DOI：10.13234/j.issn.2095-2805.2026.9.360 **中图分类号**：TM464 **文献标志码**：A

逆变器不连续脉宽调制下的共模电压解析模型

郑 剑(中国电源学会会员)，林良帅(中国电源学会学生会员)，
彭存性(中国电源学会学生会员)，赵凯辉(中国电源学会会员)，
刘 芳(中国电源学会学生会员)
(湖南工业大学交通与电气工程学院，株洲 412007)

摘要：不连续脉宽调制DPWM(discontinuous pulse width modulation)广泛用于大功率、高开关频率的三相逆变器，随着逆变器性能要求的提升，DPWM产生的共模电压给系统带来的负面影响不容忽视，为了预测和抑制共模电压，需要建立共模电压的数学解析模型。运用双重傅里叶级数理论，建立了DPWM0、DPWM1和DPWMmax的共模电压解析模型，由解析模型得出计算频谱，对3种解析模型和计算频谱进行分析、对比，得出共模电压的特性规律，并给出抑制共模电压的途径。在逆变器驱动电机系统中进行仿真和实验，共模电压的仿真频谱和实验频谱均与计算频谱一致，验证了解析模型的正确性与有效性。

关键词：三相逆变器；不连续脉宽调制；共模电压；解析模型；双重傅里叶级数

Analytical Models of Common-mode Voltage under Discontinuous Pulse-width Modulation for Inverters

ZHENG Jian, *Member*, *CPSS*, LIN Liangshuai, *Student Member*, *CPSS*,
PENG Cunxing, *Student Member*, *CPSS*, ZHAO Kaihui, *Member*, *CPSS*,
LIU Fang, *Student Member*, *CPSS*
(School of Traffic and Electrical Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412007, China)

Abstract: Discontinuous pulse width modulation (DPWM) is widely used in high-power, high-switching three-phase inverters. With the improvement of the inverter performance requirements, the negative impact of the common-mode voltage generated by DPWM on the system cannot be ignored. In order to predict and suppress common-mode voltages, it is necessary to establish the mathematical analytical models of common-mode voltages. By applying the double Fourier series theory, the analytical models for common-mode voltage of DPWM0, DPWM1, and DPWMmax are established. The calculated spectra are derived from the analytical models. The characteristic patterns of common-mode voltage are derived and several approaches to suppressing common-mode voltage are given through the analyses and comparisons of these three analytical models and calculated spectra. Simulations and experiments are carried out based on an inverter-driven motor system, and the simulated spectra and experimental spectra of the common-mode voltage are consistent with the calculated spectra, which verifies the correctness and validity of the analytical models.

Keywords: Three-phase inverter; discontinuous pulse width modulation; common-mode voltage; analytical model; double Fourier series

收稿日期：2024-12-21；**修回日期**：2025-01-16；**录用日期**：2025-03-13；**网络首发日期**：2025-03-31
基金项目：国家自然科学基金资助项目(52477188，62303178)；湖南省自然科学基金资助项目(2025JJ80310，2026JJ80067)
This work is supported by National Natural Science Foundation of China under the grants 52477188 and 62303178; Hunan Provincial Natural Science Foundation of China under the grants 2025JJ80310 and 2026JJ80067

经典的空间矢量脉宽调制SVPWM(space vector pulse width modulation)是一种连续脉宽调制[1]，与经典SVPWM相比，不连续脉宽调制DPWM

(discontinuous pulse width modulation)因开关损耗较小的特性在大功率、高开关频率的逆变器中得到广泛应用[2-3]。DPWM 方法有 DPWM0、DPWM1、DPWM2、DPWM3、DPWMmax、DPWMmin 等 6 种[4]。随着逆变器性能要求的提升，DPWM 产生的共模电压给系统带来的漏电流、功率器件应力、电磁干扰等负面影响不容忽视[5-7]，因此在高性能场合需要预测和抑制共模电压，为此需要建立共模电压的数学解析模型。

文献[8-10]针对三相两电平逆变器的邻态脉宽调制 PWM(pulse width modulation)、有源零态 PWM、240°钳位 SVPWM，运用双重傅里叶级数分析了共模电压，并总结出这些 PWM 策略对共模电压的影响；文献[11]针对交错三相两电平逆变器的 DPWM、正弦波脉宽调制 SPWM(sinusoidal pulse width modulation)、SVPWM 以及载波移相 PWM，运用双重傅里叶级数分析了共模电压，并得出这 4 种 PWM 策略的共模电压特性；文献[12]针对三相两电平裂源逆变器，对 SVPWM、偏置三次谐波注入 PWM 和 DPWMmax 的共模电压进行双重傅里叶级数分析，得出这 3 种 PWM 的共模电压谐波特性；文献[13]针对升降压型逆变电源的共模电压问题，提出了一种 2/3 不连续 PWM 方法，利用双重傅里叶级数理论对共模电压进行了分析。上述研究以双重傅里叶级数为工具，对不同逆变器的典型 PWM 方法的共模电压进行分析，但均未建立共模电压的具体解析模型。

文献[14]研究了不同 PWM 策略下永磁同步电机的边带振动声学特性，利用双重傅里叶级数建立了 DPWMmin 与连续 SVPWM 的边带电流谐波解析模型，并与其他 DPWM 进行了对比；文献[15]提出了一种用于三桥两相逆变器的 DPWM 方法，推导了该 DPWM 和连续 SVPWM 的双变量控制波形的完整谐波解；文献[16]针对碳化硅 MOSFET 的第三象限工作特性，提出了同步整流 DPWM，利用双重傅里叶级数理论建立相电压解析模型，并在此模型基础上得出其谐波特性；文献[17]针对电机噪声较大的问题，提出了一种斜向 DPWM 方法，并利用双重傅里叶级数理论建立了线电压的谐波解析模型，根据解析模型从理论上验证了所提方法的噪声抑制效果。上述研究建立了逆变器输出电流和电压的谐波解析模型，但均未建立共模电压的具体解析模型。

在上述研究的基础上，本文首先分析三相两电平逆变器 DPWM 的共模电压波形特点，然后应用双重傅里叶级数理论建立 DPWM 共模电压具体解析模型，根据解析模型得出共模电压特性规律，并给出抑制共模电压的一些途径，最后通过仿真和实验验证解析模型的正确性和有效性。

