于分析结构振动响应的半解析方法^[16-17]。其基于波动方程,通过积分变换推导应力与位移各分量在频域-波数域的解析式,在此基础上,结合有限元思想建立结构各单元的动力刚度矩阵^[18],按边界条件组装总体刚度矩阵从而计算结构的动力响应^[19],具有计算精度高和速度快等优点。颜可珍等^[20]基于 SEM 计算了半无限土基和双层土基中 R 波基阶与一阶模态的频散曲线。为此,本研究通过理论分析和对比计算,基于 SEM 建立 R 波可考虑高阶模态频散曲线的计算方法。同时,结合冲击振源特点,通过 SEM 计算 R 波多阶模态频散曲线的位移响应,进一步揭示复杂成层结构中 R 波多阶模态之间的叠加耦合频散特征。

1 基于 SEM 的 R 波频散方程

1.1 模型定义

本研究以轴对称条件下的弹性层状半无限结构作为研究对象,其每层结构介质视为均匀、各向同性的弹性体,各层沿水平方向无限且分界面相互平行,层间位移与应力完全连续,最下一层为厚度无限的弹性半无限体,如图 1(a)所示。其中, r 为水平径向; z 为深度方向; θ 为切向; E 为介质的弹性模量; ν 为泊松比; ρ 为介质的密度; h 为层厚度; N 为总层数;所有符号的下标数字及 m 为层序号,取 $1 \sim N$ 。

对于图 1(a)中 $1 \sim N-1$ 层有限厚层结构,可视作双节点单元,如图 1(b)所示,考虑有限厚度底部界面反射波的影响,其单元刚度矩阵 $S_{2\text{-node}}$ 可写为^[21]

$$S_{2\text{-node}} = \mu \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2kl & -2kle^{-hl} & -kK & -kKe^{-hg} \\ K & Ke^{-hl} & -2k^2g & 2k^2ge^{-hg} \\ 2kle^{-hl} & -2kl & -kKe^{-hg} & -kK \\ Ke^{-hl} & K & -2k^2ge^{-hg} & 2k^2g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k & -ke^{-hl} & kg & -kge^{-hg} \\ -l & le^{-hl} & k^2 & k^2e^{-hg} \\ -ke^{-hl} & -k & kge^{-hg} & -kg \\ -le^{-hl} & l & k^2e^{-hg} & k^2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (1)$$

式中: μ 为剪切模量; l 、 g 和 K 为

$$l = \sqrt{k^2 - (\omega/V_p)^2}, \quad g = \sqrt{k^2 - (\omega/V_s)^2}, \quad K = 2k^2 - \omega^2/V_s^2 \quad (2)$$

式中: ω 为角频率; k 为圆波数; V_p 和 V_s 为介质的横波速度和纵波速度。其中, V_p 和 V_s 与 E 、 ρ 及 ν 的关系为

$$V_p = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, V_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad (3)$$

对于图 1(a) 中第 N 层半无限体, 可视为单节点单元, 如图 1(c) 所示, 由于无限深处不存在反射波, 其单元刚度矩阵 $S_{1\text{-node}}$ 可以表示为

$$S_{1\text{-node}} = \frac{\mu}{k^2 - gl} \begin{bmatrix} -l(g^2 - k^2) & g^2k - 2lglk + k^3 \\ g^2k - 2lglk + k^3 & -g^3 + gk^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

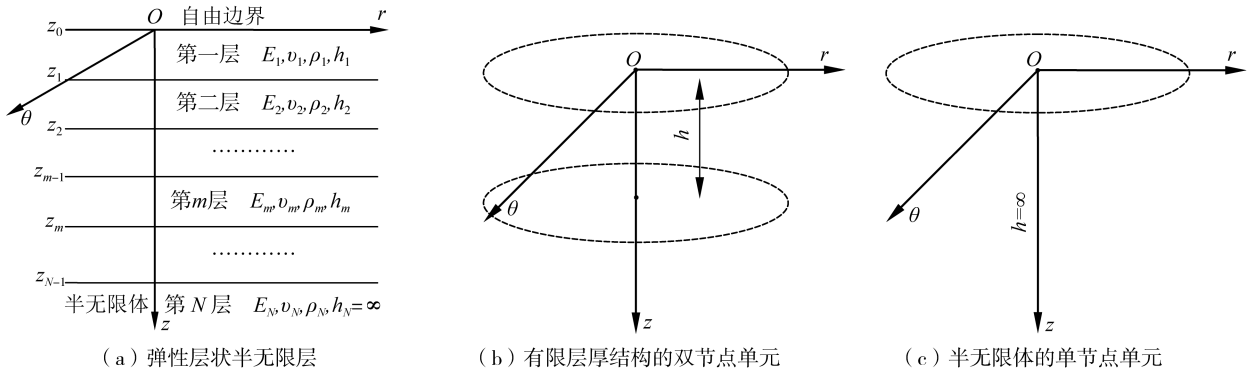


图 1 构造及单元模型

Fig. 1 Configuration and element models

1.2 刚度矩阵的组装

相邻 m 层与 $m+1$ 层单元在分界面 z_m 上节点力与位移完全连续的可表达为

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{r2}^m &= \tilde{u}_{r1}^{m+1}, \tilde{u}_{z2}^m = \tilde{u}_{z1}^{m+1}, \\ \tilde{T}_{\tau r2}^m &= -\tilde{T}_{\tau r1}^{m+1}, \tilde{T}_{z2}^m = -\tilde{T}_{z1}^{m+1} \end{aligned} \quad (5)$$

