DOI：10.13234/j.issn.2095-2805.2026.5.28 **中图分类号**：TM614 **文献标志码**：A

基于模拟二阶 Sigma-Delta 调制 D 类功放数学模型

盛学锐[1,2]，王昭君[1,2]，张 昌[1,2]
(1.上海船舶电子设备所，上海 201108；2.水声对抗技术重点实验室，上海 201108)

摘要：针对模拟二阶 Sigma-Delta 调制的 D 类功放电路，构建了连续域数学模型及其离散化时域迭代数学模型。针对功放电路推导了连续域数学模型，该模型表明二阶 Sigma-Delta 调制电路原理为基于正反馈的自激振荡，从而实现输出开关信号。由于连续域数学模型仅可计算自激振荡频率，因此对连续域数学模型进行离散化处理，得到离散化时域迭代数学模型。该模型可计算任意输入信号时的开关频率值，并分析二阶 Sigma-Delta 调制电路的稳定性条件。实验结果表明，基于数学模型计算的开关频率理论值和实验值误差不超过 14%，验证了该数学模型的正确性。

关键词：二阶 Sigma-Delta 调制；D 类功放；数学模型；开关频率

The Mathematical Model of A Class-D Power Amplifier Based on Analog Second-order Sigma-Delta Modulation

SHENG Xuerui[1,2], WANG Zhaojun[1,2], ZHANG Chang[1,2]
(1. Shanghai Marine Electronic Equipment Research Institute, Shanghai 201108, China; 2. Science and Technology on Underwater Acoustic Antagonizing Laboratory, Shanghai 201108, China)

Abstract: For an analog second-order Sigma-Delta modulation class-D power amplifier circuit, the continuous domain mathematical model and discrete time domain iterative mathematical model are constructed. For the power amplifier circuit, the continuous domain mathematical model is derived, which shows that the principle of the second order sigma-delta modulation circuit is self-excited oscillation based on positive feedback, so as to realize the output switching signal. Since the continuous domain mathematical model can only obtain the self-excited oscillation frequency, the continuous domain mathematical model is discretized to obtain the discrete time domain iterative mathematical model. This model can calculate the switching frequency value of any input signal and analyze the stability conditions of second-order Sigma-Delta modulation circuit. The experimental results show that the error between the theoretical switching frequency calculated based on the mathematical model and the experimental value is less than 14%, which verifies the correctness of the mathematical model.

Keywords: Second order Sigma-Delta modulation; class-D power amplifier; mathematical model; switching frequency

功率放大器目前被广泛应用于声纳探测和音频放大等领域。为满足探测设备高精度要求，功率放大器需具备高信噪比和大动态范围。根据功率器件的工作区域不同，可将功率放大器分为线性功放和数字(D 类)功放。线性功放以高信噪比和大动态范围著称[1-3]，主要有 A 类、AB 类等拓扑形式；但其因效率较低，难以被广泛应用。D 类功放具有 100%理论效率，且随着控制器主频的不断提高，其动态范围和信噪比随之提高[4-8]，因此被广泛应用于各行各业。

收稿日期：2024-01-19；**修回日期**：2024-03-08；**录用日期**：2024-04-06；**网络首发日期**：2024-04-26
基金项目：上海市扬帆计划资助项目(23YF1451500)
This work is supported by Shanghai Sailing Program under the grant 23YF1451500

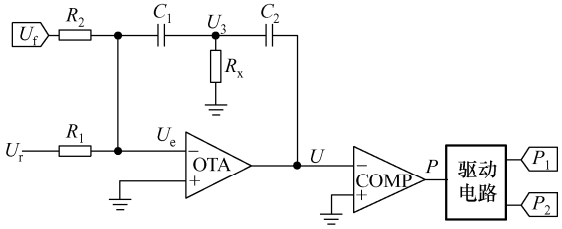
D 类功放通过使功率器件处于开关状态，即功放输出波形为开关波形，再经过低通滤波器得到所需的电压波形。由于开关波形是通过调制方式得到的，故调制方式直接影响 D 类功放的动态范围和信噪比。目前调制方式可分为模拟电路调制和数字电路调制，其中模拟电路调制误差较小即动态范围更大和信噪比更高。模拟电路调制的实现方法主要包括模拟正弦脉冲宽度调制 SPWM(sine pulse width modulation)[7]和模拟 Sigma-Delta 调制[8-12]。模拟 SPWM 具有调制原理简单的特点但实现较为复杂，模拟 Sigma-Delta 调制具有低通滤波效果和全局闭环反馈功能。模拟二阶 Sigma-Delta(2nd-SD)调制目前被广泛应用于音频功率放大器[9-10]和声纳系统[11-12]。

模拟 2nd-SD 调制通过构建正反馈回路形成自激振荡，从而实现输出调频调宽，该调制可将开关频率扩展到一定范围以减小电磁干扰。文献[13]推导了 2nd-SD 调制模拟电路中的积分电路增益数值表达式，基于该数值表达式可对积分电路的电阻电容进行优化以得到较好的积分增益，从而实现较低的总谐波失真 THD(total harmonic distortion)和较大的电源抑制比 PSRR(power supply rejection ratio)。但该文献未对 2nd-SD 调制模拟电路建立详细的数学模型，即未对模拟电路进行稳定性计算验证、开关频率计算等。文献[14]对单路反馈和双路反馈 2nd-SD 调制模拟电路的 THD 进行了详细推导，可用于指导电路参数优化以达到减小 THD 的目的，但该理论是在载波频率固定情况下推导的，且该文献也未对模拟调制电路进行详细的数学模型推导。文献[15]推导了一阶自激振荡模拟调制电路的环路增益和开关频率计算表达式，但该文献是基于一阶积分和迟滞比较模型构成带反馈环路的调制电路，不适用于 2nd-SD 调制模拟电路。总体而言，目前国内外对 2nd-SD 调制模拟电路建立详细的数学模型，进而对电路设计形成有效指导的相关文献较少。