1　DPWM 共模电压的波形特点

三相两电平逆变器的典型负载为星形负载，如图 1 所示，直流母线电压为 $2U_{dc}$，共模电压 u_{cm} 为星形结点 N 与直流母线电压中点 z 之间的电压，其瞬时值为

$$u_{cm} = (u_{az} + u_{bz} + u_{cz})/3 \tag{1}$$

式中，u_{az}、u_{bz}、u_{cz} 分别为逆变器 a、b、c 相桥臂相电压。

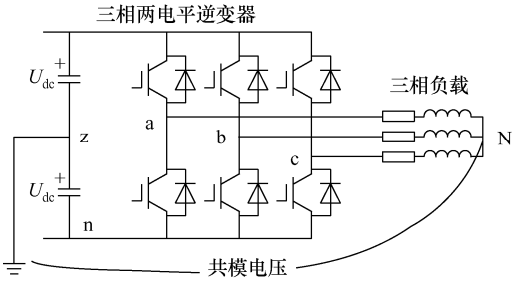


图 1　三相两电平逆变器的共模电压

Fig. 1 The common-mode voltage of a three-phase two-level inverter

在 6 种 DPWM 方法中，DPWM0、DPWM1 和 DPWMmax 具有代表性，图 2 为这 3 种 DPWM 的共模电压波形示意图，为清晰起见，每个扇区只画出 1 个开关周期波形，其他开关周期波形的形状与之相似，但波形的宽度会有所变化。对比图 2(a)、2(b)和 2(c)可知，3 种 DPWM 的共模电压波形是不相同的。由图 2(a)可知，DPWM0 在 6 个扇区 S1 ~ S6 的共模电压在$-U_{dc}$、$-U_{dc}/3$、$U_{dc}/3$、U_{dc} 这 4 个电平之间跳变。由图 2(b)可知，DPWM1 共模电压

的跳变与 DPWM0 一致，但 DPWM1 将 6 个扇区细分为 12 个扇区 S1 ~ S12。由图 2(c)可知，DPWMmax 共模电压在$-U_{dc}/3$、$U_{dc}/3$、U_{dc}这 3 个电平之间跳变。由此可以推断共模电压谐波特性也是不相同的，下面运用双重傅里叶级数对共模电压进行数学分析。

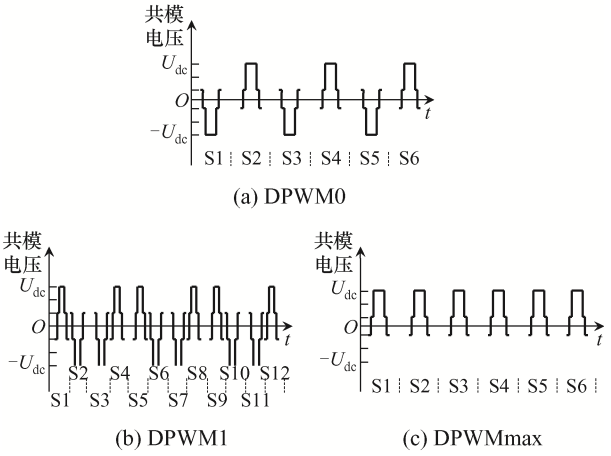


图 2 3 种 DPWM 的共模电压波形

Fig. 2 Common-mode voltage waveforms of three types of DPWM

2 DPWM 共模电压的解析模型

以 DPWM0 为例，在每个扇区，参考矢量 $\boldsymbol{U}_{ref}$ 由扇区边界的 2 个非零矢量、1 个零矢量合成。如图 3(a)所示，在 S1 扇区，$\boldsymbol{U}_{ref}$的合成表达式为

$$\boldsymbol{U}_{ref}=U_{ref}\angle\theta_0=\frac{T_1}{T_s/2}\boldsymbol{U}_1+\frac{T_2}{T_s/2}\boldsymbol{U}_2 \tag{2}$$

式中：U_{ref}为参考矢量 $\boldsymbol{U}_{ref}$的长度；θ_0为参考矢量与扇区始边矢量 $\boldsymbol{U}_1$的夹角；T_s为开关周期，T_1、T_2分别非零矢量 $\boldsymbol{U}_1$、$\boldsymbol{U}_2$在 $T_s/2$ 内的作用时间。

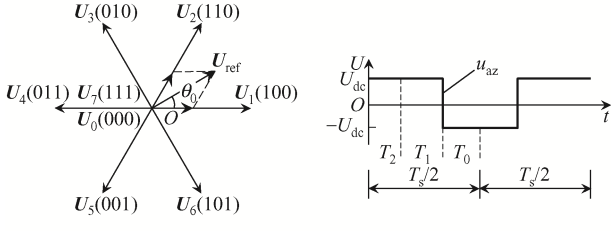


图 3 DPWM0 的参考矢量合成与 a 相桥臂电压波形

Fig. 3 Synthesis of reference vectors and a-phase bridge arm voltage waveform for DPWM0

由式(2)解得

$$T_1=\frac{U_{ref}}{U_{dc}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\theta_0+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{T_s}{2} \tag{3}$$

$$T_2=\frac{U_{ref}}{U_{dc}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\theta_0-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{T_s}{2} \tag{4}$$

在 S1 扇区 1 个开关周期内，a 相桥臂电压 u_{az} 的波形如图 3(b)所示，其在 $T_s/2$ 内的平均值计算式为

$$\langle u_{az}\rangle=\frac{2U_{dc}}{T_s}(T_1+T_2-T_0) \tag{5}$$

式中，T_0 为零矢量 $\boldsymbol{U}_0$ 的作用时间，且 $T_1+T_2+T_0=T_s/2$。将式(3)和式(4)代入式(5)，得 a 相桥臂参考电压为

$$\langle u_{az}\rangle=-U_{dc}+\sqrt{3}MU_{dc}\cos\left(\theta_0-\frac{\pi}{6}\right) \tag{6}$$

式中，M 为调制度，定义为 U_{ref}/U_{dc}。由式(6)进一步得到 a 相桥臂参考电压标幺化后的解析式为

$$\frac{\langle u_{az}\rangle}{U_{dc}}=-1+\sqrt{3}M\cos\left(\theta_0-\frac{\pi}{6}\right) \tag{7}$$