式中: \tilde{u}_r 和 \tilde{u}_z 分别为单元在频率-波数域的径向和竖向位移; $\tilde{T}_{\tau r}$ 和 \tilde{T}_z 单元分别为频率-波数域的节点剪切力与竖向力; 下标 1 和 2 为单元上、下节点。

根据式(5), 则完全连续相邻 2 个双节点单元的 $S_{2\text{-node}}$ 组装方式为

$$\begin{bmatrix} S_{11}^m & S_{12}^m & S_{13}^m & S_{14}^m & 0 & 0 \\ S_{21}^m & S_{22}^m & S_{23}^m & S_{24}^m & 0 & 0 \\ S_{31}^m & S_{32}^m & S_{33}^m + S_{11}^{m+1} & S_{34}^m + S_{12}^{m+1} & S_{13}^{m+1} & S_{14}^{m+1} \\ S_{41}^m & S_{42}^m & S_{43}^m + S_{21}^{m+1} & S_{44}^m + S_{22}^{m+1} & S_{23}^{m+1} & S_{24}^{m+1} \\ 0 & 0 & S_{31}^{m+1} & S_{32}^{m+1} & S_{33}^{m+1} & S_{34}^{m+1} \\ 0 & 0 & S_{41}^{m+1} & S_{42}^{m+1} & S_{43}^{m+1} & S_{44}^{m+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{r1}^m \\ \tilde{u}_{z1}^m \\ \tilde{u}_{r2}^m \\ \tilde{u}_{z2}^m \\ \tilde{u}_{r2}^{m+1} \\ \tilde{u}_{z2}^{m+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{T}_{r1}^m \\ \tilde{T}_{z1}^m \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{T}_{r2}^{m+1} \\ \tilde{T}_{z2}^{m+1} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

同理, 第 N 层半无限体单节点单元 $S_{1\text{-node}}$ 与第 $N-1$ 层双节点单元的 $S_{2\text{-node}}$ 组装方式为

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{N-1} & S_{12}^{N-1} & S_{13}^{N-1} & S_{14}^{N-1} \\ S_{21}^{N-1} & S_{22}^{N-1} & S_{23}^{N-1} & S_{24}^{N-1} \\ S_{31}^{N-1} & S_{32}^{N-1} & S_{33}^{N-1} + S_{11}^N & S_{34}^{N-1} + S_{12}^N \\ S_{41}^{N-1} & S_{42}^{N-1} & S_{43}^{N-1} + S_{21}^N & S_{44}^{N-1} + S_{22}^N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{r1}^{N-1} \\ \tilde{u}_{z1}^{N-1} \\ \tilde{u}_{r1}^N \\ \tilde{u}_{z1}^N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{T}_{r1}^{N-1} \\ \tilde{T}_{z1}^{N-1} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

1.3 频散方程的构建

根据式(6)和式(7), 按层间接触状态拼装 N 层介质结构的总体刚度矩阵 S_{global} , 则所有节点位移与节点力的关系可表达为

$$\begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \mathbf{S}_{2\text{-node}}^1 \\ \mathbf{S}_{2\text{-node}}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{2\text{-node}}^{N-1} \\ \mathbf{S}_{1\text{-node}}^N \end{array} \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{z1}^1 \\ \tilde{u}_{r1}^1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_{z1}^m \\ \tilde{u}_{r2}^m \\ \vdots \\ \tilde{u}_{z1}^N \\ \tilde{u}_{r1}^N \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_{\text{global}} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{z1}^1 \\ \tilde{u}_{r1}^1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_{z1}^m \\ \tilde{u}_{r2}^m \\ \vdots \\ \tilde{u}_{z1}^N \\ \tilde{u}_{r1}^N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{T}_{z1}^1 \\ \tilde{T}_{r1}^1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

式中,当若表面不存在应力,即节点力 \tilde{T}_{z1}^m 和 \tilde{T}_{r1}^m 取 0 时,则式(8)变为齐次线性方程组,倘若初始时刻存在位移扰动,要使得齐次线性方程组的位移有非平凡解,则须满足

$$\det(\mathbf{S}_{\text{global}}) = 0 \quad (9)$$

同时,令 $\mathbf{S}_{\text{global}}$ 中的圆波数 k 表示为

$$k = \frac{\omega}{V_R} = \frac{2\pi f}{V_R} \quad (10)$$

式中: V_R 为 R 波的相速度; f 为自然频率。

将式(10)代入式(9)即得到基于 SEM 的 R 波理论频散方程。这样在式(9)中只要输入各层的弹性模量 E 、密度泊松比 ρ 、泊松比 ν 和厚度 h , 就可以得到 V_R 随 f 变化的 R 波理论频散曲线。