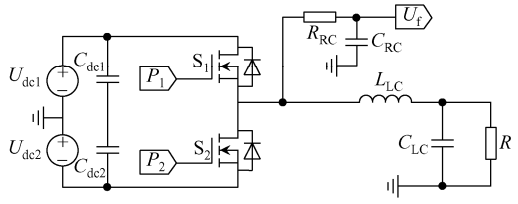
本文基于模拟 2nd-SD 调制和半桥拓扑构建功放电路，首先对基于模拟 2nd-SD 调制的功放电路建立数学模型，然后给出模拟 2nd-SD 调制电路的自激振荡频率计算方法。基于离散数学模型给出了调制电路稳定性判据，及输入信号全幅度范围内开关频率计算方法。最后对基于模拟 2nd-SD 调制的半桥 D 类功放电路进行实验，验证推导数学模型的正确性和可行性。

1　基于模拟 SD 调制 D 类功放电路

本文以半桥功放拓扑构建基于模拟 2nd-SD 调制的 D 类功放电路，如图 1 所示。图 1(a)为模拟 2nd-SD 调制电路，图中：U_r 为输入期望信号；U_f 为经过 RC 低通滤波的半桥电路桥臂中点电压信号，该电压信号通过电阻 R_2 反馈至积分电路；C_1、C_2 为积分电容；R_1、R_x 为积分电阻，与运放跨导放大器 OTA(operational transconductance amplifier)构成二阶积分电路；U 为积分电路输出电压；COMP 为比较器；P 为比较器输出波形；P_1 和 P_2 为经过驱动电路后的一对互补 PWM 信号，这对信号被分别送至半桥电路控制 MOSFET 开关 S_1 和 S_2。图 1(b)为半桥功放电路，图中：U_{dc1} 和 U_{dc2} 为直流电压；电感 R_{RC} 和电容 C_{RC} 构成一阶低通滤波电路，以滤除半桥输出电压中的尖峰电压等；电感 L_{LC} 和电容 C_{LC} 构成二阶低通滤波电路，以滤除半桥电路输出的高频电压成分；R 为负载电阻。由于供电母线



(a) 模拟2nd-SD调制电路



(b) 半桥功放电路

图 1　基于模拟 2nd-SD 调制的 D 类功放电路

Fig. 1 Class-D power amplifier circuit based on analog 2nd-SD modulation

电感会导致半桥输出电压发生尖峰扰动，从而影响模拟 2nd-SD 调制电路运行，因此增加 RC 低通滤波电路以保证 U_f 中不会有扰动电压，从而确保 2nd-SD 调制电路正确运行。

SD 是基于求和+积分的原理实现的。SD 调制算法主要涉及的技术要点是过采样和噪声整形技术。图 2 为 SD 调制器结构，正向路径包括求和运算、积分运算和量化运算。图中：X 为输入信号；Q 为量化误差；Y 为输出信号。SD 调制的基本工作机理为：反馈信号与输入给定电压作差，再经过积分器进入比较器，若积分值大于 0，则输出高电平“1”，反之则输出零电平“0”，从而得到 1 或 0 的 1-bit 数据流。调制的最终目的是实现反馈信号与给定信号的等效，即输出的 1-bit 数据流与给定信号等效成比例。

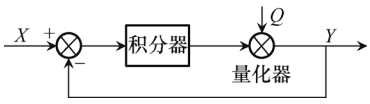


图 2 SD 调制器结构框图

Fig. 2 Block diagram of SD modulator structure

积分器可以用 1 个幅值响应 g 和 $1/f$(f 为复频率变量)成正比的模拟滤波器加以表示，假定模拟滤波器的传递函数为 $1/f$，g=1，则 SD 调制器的传递函数为

$$Y=\frac{X}{f+1}+\frac{Qf}{f+1} \tag{1}$$

通过传递函数可知，当频率较低时，输出信号中对于输入信号的响应比例较大；当频率越高时，输出信号中关于量化噪声的比例会越来越大。这表明 SD 调制器对于输入信号起到低通作用，而对噪声起到高通滤波作用，因此 SD 调制可以对噪声进行整形。由于模拟调制电路具有失真率更低的优势，因此目前多采用模拟 2nd-SD 调制电路，如图 1(a)所示。

2 连续域数学模型

2.1 半桥功放电路连续域数学模型

对图 1(b)的半桥功放电路进行简化，如图 3 所示，图中：U_{ac} 为等效半桥电路输出电压；U_o 为负载输出电压。

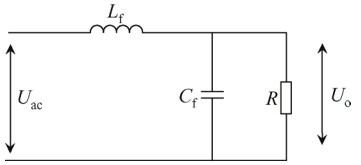


图 3 简化半桥功放电路

Fig. 3 Simplified half-bridge power amplifier circuit

根据图 3 和基尔霍夫电压定律 KVL(Kirchhoff's voltage law)可得等效半桥电路输出电压 U_{ac} 与负载电压 U_o 之间关系为

$$G_{LC}=\frac{U_o}{U_{ac}}=\frac{Z_C R}{Z_C R+Z_L(Z_C+R)} \tag{2}$$

式中：G_{LC} 为二阶低通滤波电路增益；Z_C 为电容 C_{LC} 的复阻抗，Z_C=1/(sC_{LC})；Z_L 为电感 L_{LC} 的复阻抗，Z_L=sL_{LC}。