同理可以得出其他扇区 a 相桥臂参考电压标幺化后的解析式，见表 1，这些标幺化电压波形也就是调制波的波形。

表 1 DPWM0 方式下 a 相桥臂参考电压标幺化解析式

Tab. 1 Analytical expression of a-phase bridge arm reference voltage in DPWM0 mode

60°扇区	a 相桥臂的$\langle u_{az}\rangle/U_{dc}$
$2\pi/3\leqslant\theta_0\leqslant\pi$	-1
$\pi/3\leqslant\theta_0\leqslant2\pi/3$	$1+\sqrt{3}\,M\cos(\theta_0+\pi/6)$
$0\leqslant\theta_0\leqslant\pi/3$	$-1+\sqrt{3}\,M\cos(\theta_0-\pi/6)$
$-\pi/3\leqslant\theta_0\leqslant0$	1
$-2\pi/3\leqslant\theta_0\leqslant-\pi/3$	$-1+\sqrt{3}\,M\cos(\theta_0+\pi/6)$
$-\pi\leqslant\theta_0\leqslant-2\pi/3$	$1+\sqrt{3}\,M\cos(\theta_0-\pi/6)$

PWM 信号由高频载波与低频调制波比较形成，根据双重傅里叶级数理论，为了数学运算的方便，取相桥臂中点与负直流母线 n 点之间的电压 $U_{an}(t)$为考察对象。$U_{an}(t)$含有 2 个独立的时间变量 $x(t)$、$y(t)$，分别表示高频载波和低频调制波的时间变化，可表示为

$$\begin{cases} x(t) = \omega_s t + \theta_s \\ y(t) = \omega_0 t + \theta_0 \end{cases} \tag{8}$$

式中：ω_s 和 θ_s 分别为载波的角频率和初相位；ω_0 和 θ_0 分别为调制波的角频率和初相位。

对 $U_{an}(t)$进行双重傅里叶分析，可以把 $U_{an}(x, y)$ 分为 4 部分，分别为直流分量、基带谐波、载波谐波及边带谐波，其展开式为

$$\begin{aligned} U_{an}(x,y) = {} & \frac{A_{00}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{0n}\cos(ny) + B_{0n}\sin(ny)\right] + \\ & \sum_{m=1}^{\infty}\left[A_{m0}\cos(mx) + B_{m0}\sin(mx)\right] + \\ & \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty}\left[A_{mn}\cos(mx+ny) + B_{mn}\sin(mx+ny)\right] \end{aligned} \tag{9}$$

式中：m 为载波的索引变量；n 为基带的索引变量；A、B 为对应的系数。

相桥臂电压波形由 1 个完整基波周期的波形组成，因此式(9)中各个系数以复数的形式表达为

$$A_{mn} + \mathrm{j}B_{mn} = \frac{1}{2\pi^2}\cdot \sum_{i=1}^{6}\int_{y_s(i)}^{y_e(i)}\int_{x_r(i)}^{x_f(i)} U_{an}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(mx+ny)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{10}$$

式中，$x_f(i)$、$y_e(i)$和 $x_r(i)$、$y_s(i)$分别为内、外部积分的上限和下限。

对于 DPWM0，在 1 个载波周期内，以负直流母线 n 点为参考点，当 a 相桥臂调制波大于三角载波时，a 相桥臂电压由 0 切换至 $2U_{dc}$；当 a 相桥臂调制波小于三角载波时，a 相桥臂电压为 0。因此，通过 a 相调制波与三角载波比较可以得到式(10)中内、外部积分的上限与下限，见表 2。

表 2　DPWM0 方式的内、外部积分限

Tab. 2 Internal and external integral limits of DPWM0 mode

i	$y_s(i)$	$y_e(i)$	$x_r(i)$	$x_f(i)$
1	2π/3	π	0	0
2	π/3	2π/3	−π/2[2+$\sqrt{3}$ Mcos(y+π/6)]	π/2[2+$\sqrt{3}$ Mcos(y+π/6)]
3	0	π/3	−π/2[$\sqrt{3}$ Mcos(y−π/6)]	π/2[$\sqrt{3}$ Mcos(y−π/6)]
4	−π/3	0	−π	π
5	−2π/3	−π/3	−π/2[$\sqrt{3}$ Mcos(y+π/6)]	π/2[$\sqrt{3}$ Mcos(y+π/6)]
6	−π	−2π/3	−π/2[2+$\sqrt{3}$ Mcos(y−π/6)]	π/2[2+$\sqrt{3}$ Mcos(y−π/6)]

将表 2 中的上、下限代入式(10)求得各个系数如下。

当 m=0、n=0 时，有

$$\begin{cases} A_{00} = 2U_{dc} \\ B_{00} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

当 m=0、n>0 时，有

$$\begin{cases} A_{0n} = \dfrac{2\sqrt{3}MU_{dc}}{\pi}\left\{\dfrac{1}{n+1}\cos\left[(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right]\sin\left[(n+1)\dfrac{\pi}{3}\right]\cos\left[(n+1)\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}\right] + \right. \\ \qquad \left. \dfrac{1}{n-1}\cos\left[(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right]\sin\left[(n-1)\dfrac{\pi}{3}\right]\cos\left[(n-1)\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}\right]\right\} \\ B_{0n} = \dfrac{2\sqrt{3}MU_{dc}}{\pi}\left\{\dfrac{1}{n+1}\cos\left[(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right]\cos\left[(n+1)\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}\right]\cdot\left\{1-\cos\left[(n+1)\dfrac{\pi}{3}\right]\right\} + \right. \\ \qquad \left. \dfrac{1}{n-1}\cos\left[(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right]\cos\left[(n-1)\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}\right]\cdot\left\{1-\cos\left[(n-1)\dfrac{\pi}{3}\right]\right\}\right\} + \dfrac{2U_{dc}}{n\pi}\left\{2\cos\dfrac{2\pi n}{3} - 2\cos\dfrac{\pi n}{3} - \cos(n\pi)+1\right\} \end{cases} \tag{12}$$