2 频散曲线对比计算

为了研究 SEM 计算 R 波频散曲线的可靠性,以文献[20,22]中的弹性半无限体和“上软下硬”2种规则土层为计算模型,参数如表1中1号和2号模型。其中,第八列为第五至第七列按式(3)计算得到的相应土层材料的 V_S 。

表1 成层模型的力学参数

Table 1 Mechanic parameters of regular layered soil models

模型	特征	层号	h/m	E/MPa	$\rho/(\text{g}/\text{cm}^3)$	ν	$V_S/(\text{m}/\text{s})$
1号	弹性半无限体	—	∞	269	1.55	0.257	262.7
2号	上软下硬	一层	5	100	1.85	0.350	141.5
		二层	5	200	1.85	0.350	200.1
		三层	10	450	1.85	0.350	300.2
		四层	∞	800	1.85	0.350	400.2
3号	路面结构	沥青混凝土	0.2	10000	2.45	0.25	1277.8
		水泥稳定碎石	0.4	7000	2.35	0.25	1091.6
		水泥稳定土	0.2	3000	2.10	0.25	755.9
		土基	∞	100	1.80	0.40	140.9
4号	含“软夹层”	一层	5	200	1.85	0.35	200.1
		二层	5	100	1.85	0.35	141.5
		三层	10	450	1.85	0.35	300.2
		四层	∞	800	1.85	0.35	400.2
5号	含“硬夹层”	一层	5	100	1.85	0.35	141.5
		二层	10	450	1.85	0.35	300.2
		三层	5	200	1.85	0.35	200.1
		四层	∞	800	1.85	0.35	400.2

注:3号模型路面结构中水泥稳定碎石基层和水泥稳定土底基层的弹性模量 E 根据 JTG D50—2017《公路沥青路面设计规范》^[23] 要求,已按其材料的模量乘以 0.5 的模量调整系数。

据此,将1号和2号模型相应参数代入基于 SEM 的 R 波频散方程式(9)中,利用二分法求根计算相应的 R 波理论频散曲线并与快速矢量传递法相应结果进行对比,如图2所示。

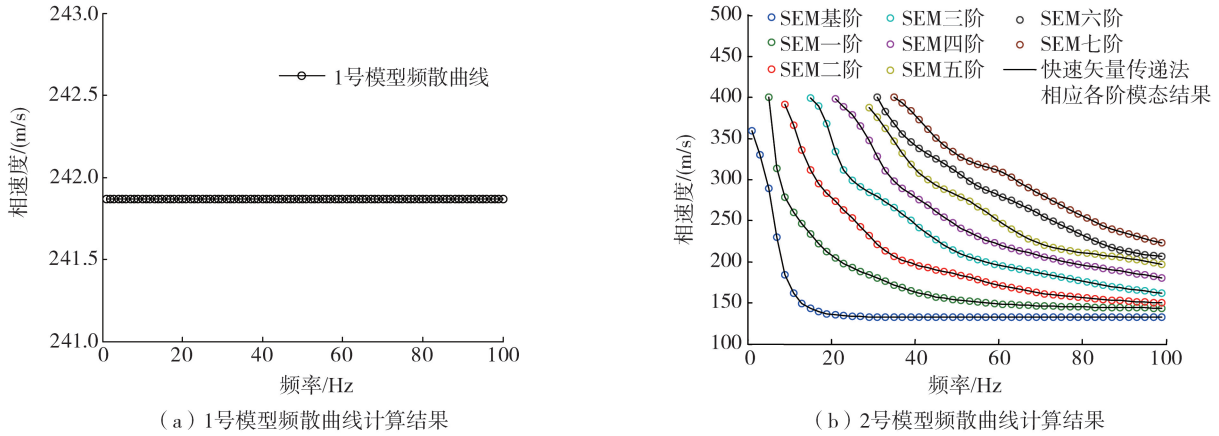


图 2 R 波频散曲线的对比计算
Fig. 2 Comparative calculation of dispersion curves of Rayleigh wave

由图 2(a)可知:对于 1 号模型半无限体而言,R 波不会发生频散现象,SEM 计算得到的 V_R 在各个频率上都为 241.9 m/s,与按解析式(11)计算的 V_R 等于 242.0 m/s 之间的相对误差为 0.03%;对于 2 号模型“上软下硬”的规则地层,SEM 计算各阶模态的 V_R 结果如图 2(b)所示。除基阶外,其余一至七阶模态的 V_R 均存在截止频率,计算结果与快速矢量传递法相应的结果高度吻合,相对误差均在 0.05% 以下,具有很高的计算精度,如式(11)所示:

$$V_R = \frac{0.87 + 1.12\nu}{1 + \nu} V_S \tag{11}$$

3 模态叠加耦合机理分析

对于“上硬下软”、含“软夹层”和含“硬夹层”这三类复杂成层结构,具体参数^[22]采用表 1 中的 3 号、4 号、5 号模型。其中,“上硬下软”结构以工程中常见的路面结构^[24]为例,通过速度-应力有限差分方法^[25]模拟竖向冲击点源作用下 60 道不同径向距离 r 对应的竖向振动记录。其中,激励采用 Ricker 子波,其归一化的振幅 $S(f)$ 如式(12)所示,在模拟过程中为了使高频带能够获得较完整的频散信息,则最小波长 λ_{\min} 不得超过各模型表层 h ,同时为了保证在最大频率 f_{\max} 处激励振幅 $S(f)$ 衰减不小于 0.01 即 -40 dB,则 f_m 须满足式(13)。据此,结合表 1 中的 3 号、4 号、5 号模型具体参数,本研究将模型 3 号的 f_m 取为 2600 Hz^[24],4 号和 5 号模型的 f_m 取为 20 Hz,结果如图 3 所示。在此基础上运用相位移法^[26]提取相应 R 波频散能量团与 SEM 计算的各阶频散曲线对比,以模型 3 号为例,结果如图 4(a)所示,此时 R 波频散特征能量团不再以单一模态的频散曲线表征,而是多阶模态叠加耦合共同作用的结果。为了确定叠加耦合后的频散特征,以往研究根据 R 波为沿表面传播能量为主的一种波导,按式(14)计算各阶模态频散曲线对应的频域位移^[15],以各频率表面位移能量占优模态的 V_R 作为 R 波各模态叠加耦合后的频散特征,表达式为

$$S(f) = \left(\frac{f}{f_m}\right)^2 e^{\left(-\frac{f}{f_m}\right)^2 + 1} \tag{12}$$

$$\left(\frac{f_{\max}}{f_m}\right)^2 e^{\left(-\frac{f_{\max}}{f_m}\right)^2 + 1} = \left(\frac{V_{S1}}{\lambda_{\min} f_m}\right)^2 e^{\left(-\frac{V_{S1}^2}{\lambda_{\min}^2 f_m^2} + 1\right)} \geq 0.01 \tag{13}$$

式中: f_m 为 Ricker 子波主频; V_{S1} 为表层横波大小。

$$\begin{aligned} \bar{u}_r(r, \theta, z; \omega) &= -i\pi\Delta_1 \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot e^{-i3\pi/4} \cdot e^{ikr} \cdot k^2 / \frac{\partial E_6^{(1)}}{\partial k} \\ \bar{u}_z(r, \theta, z; \omega) &= -i\pi\Delta_2 \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot e^{-i\pi/4} \cdot e^{ikr} \cdot k^2 / \frac{\partial E_6^{(1)}}{\partial k} \end{aligned} \tag{14}$$

式中: $E_6^{(1)}$ 为 ABO-ZENA^[7] 所表示的 R 波频散方程; Δ_1 和 Δ_2 为振源有关的函数。

然而,式(14)是一个将 R 波响应当成平面波处理的积分渐进式,其求解过程中须考虑各阶模态 V_R 所对应的极点和相应留数,因此十分复杂,且只有当 r 取较大时才有较好的精度。为此,本研究另从表面振动位

移能量分解的角度出发,通过分析 R 波各模态 V_R 对表面振动能量的贡献,建立一种确定复杂成层结构中 R 波多模态叠加耦合机理的半解析新方法。首先定义轴对称坐标下一个表面作用半径为 a 的竖向冲击荷载 $p(t, r)$ 作为激励,具体表达为

$$p(t, r) = \begin{cases} \frac{Q}{\pi a^2} \delta(t) & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (15)$$

式中: Q 为竖向力大小; $\delta(t)$ 为狄拉克脉冲函数。

相应 $p(t, r)$ 的 Fourier 与 0 阶 Hankel 积分变换式为

$$\tilde{p}(k, \omega) = \frac{QJ_1(ka)}{\pi ka} \quad (16)$$

当 a 趋于 0, 则激励为集中力, 通过取极限和 L'Hopital's 法则进一步可表达为

$$\lim_{a \rightarrow 0} \tilde{p}(k, \omega) = \frac{Q}{2\pi} \quad (17)$$

这样将式(8)右边向量中 \tilde{T}_{z1}^1 替换为式(17)中的 $\tilde{p}(k, \omega)$, 其余元素保持为 0, 对式(8)左边矩阵求逆即可求得竖向冲击集中力条件下成层结构表面竖向振动位移 \tilde{u}_{z1}^1 。在此基础上, 通过式(18)将 \tilde{u}_{z1}^1 按 R 波各阶模态的相速度 V_R 进行分解, 表达式为

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{z1}^1 &= \int |U_z| dV_R \\ |U_z| &= \frac{d\tilde{u}_{z1}^1}{dV_R} \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $|U_z|$ 为各阶模态 V_R 对表面位移即能量的贡献。