为保证 LC 低通滤波器可滤除 U_{ac} 中的高频成分且保留所需输出电压的频率成分，需保证 L_{LC} 和 C_{LC} 满足关系

$$\begin{cases} L_{LC}=\dfrac{R}{4f_d} \\ C_{LC}=\dfrac{1}{4Rf_d} \end{cases} \tag{3}$$

式中，f_d 为低通滤波器截止频率。

2.2 模拟 2nd-SD 调制连续域数学模型

对图 1(a)中二阶积分电路进行简化，如图 4 所示。

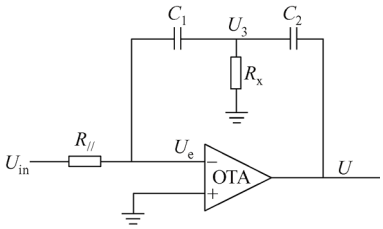


图 4 二阶积分电路

Fig. 4 Second-order integrated circuit

根据叠加原理可得，$R_{//}$=R_1//R_2，输入电压 U_{in}=(R_2U_r+R_1U_f)/(R_1+R_2)，通常积分电容 C_1=C_2=C。

基于文献[16]给出 OTA 运放常用的模型，即将其视作直流增益为 A_{dc}，截止频率为 f_{3db} 的低通滤波器，其传递函数为

$$\frac{U}{U_e}=-\frac{A_{dc}}{1+\dfrac{s}{2\pi f_{3db}}} \tag{4}$$

式中，U_e 为误差电压。

又根据 KVL 和基尔霍夫电流定律 KCL(Kirchhoff's current law)可得

$$\frac{U_{in}-U_e}{R_{//}}=\frac{U_e-U_3}{1/sC}=\frac{U_3}{R_x}+\frac{U_3-U}{1/sC} \tag{5}$$

式中，U_3 为节点电压。

结合式(4)和式(5)，可得二阶积分电路增益 G_{int} 为

$$G_{int}=\frac{U_1}{U_{in}}=-\frac{A_{dc}(1+R_2Cs)/(1+s/\omega_{3db})}{1+(2R+R_{//})Cs+\left[1+A_{dc}/(1+s/\omega_{3db})\right]RR_{//}C^2s^2} \tag{6}$$

式中，ω_{3db} 为运放截止频率对应的角频率，$\omega_{3db}=2\pi f_{3db}$。

对于 COMP 比较器电路，其主要功能为过零比较，因此比较器电路可等效为一位量化器数学模型。对于驱动电路和半桥电路，主要功能为对 P 信号进行电压和功率放大，因此其数学模型可等效为增益 G_{PA}。此外，实际电路采用运算放大器芯片、比较器芯片、驱动芯片及 MOSFET 开关管，存在建立时间或传播延时 τ，从而导致基于模拟 2nd-SD 调制的 D 类功放电路中全局反馈环路中存在延时，因此将该延时环节定义为 $D=e^{-\tau s}$。

根据以上对电路各部分建立的数学模型，可得基于模拟 2nd-SD 调制的 D 类功放数学模型框图，如图 5 所示，图中：G_{pwm} 为量化增益；$E(s)$为量化噪声。开环传递函数为

$$G_p=G_{int}G_{pwm}G_{PA}H_2D \tag{7}$$

式中，H_2 为反馈电路增益，$H_2=R_1/(R_1+R_2)$。

根据开环传递函数可得基于模拟 2nd-SD 调制的 D 类功放电路的传递函数和噪声整形传递函数，分别为

$$\begin{cases}\left.\dfrac{U_{ac}(s)}{U_{in}(s)}\right|_{E(s)=0}=\dfrac{H_1G_{int}G_{pwm}G_{PA}D}{1-G_{int}G_{pwm}G_{PA}H_2D}\approx-\dfrac{R_2}{R_1}\\ \left.\dfrac{U_{ac}(s)}{E(s)}\right|_{U_{ac}(s)=0}=\dfrac{1}{1-G_{int}G_{pwm}G_{PA}H_2D}\end{cases} \tag{8}$$

式中，H_1 为输入信号增益，$H_1=R_2/(R_1+R_2)$。

由式(8)可知基于模拟 2nd-SD 调制的 D 类功放输出电压可通过控制 R_2/R_1 和输入信号大小，不受供电电源波动影响。

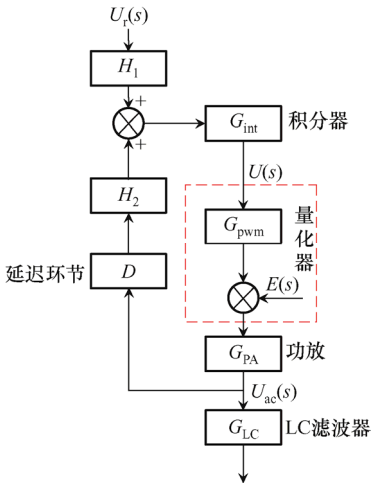


图 5　基于模拟 2nd-SD 调制的 D 类功放数学模型框图

Fig. 5 Block diagram of the mathematical model of a Class-D power amplifier based on analog 2nd-SD modulation