其中，当 m=0、n=1 时，有

$$\begin{cases} A_{01} = MU_{dc} \\ B_{01} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

当 $m>0$、$n=0$ 时，利用贝塞尔公式，可以得出

$$\begin{cases} A_{m0}=\dfrac{8U_{\mathrm{dc}}}{m\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{3}\cos\frac{k\pi}{6}\mathrm{J}_k\left(m\frac{\sqrt{3}\pi}{2}M\right)[1-\cos(m\pi)] \\ B_{m0}=0 \end{cases} \tag{14}$$

式中，J_k 为第一类贝塞尔函数，k 为阶数。

当 $m>0$、$n>0$ 时，有

$$\begin{cases} A_{mn}=\dfrac{4U_{\mathrm{dc}}}{m\pi^2}\left\{\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{n\pi}{2}\cos\dfrac{n\pi}{6}\mathrm{J}_n\left(m\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}M\right)[1-\cos(m\pi)]+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi}{2}\mathrm{J}_k\left(m\frac{\sqrt{3}\pi}{2}M\right)\cdot\right. \\ \quad\left\{\dfrac{1}{n+k}\sin\left[(n+k)\dfrac{\pi}{3}\right]\cdot\left\{\cos\left[(n+k)\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{k\pi}{6}\right]+\cos\left[(n+k)\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{6}\right]\cos(m\pi)\right\}\Big|_{k\neq -n}+\right. \\ \quad\left.\left.\dfrac{1}{n-k}\sin\left[(n-k)\dfrac{\pi}{3}\right]\cdot\left\{\cos\left[(n-k)\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{6}\right]+\cos\left[(n-k)\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{k\pi}{6}\right]\cos(m\pi)\right\}\Big|_{k\neq n}\right\}\right\} \\ B_{mn}=-\dfrac{4U_{\mathrm{dc}}}{m\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi}{2}\mathrm{J}_k\left(m\frac{\sqrt{3}\pi}{2}M\right)\cdot \\ \quad\left\{\dfrac{1}{n+k}\left\{1-\cos\left[(n+k)\dfrac{\pi}{3}\right]\right\}\cdot\left\{\cos\left[(n+k)\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{k\pi}{6}\right]+\cos\left[(n+k)\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{6}\right]\cos(m\pi)\right\}\Big|_{k\neq -n}+\right. \\ \quad\left.\dfrac{1}{n-k}\left\{1-\cos\left[(n-k)\dfrac{\pi}{3}\right]\right\}\cdot\left\{\cos\left[(n-k)\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{6}\right]+\cos\left[(n-k)\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{k\pi}{6}\right]\cos(m\pi)\right\}\right. \end{cases} \tag{15}$$

将 $U_{\mathrm{an}}(x,\ y)$的双重傅里叶展开式中的直流分量 减去 U_{dc}即可得 u_{az}，因此 u_{az}的双重傅里叶展开式为

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{az}}=&\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{0n}\cos(n\omega_0 t)+B_{0n}\sin(n\omega_0 t)\right]+\sum_{m=1}^{\infty}\left[A_{m0}\cos(m\omega_{\mathrm{s}}t)+B_{m0}\sin(m\omega_{\mathrm{s}}t)\right]+ \\ &\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\left[A_{mn}\cos(m\omega_{\mathrm{s}}t+n\omega_0 t)+B_{mn}\sin(m\omega_{\mathrm{s}}t+n\omega_0 t)\right] \end{aligned} \tag{16}$$

同理，可以得到 b、c 两相桥臂相电压的双重傅里叶展开式。

进一步由式(1)可得三相逆变器共模电压的双重傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{cm}}=&\sum_{n=3,9,15\cdots}^{\infty}\left\{\frac{2\sqrt{3}MU_{\mathrm{dc}}}{\pi}\cdot\lambda_1\cdot R(t)+\left\{\frac{2\sqrt{3}MU_{\mathrm{dc}}}{\pi}\cdot\lambda_2+\frac{12U_{\mathrm{dc}}}{n\pi}\right\}\cdot S(t)\right\}+ \\ &\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{8U_{\mathrm{dc}}}{m\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{3}\cos\frac{k\pi}{6}\mathrm{J}_k\left(m\frac{\sqrt{3}\pi}{2}M\right)[1-\cos(m\pi)]\cdot\cos(m\omega_{\mathrm{s}}t)\right\}+ \\ &\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{4U_{\mathrm{dc}}}{m\pi^2}\left\{\frac{\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{6}\mathrm{J}_n\left(m\frac{\sqrt{3}\pi}{2}M\right)[1+\cos(m\pi)]+\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi}{2}\mathrm{J}_k\left(m\frac{\sqrt{3}\pi}{2}M\right)\cdot\lambda_3\right\}\cdot\right. \\ &\left.G(t)-\frac{4U_{\mathrm{dc}}}{m\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi}{2}\mathrm{J}_k\left(m\frac{\sqrt{3}\pi}{2}M\right)\cdot\lambda_4\cdot H(t)\right\}_{(n=3p,\,p=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)} \end{aligned} \tag{17}$$

式中：$\lambda_1\sim\lambda_4$ 为计算系数；$R(t)=\dfrac{1}{3}\left\{\cos(n\omega_0 t)+\cos\left[n\left(\omega_0 t+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]+\cos\left[n\left(\omega_0 t-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]\right\}$；$S(t)=$

$$\frac{1}{3}\left\{\sin(n\omega_0 t)+\sin\left[n\left(\omega_0 t+\frac{2\pi}{3}\right)\right]+\sin\left[n\left(\omega_0 t-\frac{2\pi}{3}\right)\right]\right\};\quad G(t)=\frac{1}{3}\left\{\cos\left(m\omega_s t+n\omega_0 t\right)+\cos\left[m\omega_s t+n\left(\omega_0 t+\frac{2\pi}{3}\right)\right]+\cos\left[m\omega_s t+n\left(\omega_0 t-\frac{2\pi}{3}\right)\right]\right\};$$

$$H(t)=\frac{1}{3}\left\{\sin\left(m\omega_s t+n\omega_0 t\right)+\sin\left[m\omega_s t+n\left(\omega_0 t+\frac{2\pi}{3}\right)\right]+\sin\left[m\omega_s t+n\left(\omega_0 t-\frac{2\pi}{3}\right)\right]\right\}。$$