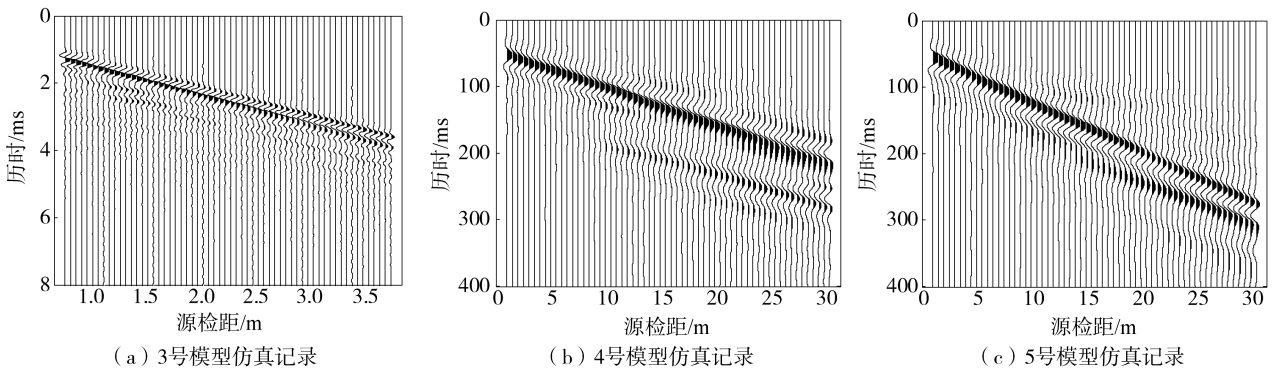


图3 速度-应力有限差分模拟结果

Fig. 3 Simulation results of speed-stress finite difference method

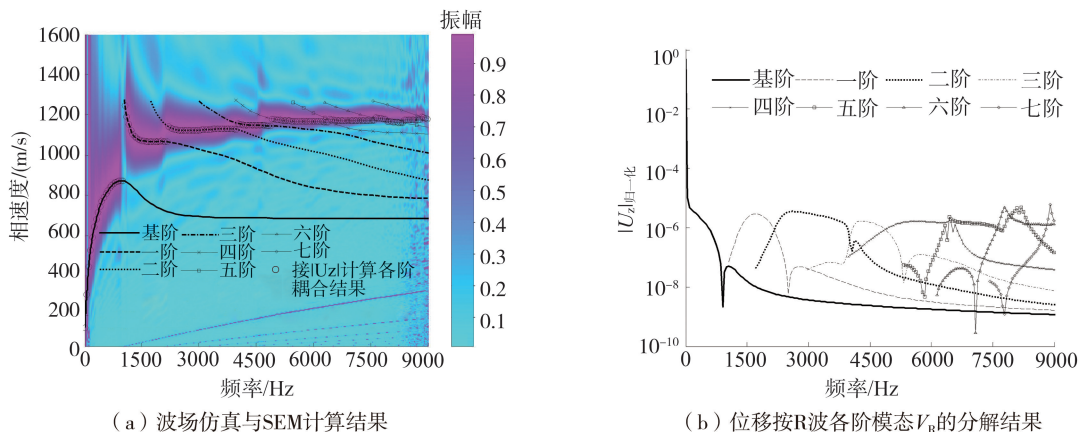


图4 3号路面结构模型中的 R 波频散特征

Fig. 4 Dispersion characteristics of Rayleigh wave in No.3 pavement structure model

按式(18)求解各阶模态 V_R 对应的 $|U_z|$, 归一化后得到各阶模态频散曲线对表面竖向位移贡献大小, 如图 4(b) 所示。据此, 以各频率对应表面竖向位移贡献最大相应模态的 V_R 作为该结构中 R 波多阶模态叠加耦合的结果, 如图 4(a) 中黑圈符号所示。结果表明, 按此方法确定叠加耦合后的频散特征与波场数值仿真的能量幅值能非常好地吻合在一起, 不难看出基于 SEM 通过计算 $|U_z|$ 以此确定 R 波多阶模态叠加耦合后的频散特征, 不仅计算结果合理, 与式(14)相比, 形式较为简单且物理意义明确。

同理, 将 4 号含“软夹层”和 5 号含“硬夹层”结构模型按式(18)计算 R 波各阶模态 $|U_z|$, 并以此确定各阶模态叠加耦合后的频散特征, 如图 5 所示, 结果表明: 路面结构和含“软夹层”成层结构中 R 波各阶模态对应的 $|U_z|$ 在 f 较小的低频带以基阶模态绝对占优, 相应频散特征以基阶模态的相速度 V_R 表征, 随着频率 f 增大, 高频带的 R 波频散特征将取决于高阶模态对应的相速度 V_R ; 而含“硬夹层”成层结构中 R 波各阶模态对位移的贡献在高频带和低频带均以 R 波基阶模态为主, 相应频散特征以基阶模态的 V_R 表征, 但在 8~10 Hz 范围的位移以一阶模态贡献为主, 相应频散特征以一阶模态的 V_R 表征。同时, 图 6 结果表明, 基于 SEM 确定叠加耦合后的频散特征与速度-应力有限差分方法仿真能量幅值对应的频散特征之间具有较好的一致性, 平均相对误差在 2.57% 以下。并且, 从以上结果不难看出三类复杂成层结构的 R 波多阶模态叠加耦合后的频散特征在高频带均收敛并接近于表面层结构的 V_s 。因此, 在计算过程中, 仅需考虑基阶直至高频带 V_R 收敛于表层结构 V_s 的高阶模态即可。