根据式(7)，开环传递函数的频域表达式为

$$G_p(j\omega)=H_2G_{PA}G_{pwm}G_{int}(j\omega)e^{-j\tau\omega}=H_2G_{PA}G_{pwm}G_{pl}(j\omega)=H_2G_{PA}G_{pwm}e^{-j\tau\omega}\cdot\frac{(-B_0+\omega^2B_2)+j(-\omega B_1+\omega^3B_3)}{(A_0-\omega^2A_2)+j(\omega A_1-\omega^3A_3)} \tag{9}$$

式中：ω 为信号频率对应的角频率；$B_0=A_{dc}\omega_{3db}$，$B_1=2A_{dc}\omega_{3db}R_xC$，$B_2=B_3=0$；$A_0=\omega_{3db}$，$A_1=1+2R_xC\omega_{3db}+R_{//}C\omega_{3db}$，$A_2=2R_xC+R_{//}C+R_xR_{//}C^2(\omega_{3db}+A_{dc}\omega_{3db})$，$A_3=R_xR_{//}C^2$。

开环传递函数相位角为

$$\angle G_p(j\omega)=\angle G_{int}(j\omega)+\angle D(j\omega)=\frac{180^\circ}{\pi}\left(\arctan\frac{-\omega B_1+\omega^3B_3}{-B_0+\omega^2B_2}-\arctan\frac{\omega A_1-\omega^3A_3}{A_0-\omega^2A_2}-\tau\omega\right) \tag{10}$$

开环传递函数幅值为

$$20\lg|G_p(j\omega)|=20\lg(H_2G_{PA}G_{pwm})+20\lg|G_{int}|=20\lg(H_2G_{PA}G_{pwm})+20\lg\frac{\sqrt{(-B_0+\omega^2B_2)^2+(-\omega B_1+\omega^3B_3)^2}}{\sqrt{(-A_0+\omega^2A_2)^2+(-\omega A_1+\omega^3A_3)^2}} \tag{11}$$

为保证功放电路可正常工作，需使电路处于自

激振荡状态，即开环传递函数幅角需满足条件

$$\begin{cases}20\lg(H_2G_{\mathrm{PA}}G_{\mathrm{pwm}})+20\lg\left|G_{\mathrm{int}}\right|=0\\ \angle G_{\mathrm{int}}(\mathrm{j}\omega)+\angle D(\mathrm{j}\omega)=2k\pi\end{cases}\tag{12}$$

式中，k 为任意整数。

由于自激振荡是输入信号为 0 时被触发，且比较器电路具有归一化功能，故式(12)中的幅值条件必然满足。因此可根据式(12)中相角条件计算自激振荡频率。该频率和放大器参数、阻值比 R_2/R_1、积分电阻 R_{x}、电容 C 及传播延时 τ 有关。图 6 为开环传递函数中各环节相频曲线，图 7 为 R_{x}、C、τ 及 R_2/R_1 这 4 个参数对自激振荡频率影响的曲线。根据图 7 可知，自激振荡频率随着 R_{x} 和 C 的增大而增大，随着 τ 的增加而减小，且不随 R_2/R_1 变化。

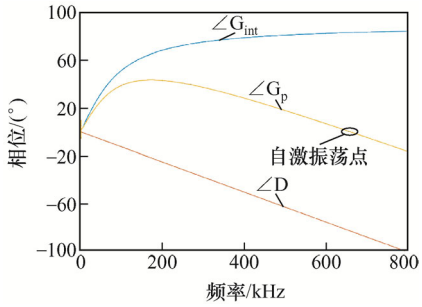
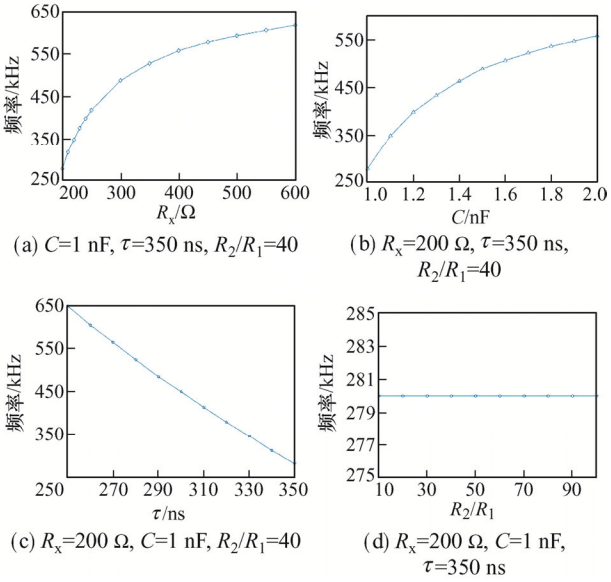


图 6 开环传递函数中各环节相频曲线

Fig. 6 Phase frequency curves of each link in open loop transfer function



(a) C=1 nF, τ=350 ns, R_2/R_1=40　(b) R_{x}=200 Ω, τ=350 ns, R_2/R_1=40

(c) R_{x}=200 Ω, C=1 nF, R_2/R_1=40　(d) R_{x}=200 Ω, C=1 nF, τ=350 ns

图 7 4 种参数对自激振荡频率影响曲线

Fig. 7 Influence curves of four parameters on self-excited oscillation frequency

3 开关频率计算

由于采用连续域数学模型得到的自激振荡频率计算方法，难以量化比较器产生的相位差大小，即无法量化自激振荡频率受到的影响。此外，基于连续域数学模型仅可计算输入信号 U_{r}=0 时的开关频率(即自激振荡频率)，而无法计算输入信号不为 0 时的开关频率。为了更准确地计算出输入信号 U_{r} 从 0 至满幅时开关频率的变化情况，对基于模拟 2nd-SD 调制的 D 类功放数学模型进行离散化处理，主要包括对积分环节 $G_{\mathrm{int}}(s)$、延时环节 $D(s)$和量化环节进行离散化处理。采用双线性变换法对 s 域表达式进行 z 域离散化处理，双线性变换法 s 域和 z 域的映射关系为 $z=\mathrm{e}^{sT}\approx(1+sT/2)/(1-sT/2)$，其中 T 为采样周期，也是时域迭代计算周期。