以相同方法可得DPWM1和DPWMmax方式下三相逆变器共模电压的双重傅里叶级数展开式，分别为

$$\begin{aligned}u_{\mathrm{cm}}=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4U_{\mathrm{dc}}}{\pi}\cdot\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\left(2\cos\frac{n\pi}{3}-1\right)+\sqrt{3}M\left\{\frac{1}{n+1}\cos\left[(n+1)\frac{\pi}{2}\right]\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{6}\right]\cos\left[(n+1)\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right]+\right.\right.\\&\left.\left.\frac{1}{n-1}\cos\left[(n-1)\frac{\pi}{2}\right]\sin\left[(n-1)\frac{\pi}{6}\right]\cos\left[(n-1)\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right]\right\}\right\}\cdot\\&R(t)+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{8U_{\mathrm{dc}}}{m\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{2}\mathrm{J}_k\left(m\frac{\sqrt{3}\pi}{2}M\right)\left(\sin\frac{k\pi}{3}-\cos(m\pi)\cdot\sin\frac{2k\pi}{3}\right)\cdot\cos(m\omega_s t)\right\}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{8U_{\mathrm{dc}}}{m\pi^2}\cdot\\&\left\{\frac{\pi}{12}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{6}\mathrm{J}_n\left(m\frac{\sqrt{3}\pi}{2}M\right)\cdot[1+\cos(m\pi)]+\sum_{\substack{k=1\\k\neq -n}}^{\infty}\frac{1}{n+k}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\left[(n+k)\frac{\pi}{6}\right]\mathrm{J}_k\left(m\frac{\sqrt{3}\pi}{2}M\right)\cdot\right.\\&\left\{\cos\left[(n+k)\frac{\pi}{3}-\frac{k\pi}{6}\right]+\cos\left[(n+k)\frac{2\pi}{3}+\frac{k\pi}{6}\right]\cos(m\pi)\right\}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{1}{n-k}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\left[(n-k)\frac{\pi}{6}\right]\mathrm{J}_k\left(m\frac{\sqrt{3}\pi}{2}M\right)\cdot\\&\left.\left\{\cos\left[(n-k)\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{6}\right]+\cos\left[(n-k)\frac{2\pi}{3}-\frac{k\pi}{6}\right]\cos(m\pi)\right\}\right\}\cdot G(t)\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}u_{\mathrm{cm}}=&\frac{(2\pi-3\sqrt{3}M)U_{\mathrm{dc}}}{2\pi}+\sum_{n=3,9,15,\cdots}^{\infty}\frac{2\sqrt{3}MU_{\mathrm{dc}}}{\pi(n^2-1)}\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{3}+\frac{1}{2}\cos(n\pi)\right)\cdot R(t)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{8U_{\mathrm{dc}}}{m\pi^2}\left\{\frac{\pi}{3}\cos(m\pi)\cdot\right.\\&\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{6}\mathrm{J}_n\left(m\frac{\sqrt{3}\pi}{2}M\right)+\cos(m\pi)\cdot\sum_{\substack{k=1\\k\neq -n}}^{\infty}\frac{1}{n+k}\sin\frac{k\pi}{2}\cos\left[(4n+5k)\frac{\pi}{6}\right]\sin\left[(n+k)\frac{\pi}{3}\right]\cdot\\&\left.\mathrm{J}_k\left(m\frac{\sqrt{3}\pi}{2}M\right)+\cos(m\pi)\cdot\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{1}{n-k}\sin\frac{k\pi}{2}\cos\left[(4n-5k)\frac{\pi}{6}\right]\sin\left[(n-k)\frac{\pi}{3}\right]\mathrm{J}_k\left(m\frac{\sqrt{3}\pi}{2}M\right)\right\}\cdot G(t)\end{aligned}\tag{19}$$

式(17)、式(18)和式(19)即 DPWM0、DPWM1 和 DPWMmax 的共模电压具体解析模型。利用解析模型进行计算，根据计算结果可以画出 3 种 DPWM 方式的共模电压计算频谱。图(4)为当 ω_0= 50 Hz、ω_s=5 kHz 时的计算频谱，频谱范围为 0~25 kHz。

综合分析共模电压的解析模型和计算频谱，可得 3 种 DPWM 共模电压的特性如下。

(1)直流分量

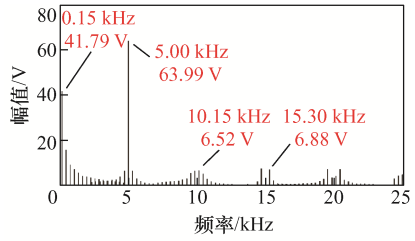
DPWM0 和 DPWM1 的共模电压没有直流分量，而 DPWMmax 的共模电压有直流分量。

(2)基带谐波

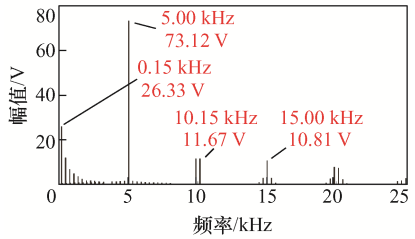
3 种 DPWM 共模电压的基带谐波都仅存在于 3 及 3 的奇数倍次处。其中 DPWM0 的基带谐波幅值最大，DPWM1 居中，DPWMmax 最小。

(3)载波谐波

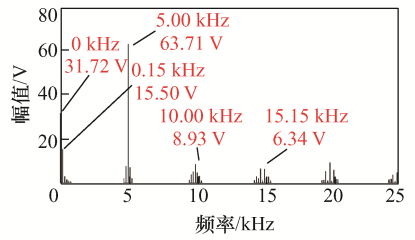
DPWM0 和 DPWM1 的共模电压仅含有奇次载波谐波，而 DPWMmax 的共模电压既有奇次载波谐波又有偶次载波谐波。三者均在 m=1、n=0(即开关频率)时共模电压谐波幅值达到最大，其中 DPWM1 最大，DPWM0 居中，DPWMmax 最小。