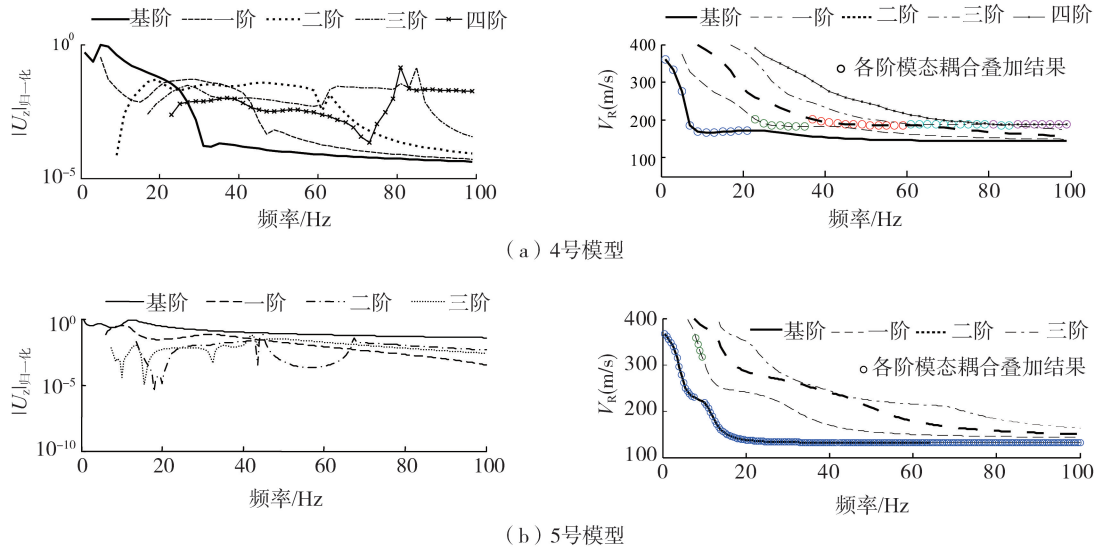


图 5 含“软夹层”和含“硬夹层”成层结构中 R 波各阶模态叠加结果

Fig. 5 Modal superposition results of Rayleigh wave in soft-interlayer and hard-interlayer soil layered structures

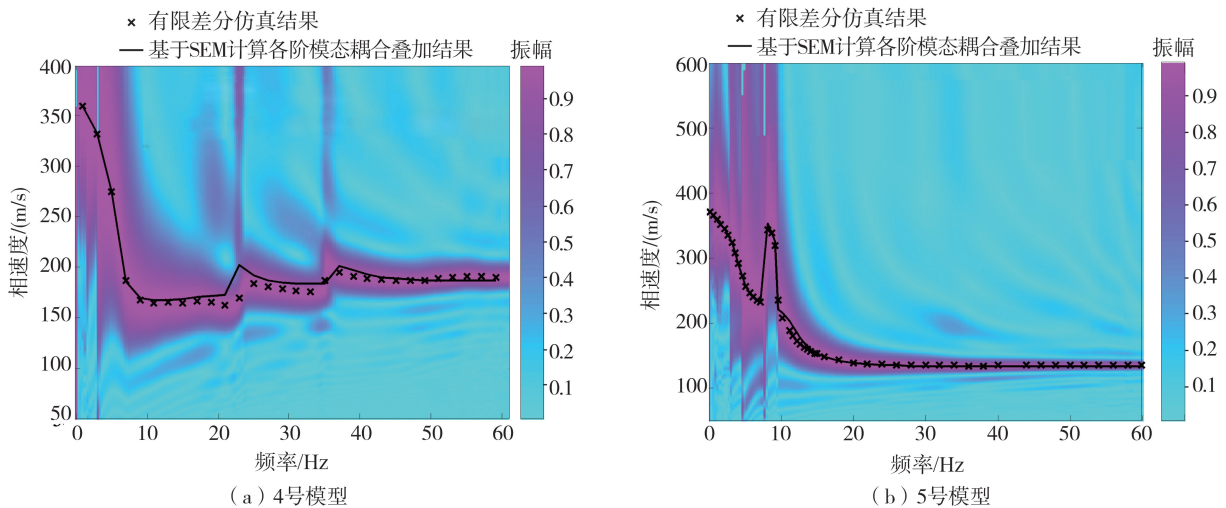


图 6 基于 SEM 计算结果与有限差分仿真比对

Fig. 6 Comparison of results calculated by SEM with finite difference numerical simulation