积分环节 $G_{\mathrm{int}}(s)$的 z 域离散化表达式为

$$G_{\mathrm{int}}(z)=\frac{D_3z^3+D_2z^2+D_1z+D_0}{C_3z^3+C_2z^2+C_1z+C_0}\tag{13}$$

式中：$D_3=B_0T^3+2B_1T^2+4B_2T+8B_3$，$D_2=3B_0T^3+2B_1T^2-4B_2T-24B_3$，$D_1=3B_0T^3-2B_1T^2-4B_2T+24B_3$，$D_0=B_0T^3-2B_1T^2+4B_2T-8B_3$；$C_3=A_0T^3+2A_1T^2+4A_2T+8A_3$，$C_2=3A_0T^3+2A_1T^2-4A_2T-24A_3$，$C_1=3A_0T^3-2A_1T^2-4A_2T+24A_3$，$C_0=A_0T^3-2A_1T^2+4A_2T-8A_3$。

对于延时环节 $D(s)$的 z 域离散化表达式为

$$D(z)=z^{-\tau/T}\tag{14}$$

对于比较器即量化器主要功能过零比较，采用数学模型

$$\begin{cases}P=1 & U\geqslant 0\\ P=0 & U<0\end{cases}\tag{15}$$

针对以上对数学模型的离散化处理，可以利用 MATLAB 对离散化数学模型进行时域迭代计算，得到二阶积分输出电压 U 和比较器输出信号 P 的波形。

此外，为保证电路安全稳定运行，二阶积分输出电压 U 需满足如下条件。

(1)在输入信号为 0 时，二阶积分电路输出电压 U 需要大于一定阈值，以使比较器正常工作，即

$$|U|>0 \qquad |U^*_{\mathrm{r,peak}}|\geqslant 0 \tag{16}$$

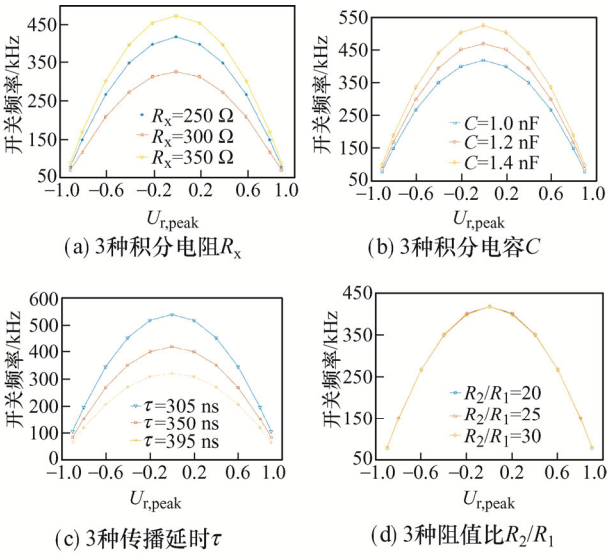
式中，$U^*_{\mathrm{r,peak}}$ 为输入信号 U_{r} 的归一化峰值。

(2)在输入信号接近满幅时，二阶积分电路输出电压 U 需要小于运放轨到轨电压 U_{lim}，以使比较器正常工作，即

$$|U|<U_{\mathrm{lim}} \qquad |U_{\mathrm{r,peak}}|\to 1 \tag{17}$$

式中，$U_{\mathrm{r,peak}}$ 为输入信号 U_{r} 的归一化幅度。

根据信号 P 波形即可得到开关频率，由于考虑开关波形占空比不能过大，即实际工程输入信号幅度不会设置为满幅输入，考虑设定输入信号归一化幅度上限为 0.9，归一化幅度为实际输入信号幅度与$(R_1U_{\mathrm{dc1}}/R_2)$的比值。图 8(a)为 3 种 R_{x} 下输入信号从−0.9 变化至+0.9 时开关频率理论计算曲线，理论计算开关频率范围分别为 72~328 kHz、80~419 kHz 和 90~474 kHz，其中 C=1 nF、τ=350 ns、R_2/R_1=30、T=1 ns，其他参数见表 1。图 8(b)为 3 种 C 下输入信号归一化幅度从−0.9 变化至+0.9 时开关频率理论计算曲线，理论计算开关频率范围为 80~419 kHz、89~470 kHz 和 100~525 kHz，其中 R_{x}=300 Ω、τ=350 ns、R_2/R_1=30，其他参数见表 1。图 8(c)为 3 种 τ 下输入信号归一化幅度从−0.9 变化至+0.9 时开关频率理论计算曲线，理论计算开关频率范围为 102~538 kHz、80~419 kHz 和 62~320 kHz，其中 R_{x}=300 Ω、C=1 nF、R_2/R_1=30，其他参数见表 1。图 8(d)为 3 种 R_2/R_1 下输入信号归一化幅度从−0.9 变化至+0.9 时开关频率理论计算曲线，理论计算开关频率范围均为 80~419 kHz，其中 R_{x}=300 Ω、C=1 nF、τ=350 ns，其他参数见表 1。由图 8 可知，积分电阻 R_{x} 和积分电容 C 越大，开关频率越高；传播延时 τ 越小，开关频率越高；阻值比 R_2/R_1 变化不会影响开关频率。