(a) DPWM0



(b) DPWM1



(c) DPWMmax

图 4 3 种 DPWM 的共模电压计算频谱

Fig. 4 Calculation spectra of common-mode voltage for three types of DPWM

(4)边带谐波

DPWM0 和 DPWM1 的共模电压在奇次载波频率周围仅含有 3 的偶数倍次边带谐波分量，在偶次载波频率周围仅含有 3 的奇数倍次边带谐波分量；而 DPWMmax 的共模电压在所有载波频率周围含有 3 的整数倍次边带谐波分量。同时由解析模型还可知，DPWM0 由于 B_{mn} 的存在，共模电压的边带谐波分量变得复杂。DPWM1 和 DPWMmax 在某一特定载波频率周围处，共模电压的边带谐波幅值会随 n 的增大而减少。

由解析模型可知，共模电压的谐波成分很丰富，低频成分主要是基波的 3 次谐波，高频成分主要是整数倍载波谐波及附近的边带谐波。抑制共模电压的途径有硬件和软件 2 大类，硬件途径主要是增设共模滤波器，软件途径主要是对 PWM 算法进行改进。

硬件方面，共模扼流圈和共模滤波器对不同频段的共模电压抑制效果不同，根据解析模型可得知不同频段的谐波成分，对硬件进行优化设计和合理选型。若要求从 $3\omega_s$ 开始抑制共模电压，则选择共模扼流圈；若要求从 ω_s 开始抑制共模电压，则选择共模滤波器。

软件方面，由解析模型可知，开关频率处谐波幅值最大，若将开关频率在 1 个频带内随机变化，则共模电压谐波尖峰将分散至频带，从而降低峰值。另外，共模电压在各开关周期的波形形状虽然相似，但宽度不同，导致共模电压的谐波成分丰富。若各开关周期的波形完全相同，则谐波成分大幅度减少，因此可以通过优化各个矢量的时间和作用顺序，使各开关周期的波形尽量相同。

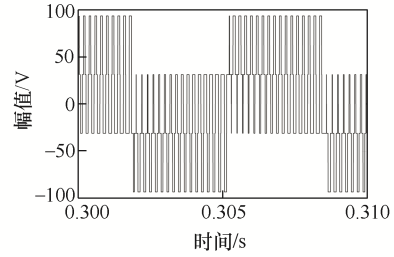
3 仿真和实验

为了验证共模电压解析模型的正确性和有效性，对逆变器驱动永磁同步电机系统的 DPWM 进行仿真和实验。在 MATLAB/Simulink 平台上进行仿真，仿真参数与实验参数一致：直流母线电压 187.5 V，开关频率 5 kHz，电机额定电压 130 V/50 Hz，极对数 4，定子电阻 0.958 Ω，定子直轴电感 5.25 mH，交轴电感 12 mH，转子磁链 0.182 7 Wb，转动惯量 0.003 kg·m^2，阻尼系数 0.008 N·m·s。系统采用 i_d=0 的矢量控制，转速指令值 750 r/min，调制度 M=0.8。仿真时空载起动，第 0.2 s 施加额定负载 10 N·m；实验时空载起动，第 60.0 s 施加额定负载 10 N·m。

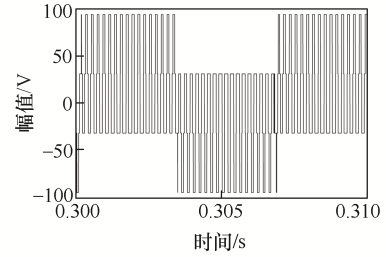
3 种 DPWM 共模电压的仿真波形如图 5 所示。从图 5(a)和 5(b)可以看出，DPWM0 与 DPWM1 方式下共模电压在−93.75、−31.25、31.25、93.75 V 这 4 个电平之间跳变；由图 5(c)可知，DPWMmax 方式下共模电压在−31.25、31.25、93.75 V 这 3 个电平之间跳变，与理论分析中共模电压的电平跳变一致。

对 3 种 DPWM 共模电压进行了快速傅里叶变换 FFT(fast Fourier transform)分析，其仿真频谱如图 6 所示。从图 6(a)和 6(b)可以看出，DPWM0 与 DPWM1 的共模电压没有直流分量，受第一载波谐波对应的边带谐波影响，低频段下 DPWM0 与 DPWM1 的共模电压的谐波变得复杂，从而导致含有较多的低次谐波，并在 f=10 kHz 和 f=20 kHz 时谐波幅值为 0，在 f=5 kHz、f=15 kHz 及 f=25 kHz 时含有

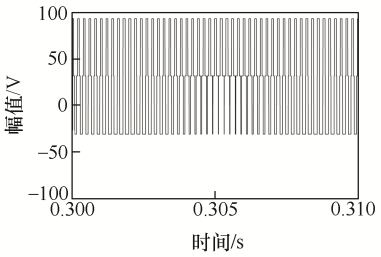
谐波。由图 6(c)可知，DPWMmax 的共模电压存在直流分量，在低频频段，共模电压谐波幅值比 DPWM0 的要小，其谐波主要分布在载波频率附近，幅值随着 n 的增大而减小。以上结果均与理论分析一致。



(a) DPWM0



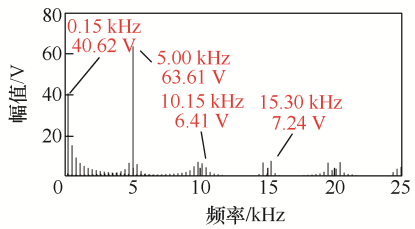
(b) DPWM1



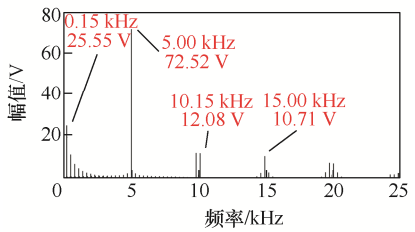
(c) DPWMmax

图 5　3 种 DPWM 的共模电压仿真波形

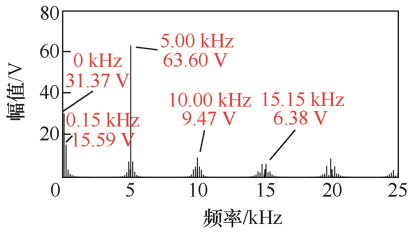
Fig. 5 Common-mode voltage simulation waveforms of three types of DPWM