将图4~图6中叠加后的频散特征曲线通过半波长理论转换为 V_R 与探深的关系,如图7所示。结果显示,3号、4号、5号模型复杂成层结构模型沿深度的频散特征均会出现“之”字形回折现象,这些可为利用R波频散特征的拐点进行结构分层提供理论参考。

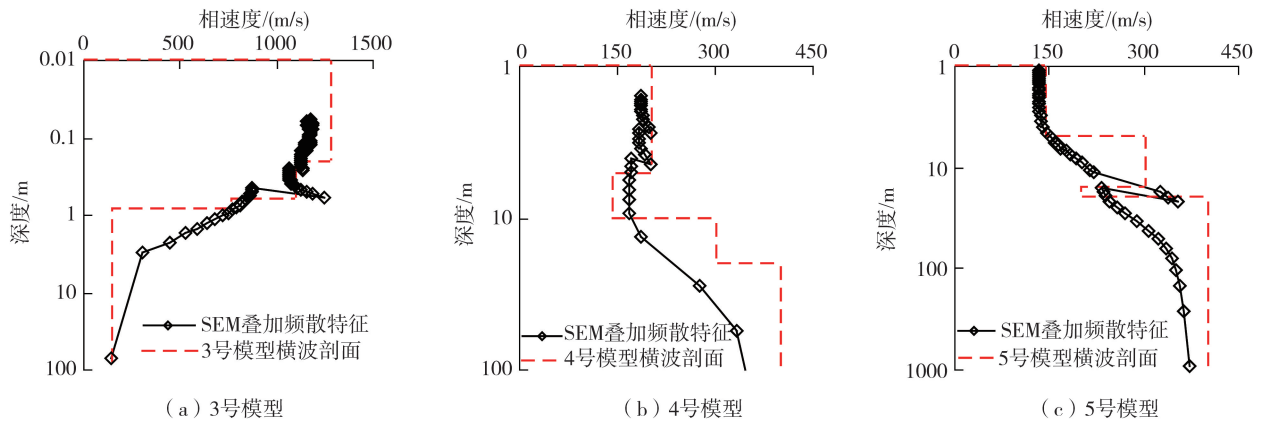


图7 基于SEM叠加频散曲线沿深度特征

Fig.7 Depth characteristics of stacked dispersion curve based on SEM

4 结论

本研究基于SEM建立了一种R波的频散曲线计算方法,并揭示了复杂成层结构中R波多阶模态之间的叠加耦合机理,主要结论如下:

1) 本研究视轴对称条件下层状半无限结构中的有限厚度层为双节点单元,半无限体视为单节点单元,以此构建各层结构的单元刚度矩阵,并结合层间接触边界条件,建立了基于SEM的R波理论频散方程。

2) 针对弹性半无限体和“上软下硬”规则成层结构,通过SEM计算R波多阶频散曲线和快速矢量传递解析算法对比发现所有结果与解析法计算相应结果之间的相对误差在0.05%以下,具有较高的精度。

3) 针对“上硬下软”的路面结构、含“软夹层”和含“硬夹层”的复杂成层结构,通过SEM求解各阶模态 V_R 对竖向位移的贡献值,建立了一种确定R波各模态耦合叠加耦合频散特征的新方法,并通过速度-应力有限差分数值仿真计算予以验证。

4) 基于SEM计算叠加耦合后的频散特征曲线,通过半波长理论转换为 V_R 与探深的关系发现,“上硬下软”的路面结构、含“软夹层”和含“硬夹层”的复杂成层结构沿深度的频散特征均会出现“之”字形回折现象,可为利用R波频散特征的拐点进行结构分层分析提供参考。

参考文献:

- [1] 吴世明, 曾国熙, 陈云敏, 等. 利用表面波频谱分析测试土层波速[J]. 地震工程与工程振动, 1988, 8(4): 27-32.
WU Shiming, ZENG Guoxi, CHEN Yunmin, et al. Measurement of wave velocity of soil deposits by spectral analysis of surface waves[J]. Earthquake Engineering and Engineering Dynamics, 1988, 8(4): 27-32. (in Chinese)
- [2] YANG X H, YUEN K V. All-parameters Rayleigh wave inversion[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2021, 20(2): 517-534.
- [3] HASKELL N A. The dispersion of surface waves on multilayered media[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1953, 43(1): 17-34.
- [4] THOMSON W T. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium[J]. Journal of Applied Physics, 1950, 21(2): 89-93.
- [5] SCHWAB F, KNOPOFF L. Surface-wave dispersion computations[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1970, 60(2): 321-344.
- [6] WATSON T H. A note on fast computation of Rayleigh wave dispersion in the multilayered elastic half-space[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1970, 60(1): 161-166.
- [7] ABO-ZENA A. Dispersion function computations for unlimited frequency values[J]. Geophysical Journal International, 1979, 58(1): 91-105.
- [8] CHEN X F. A systematic and efficient method of computing normal modes for multi-layered half-space[J]. Geophysical Journal International, 1993, 115(2): 391-409.
- [9] 袁腊梅, 凡友华, 孙书荣. 广义反射-透射系数算法的无量纲化[J]. 地震学报, 2009, 31(4): 377-384, 477.
YUAN Lamei, FAN Youhua, SUN Shurong. Making the calculation of generalized reflection-transmission coefficients dimensionless[J]. Acta Seismologica Sinica, 2009, 31(4): 377-384, 477. (in Chinese)