(a) 3种积分电阻R_{x}　(b) 3种积分电容C

(c) 3种传播延时τ　(d) 3种阻值比R_2/R_1

图 8　开关频率理论计算曲线

Fig. 8 Theoretical calculation curves of switching frequency

表 1　功放实验平台参数

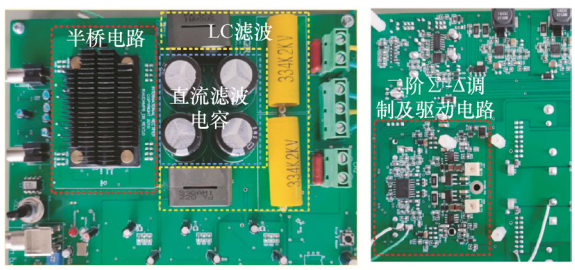
Tab. 1 Parameters of the power amplifier experiment platform

参数	数值
输入电源电压 U_{dc1}、U_{dc2}/V	45.0
直流电压滤波电容 C_{dc1}、C_{dc2}/μF	1 000
LC 低通滤波电感 L_{LC}/μH	22
LC 低通滤波电容 C_{LC}/μF	0.47
负载电阻 R/Ω	8
反馈电阻 R_2/kΩ	100
RC 低通滤波电容 C_{RC}/pF	150
输入信号频率/kHz	1
运放 AD825 建立时间/ns	80
驱动 IRS20957 传播延时和上升时间/ns	110
MOSFET 上升时间/ns	10

4　实验验证

4.1　实验平台

通过实验验证所构建的模拟 2nd-SD 调制数学模型的准确性。图 9 为基于模拟 2nd-SD 调制 D 类功放实验平台，主要包括 2nd-SD 调制及驱动电路、



(a) 正面　(b) 反面

图 9　基于模拟 2nd-SD 调制 D 类功放实验平台

Fig. 9 Experimental platform of a Class-D power amplifier based on analog 2nd-SD modulation

半桥电路和 LC 低通滤波电路。2nd-SD 调制电路主要由运放 AD825 和阻容构成二阶积分电路，驱动电路由 IRS20957 及其外围电路构成，半桥电路使用的 MOSFET 器件型号为 IRF6785MTRPbF。功放实验平台参数见表 1。

根据图 9 实验平台的电路构成及表 1 的实验平台参数可知，基于模拟 2nd-SD 调制的 D 类功放电路中全局反馈环路中的传播延时 τ 是由运放 AD825 的建立时间、驱动 IRS20957 的传播延时和上升时间，MOSFET 的上升时间及反馈电路中的 RC 低通滤波电路造成的延时组成。

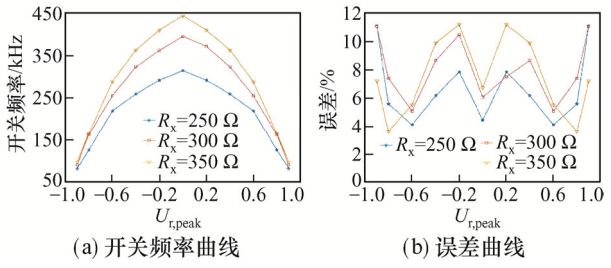
RC 低通滤波电路的延时表达式为

$$t_{RC}=\frac{\arctan\omega\cdot R_{RC}C_{RC}}{\omega} \tag{18}$$

根据式(18)可以得到在信号频率 1~400 kHz 处，当 RC 低通滤波电阻 R_{RC}=1 kΩ 时，RC 低通滤波电路造成的时延为 144~150 ns，则 k 可取模拟 2nd-SD 调制的 D 类功放电路中全局反馈环路中的总传播延时 τ=350 ns。

4.2 实验验证

为了验证构建的模拟2nd-SD调制数学模型的正确性，分别进行了 3 种不同积分电阻 R_x、3 种不同积分电容 C、3 种不同传播时延时 τ 和 3 种不同阻值比 R_2/R_1 输入信号归一化幅度从−0.9 变化至+0.9 的实验测试，输入信号为 1 kHz 正弦波。图 10 为 R_x=250、300、350 Ω 和 C=1 nF、τ=350 ns、R_2/R_1=30 时开关频率实验曲线及与理论计算误差曲线。可以看出，实验开关频率范围分别为 81~314 kHz、90~395 kHz 和 97~444 kHz，且与理论计算误差不超过 12%。

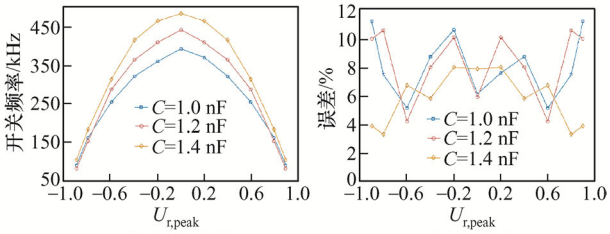


(a) 开关频率曲线 (b) 误差曲线

图 10 3 种积分电阻 R_x 的开关频率实验曲线及与理论计算误差曲线图

Fig. 10 Experimental curves of switching frequency of three kinds of integrating resistance R_x and error curves of theoretical calculation