(a) DPWM0



(b) DPWM1



(c) DPWMmax

图 6　3 种 DPWM 的共模电压仿真频谱

Fig. 6 Common-mode voltage simulation spectra of three types of DPWM

进一步将图 6 与图 4 进行对比可以看出，仿真频谱与计算频谱非常相似。将仿真频谱值与计算频谱值进行了对比，见表 3。由表 3 可知，仿真值与

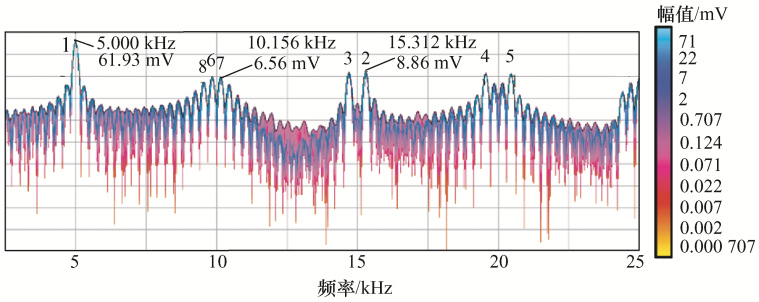
表 3　3 种 DPWM 的共模电压仿真频谱值与计算频谱值

Tab. 3 Spectra values of simulation and calculation for three types of DPWM common-mode voltages

调制方法	(m, n)	f/Hz	仿真值/V	计算值/V
DPWM0	(0, 0)	0	0.01	0
	(0, 3)	150	40.62	41.79
	(0, 9)	450	15.22	15.69
	(1, −6)	4 700	6.63	6.39
	(1, 0)	5 000	63.61	63.99
	(1, 6)	5 300	5.99	6.41
	(2, −3)	9 850	7.08	6.34
	(2, 0)	10 000	0.03	0
	(2, 3)	10 150	6.41	6.52
DPWM1	(0, 0)	0	0.02	0
	(0, 3)	150	25.55	26.33
	(0, 9)	450	11.51	11.87
	(1, −6)	4 700	2.28	1.79
	(1, 0)	5 000	72.52	73.12
	(1, 6)	5 300	2.25	1.84
	(2, −3)	9 850	12.28	11.59
	(2, 0)	10 000	0.02	0
	(2, 3)	10 150	12.08	11.67
DPWMmax	(0, 0)	0	31.37	31.72
	(0, 3)	150	15.59	15.50
	(0, 9)	450	1.54	1.53
	(1, −3)	4 850	7.45	7.60
	(1, 0)	5 000	63.60	63.71
	(1, 3)	5 150	7.46	7.13
	(2, −3)	9 850	5.03	5.22
	(2, 0)	10 000	9.47	8.93
	(2, 3)	10 150	5.05	4.71

计算值非常接近，同时两者也存在一定的误差，主要原因是仿真本身存在不可避免的数值误差和算法误差。通过具体解析模型得到的计算值，能有效避免仿真步长、精度和噪声等影响，因此能更精确地反映共模电压谐波特性。

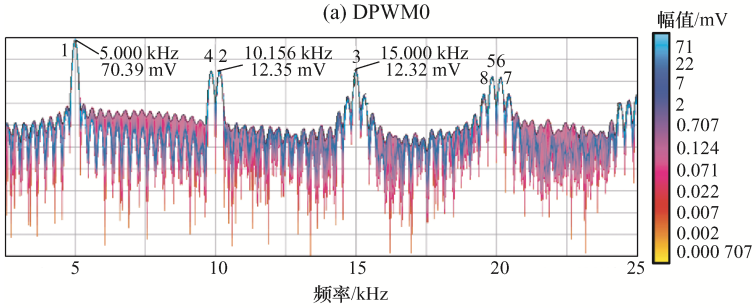
3 种 DPWM 共模电压频谱分析的实验结果如图 7 所示，可以看出，实验频谱值与仿真频谱值、计算频谱值吻合良好。3 种调制方式在 f=5 kHz 时，



峰值表

序号	频率/kHz	幅值/mV	序号	频率/kHz	幅值/mV
1	5.000	61.93	2	15.312	8.86
3	14.687	8.58	4	19.562	8.18
5	20.437	7.98	6	9.843	7.04
7	10.156	6.56	8	9.562	5.28

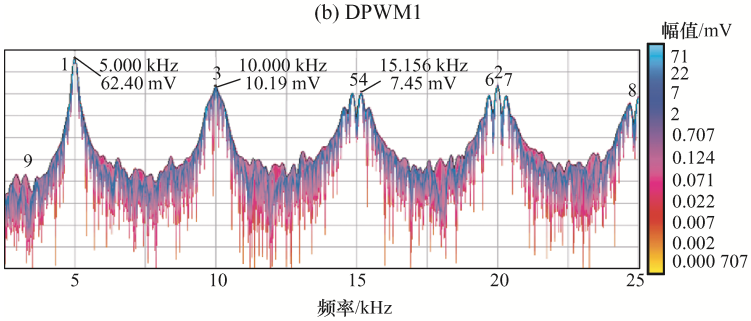
(a) DPWM0



峰值表

序号	频率/kHz	幅值/mV	序号	频率/kHz	幅值/mV
1	5.000	70.39	2	10.156	12.35
3	15.000	12.32	4	9.843	12.01
5	19.843	9.11	6	20.156	8.79
7	20.437	3.63	8	19.562	3.60

(b) DPWM1



峰值表

序号	频率/kHz	幅值/mV	序号	频率/kHz	幅值/mV
1	5.000	62.40	2	20.000	10.76
3	10.000	10.19	4	15.156	7.45
5	14.843	7.31	6	19.687	6.48
7	20.312	6.31	8	24.687	4.26

(c) DPWMmax

图 7 3 种 DPWM 共模电压实验频谱

Fig. 7 Experimental spectra of three types of DPWM common-mode voltages

共模电压谐波幅值均达到最大，同时，DPWM0 和 DPWM1 的低频谐波较 DPWMmax 更复杂。图 6 和图 7 的结果进一步验证了共模电压解析模型和特性规律的正确性与有效性。