- [10] 凡友华, 刘家琦, 肖柏勋. 计算瑞利波频散曲线的快速矢量传递算法[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2002, 29(5): 25-30.
FAN Youhua, LIU Jiaqi, XIAO Baixun. Fast vector-transfer algorithm for computation of Rayleigh wave dispersion curves[J]. Journal of Hunan University (Natural Science), 2002, 29(5): 25-30. (in Chinese)
- [11] 凡友华, 肖柏勋, 刘家琦. 层状介质中轴对称柱面瑞利面波频散函数的计算[J]. 地震工程与工程振动, 2001, 21(3): 1-5.
FAN Youhua, XIAO Baixun, LIU Jiaqi. Computation of dispersion function of axis-symmetrical cylindrical Rayleigh wave in multi-layered media Rayleigh wave in multi-layered media[J]. Earthquake Engineering and Engineering Dynamics, 2001, 21(3): 1-5. (in Chinese)
- [12] SONG X H, GU H M, LIU J P, et al. Estimation of shallow subsurface shear-wave velocity by inverting fundamental and higher-mode Rayleigh waves[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2007, 27(7): 599-607.
- [13] 吴世明. 土介质中的波[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
WU Shiming. Wave propagation in soils[M]. Beijing: Science Press, 1997. (in Chinese)
- [14] ZHANG B X, YU M, LAN C Q, et al. Elastic wave and excitation mechanism of surface waves in multilayered media[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1996, 100(6): 3527-3538.
- [15] 杨天春, 王齐仁, 廖建平. 瑞利面波单点谱比曲线的理论计算与分析[J]. 应用力学学报, 2015, 32(4): 630-635, 707.
YANG Tianchun, WANG Qiren, LIAO Jianping. Study on spectral ratio of horizontal to vertical spectral ratio for Rayleigh waves[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2015, 32(4): 630-635, 707. (in Chinese)
- [16] DOYLE J F. Wave propagation in structures[M]. Springer US, 1989: 126-156.
- [17] WANG J X, LI H J, XING H J. A lumped mass Chebyshev spectral element method and its application to structural dynamic problems[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2022, 21(3): 843-859.
- [18] AL-KHOURY R, SCARPAS A, KASBERGEN C, et al. Spectral element technique for efficient parameter identification of layered media. I. Forward calculation[J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38(9): 1605-1623.
- [19] SUN Z J, KASBERGEN C, SKARPAS A, et al. A nonlinear spectral element model for the simulation of traffic speed deflectometer tests of asphalt pavements[J]. International Journal of Pavement Engineering, 2022, 23(4): 1186-1197.
- [20] 颜可珍, 吴罗成, 朱向平. 层状土体中 Rayleigh 波特性的谱元法研究[J]. 低温建筑技术, 2011, 33(11): 63-65.
YAN Kezhen, WU Luocheng, ZHU Xiangping. Study on Rayleigh wave characteristics in layered soil by spectral element method[J]. Low Temperature Architecture Technology, 2011, 33(11): 63-65. (in Chinese)
- [21] LEE H S. Viscowave-a new solution for viscoelastic wave propagation of layered structures subjected to an impact load[J]. International Journal of Pavement Engineering, 2014, 15(6): 542-557.
- [22] 任青, 吕政权. 基于有限元-解析法的层状地基中 Rayleigh 波高阶频散特性研究[J]. 土木工程学报, 2014, 47(2): 103-108.
REN Qing, LU Zhengquan. Study on multimode dispersion of Rayleigh wave in layered soils based on FEM-ANALYTICAL method[J]. China Civil Engineering Journal, 2014, 47(2): 103-108. (in Chinese)
- [23] JTG D50—2017 公路沥青路面设计规范[S]. 北京: 人民交通出版社, 2017.
JTG D50—2017 Specifications for design of highway asphalt pavement[S]. Beijing: China Communications Press, 2017. (in Chinese)
- [24] 杨博, 龙友明, 刘境奇, 等. 基于高分辨率 Radon 变换的瑞利波反演在役路基动模量[J]. 振动与冲击, 2022, 41(10): 222-230, 237.
YANG Bo, LONG Youming, LIU Jingqi, et al. Rayleigh wave back-calculation for the dynamic modulus of subgrades in service based on the high resolution linear radon transform[J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(10): 222-230, 237. (in Chinese)
- [25] NING L, DAI T Y, WANG L M, et al. Numerical investigation of Rayleigh-wave propagation on canyon topography using finite-difference method[J]. Journal of Applied Geophysics, 2018, 159: 350-361.
- [26] PARK C B, MILLER R D, XIA J H. Multichannel analysis of surface waves[J]. Geophysics, 1999, 64(3): 800-808.