图 11 为 C=1.0、1.2、1.4 nF 和 R_x=250 Ω、τ=350 ns、R_2/R_1=30 时开关频率实验曲线及与理论计算误差曲线。可以看出，实验开关频率范围分别为 90~395 kHz、81~444 kHz 和 104~487 kHz，且与理论计算误差不超过 12%。

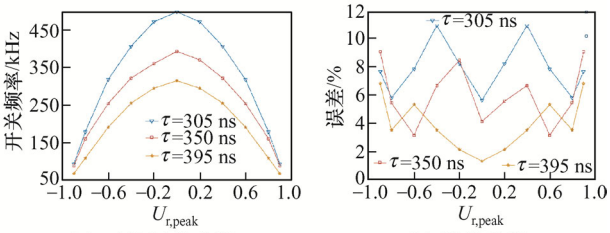


(a) 开关频率曲线 (b) 误差曲线

图 11 3 种积分电容 C 的开关频率实验曲线及与理论计算误差曲线图

Fig. 11 Experimental curves of switching frequency of three kinds of integrated capacitors C and error curves of theoretical calculation

图 12 为 τ=305 ns(R_{RC}=700 Ω)、350 ns(R_{RC}=1 000 Ω)、395 ns(R_{RC}=1 300 Ω)和 R_x=250 Ω、C=1 nF、τ=350 ns、R_2/R_1=30 时开关频率实验曲线及与理论计算误差曲线。可以看出，实验开关频率范围分别为 93~500 kHz、90~395 kHz 和 68~310 kHz，且与理论计算误差不超过 14%。



(a) 开关频率曲线 (b) 误差曲线

图 12 3 种传播延时 τ 的开关频率实验曲线及与理论计算误差曲线图

Fig. 12 Experimental curves of switching frequency of three kinds of propagation delay τ and error curves of theoretical calculation

图 13 为 R_2/R_1=20(R_1=5.0 kΩ)、25(R_1=4.0 kΩ)、30(R_1=3.3 kΩ)和 R_x=250 Ω、C=1 nF、τ=350 ns 时开关频率实验曲线及与理论计算误差曲线。可以看出，实验开关频率范围分别为 88~396 kHz、88~398 kHz 和 90~395 kHz，且与理论计算误差不超过 12%。

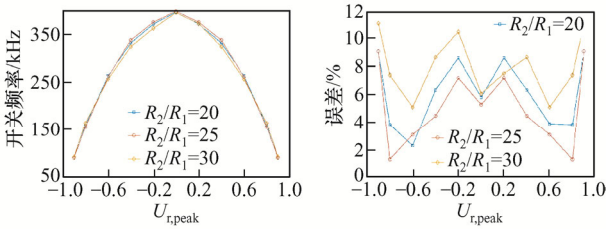


图 13　3种阻值比 R_2/R_1 的开关频率实验曲线及与理论计算误差曲线图

Fig. 13 Experimental curves of switching frequency of three kinds of resistance ratio R_2/R_1 and error curves of theoretical calculation

由图 10~图 13 可知，积分电阻 R_x 和积分电容 C 越大，开关频率越高；传播延时 τ 越小，开关频率越高；而阻值比 R_2/R_1 变化不会影响开关频率。该结论与理论计算一致。

根据第 2 节中的分析可知，影响开关频率的主要因素有积分电阻 R_x、积分电容 C 及传播延时 τ，由于实际电路采用的积分电阻和积分电容均有数值标定误差，且传播延时受到电路中各个芯片的传播延时影响，理论计算均采用芯片手册提供的传播延时，与实际芯片之间存在参数误差。总体而言，硬件电路器件参数误差会造成实验开关频率和理论计算开关频率之间存在一定的误差。因此验证了构建的模拟 2nd-SD 调制数学模型准确性，具有指导设计模拟 2nd-SD 调制电路的意义。

图 14 为 R_x=300 Ω 和 C=1 nF、τ=350 ns、R_2/R_1=30 时输入信号归一化幅度分别为 0、0.4 和 0.8 的输入信号、负载电压及半桥输出电压波形。由图 14(a)可知输入信号有效值为 0.07 V，幅度为 0.07×1.414=0.1 V，则输入信号归一化幅度约为 0，此时开关频率为 395 kHz，负载电压有效值为 3.5 V；由图 14(b)可知输入信号有效值为 0.43 V，幅度为 0.43×1.414=0.6 V，则输入信号归一化幅度约为 0.4，此时开关频率为 323 kHz，负载电压有效值为 11.8 V；由图 14(c)可知输入信号有效值为 0.85 V，幅度为 0.85×1.414=1.2 V，则输入信号归一化幅度约为 0.8，此时开关频率为 162 kHz，负载电压有效值为 25.4 V。