4　结语

本文以三相两电平逆变器系统为对象，分析了 DPWM0、DPWM1 与 DPWMmax 的共模电压波形特点，应用双重傅里叶级数理论建立 3 种 DPWM 共模电压的具体解析模型，根据解析模型总结出共模电压特性规律，通过仿真和实验验证了数学分析的正确性和有效性。与传统的共模电压分析方案(如 MATLAB/Simulink 中的仿真模型)相比，本文提出的解析模型有助于高效分析共模电压特性，根据解析模型结合算法可以定量分析和预测各种参数对共模电压频谱的影响，设计更好的调制方案来满足系统的综合性能要求。进一步将解析模型与共模回路阻抗相结合，可对共模电流进行数学分析，从而给共模干扰预测和抑制的深入研究提供理论借鉴。

参考文献：

[1] 蒋栋. 电力电子变换器的先进脉宽调制技术[M]. 北京: 机械工业出版社, 2018.
Jiang Dong. Advanced Pulse-width-modulation Technologies for Power Electronics Converters [M]. Beijing: China Machine Press, 2018. (in Chinese)

[2] 徐晓娜, 王奎, 郑泽东, 等. 三相 PWM 变换器的共模电压抑制方法综述[J]. 中国电机工程学报, 2023, 43(22): 8833-8849.
Xu Xiaona, Wang Kui, Zheng Zedong, et al. A review on common-mode voltage reduction methods for three-phase PWM converters [J]. Proceedings of the CSEE, 2023, 43(22): 8833-8849. (in Chinese)

[3] Yu Bin, Song Wensheng, Guo Yongqi. A simplified and generalized SVPWM scheme for two-level multiphase inverters with common-mode voltage reduction [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2022, 69(2): 1378-1388.

[4] Alcaide A M, Yan Hao, Wang Xuchen, et al. Common-mode voltage mitigation technique in motor drive applications by applying a sampling-time adaptive multi-carrier PWM method [J]. IEEE Access, 2021, 9: 56115-56126.

[5] 熊文静, 朱欣, 林建亨, 等. 基于代数调制的中点钳位型三电平变换器共模电压抑制策略[J]. 电源学报, 2026, 24(1): 79-90.
Xiong Wenjing, Zhu Xin, Lin Jianheng, et al. Common-mode voltage suppression strategy for neutral point clamped three-level converter based on algebraic modulation [J]. Journal of Power Supply, 2026, 24(1): 79-90. (in Chinese)

[6] 傅恺宁, 涂江涛, 陈为. 高频变压器传导共模干扰分析与评估[J]. 电源学报, 2024, 22(5): 37-43.
Fu Kaining, Tu Jiangtao, Chen Wei. Analysis and evaluation of conducted common-mode interference of high-frequency transformer [J]. Journal of Power Supply, 2024, 22(5): 37-43. (in Chinese)

[7] 孙全增, 张志锋. 双三相永磁同步电机低共模电压模型预测电流控制[J]. 电工技术学报, 2023, 38(14): 3708-3722.
Sun Quanzeng, Zhang Zhifeng. Low common-mode voltage model predictive current control for dual three-phase permanent magnet synchronous motor [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2023, 38(14): 3708-3722. (in Chinese)

[8] Zhang Yichao, Li Cong, Schutten M, et al. Common-mode EMI comparison of NSPWM, DPWM1, and SVPWM modulation approaches [C]// 2019 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE). Baltimore, MD, USA, 2019: 6430-6437.

[9] Huang Yang, Walden J, Foote A, et al. Analytical characterization of CM and DM performance of three-phase voltage-source inverters under various PWM patterns [J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2021, 36(4): 4091-4104.

[10] Qamar H, Qamar H, Ayyanar R. Performance analysis and experimental validation of 240°-clamped space vector PWM to minimize common mode voltage and leakage current in EV/HEV traction drives [J]. IEEE Transactions

on Transportation Electrification, 2022, 8(1): 196-208.

[11] Quan Zhongyi, Li Yun wei. Impact of PWM schemes on the common-mode voltage of interleaved three-phase two-level voltage source converters [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2019, 66(2): 852-864.

[12] Hassan M S, Shoyama M. Pulse width modulation-based common-mode noise source characterization of three-phase two-level split-source inverter [C]// 2019 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE). Baltimore, MD, USA, 2019: 2867-2872.

[13] 徐军忠. 现代逆变电源调制策略的研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2021.
Xu Junzhong. Advanced pulse width modulation for modern inverters [D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2021. (in Chinese)

[14] Qiu Zizhen, Huang Xin, Ma Kai, et al. Sideband vibro-acoustic responses and improvements with different pulsewidth modulation strategies in permanent magnet synchronous motor for electric vehicle [J]. IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics, 2022, 10(6): 7098-7108.

[15] Choi J, Lee D H, Mok H. Discontinuous PWM techniques of three-leg two-phase voltage source inverter for sonar system [J]. IEEE Access, 2020, 8: 199864-199881.

[16] Dai Peng, Shi Congcong, Zhang Lei, et al. Analysis of synchronous rectification discontinuous PWM for SiC MOSFET three phase inverters [J]. Journal of Power Electronics, 2018, 18(5): 1336-1346.

[17] Ayano H, Nakagaki T, Iguchi Y, et al. Theoretical study of rampwise DPWM technique to reduce motor acoustic noise [J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2023, 38(7): 8102-8114.



郑剑

作者简介：

郑剑(1976—)，男，中国电源学会会员，博士，副教授、高级工程师。研究方向：电源控制及可靠性。E-mail：zj11660@hut.edu.cn。

林良帅(2000—)，男，中国电源学会学生会员，硕士。研究方向：电源传导电磁干扰抑制。E-mail：m23085800073@stu.hut.edu.cn。

彭存性(1998—)，男，中国电源学会学生会员，硕士。研究方向：电力电子与电力传动。E-mail：m22085800052@stu.hut.edu.cn。

赵凯辉(1972—)，男，中国电源学会会员，通信作者，博士，教授。研究方向：电机控制。E-mail：zhaokaihui@hut.edu.cn。

刘芳(2000—)，女，中国电源学会学生会员，硕士。研究方向：共模滤波器及应用。E-mail：m24085800041@stu.hut.edu.cn。

(责任编辑：郭凯凯)