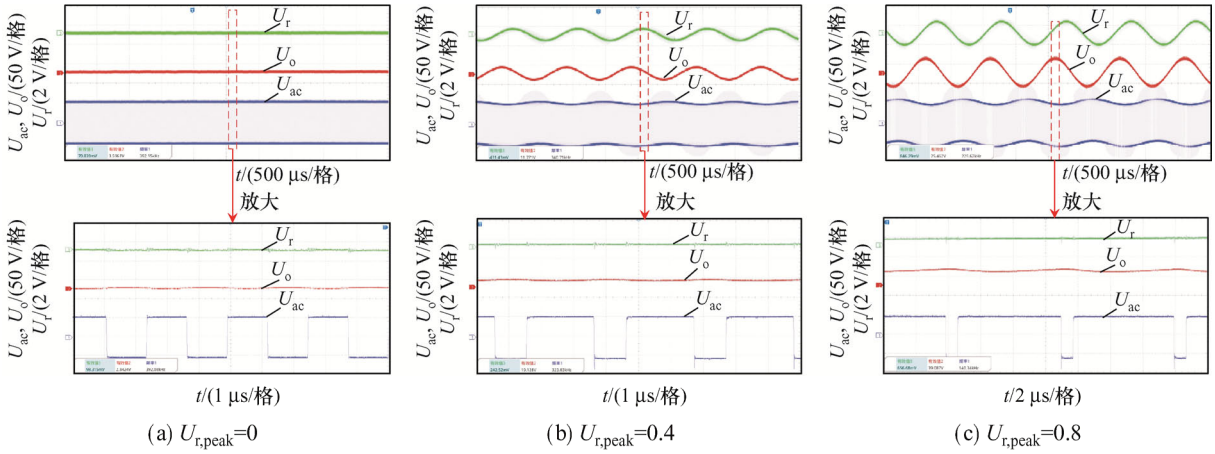


图 14　输入信号归一化幅度分别为 0、0.4 和 0.8 的输入信号、负载电压及半桥输出电压波形

Fig. 14 Input signal, load voltage and half-bridge output voltage waveforms when the normalized amplitude of input signal is 0, 0.4 and 0.8 respectively

根据式(7)且 LC 滤波器在 1 kHz 处增益为 1，则负载电压和输入信号之间满足关系

$$|U_o| \approx \frac{R_2}{R_1}|U_{in}| \tag{19}$$

可知，在输入信号归一化幅度分别为 0、0.4 和 0.8 时，理论负载电压有效值分别为 0 V、12.7 V 和 25.4 V，与实验结果基本一致，验证了式(7)的正确性。

为了进一步证明 2nd-SD 调制的优势，增加了与传统 SPWM 的对比实验。主要从负载电压受电源波动影响和半桥输出电压的噪声频谱分布进行实验对比。由式(19)和 SD 调制原理可知，2nd-SD

调制的功放输出电压不受电源电压波动影响，且开关频率被拓宽、具有噪声整形能力，而传统 SPWM 的输出电压受电源电压波动影响且开关频率集中于一点。

图 15 为供电电压分别为 40、45、50 V 时基于模拟 2nd-SD 调制的功放电路输出电压及频谱实验波形，输入信号 U_r 为频率=1 kHz，有效值=0.84 V 的正弦波。由图 15(a)~(c)可知输出电压分别为 25.3、25.4、25.4 V，验证了基于模拟 2nd-SD 调制的功放电路输出电压 U_o 不受电源波动影响；由图 15(d)~(f)可知，2nd-SD 调制对低频段噪声频谱具有抑制能力且高频噪声频谱被扩宽。

图 16 为供电电压分别为 40、45、50 V 时基于传统 SPWM 调制的功放电路输出电压及频谱实验波形，调制比为 0.8。由图 16(a)~(c)可知，输出电压分别为 21.2、23.7、26.7 V，验证了基于传统 SPWM 调制的功放电路输出电压 U_o 受电源波动影响；由图 16(d)~(f)可知，半桥功放输出电压噪声频谱集中于 400 kHz 开关频率附近。

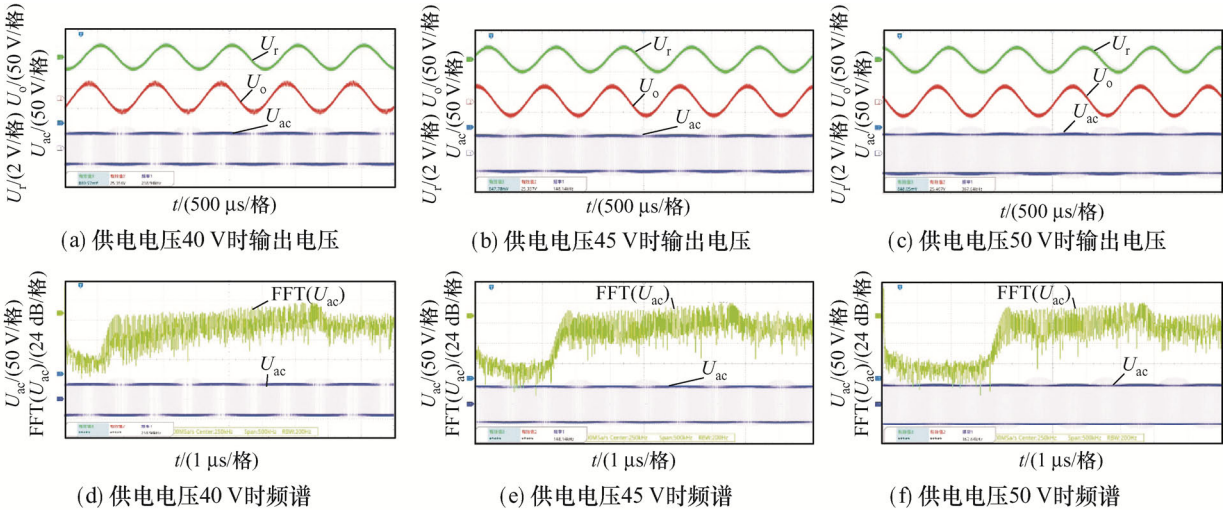


图 15 在不同供电电压时基于模拟 2nd-SD 调制的功放电路输出电压及频谱实验波形

Fig. 15 The output voltage and spectrum waveform of power amplifier circuit based on analog 2nd-SD modulation at different supply voltages

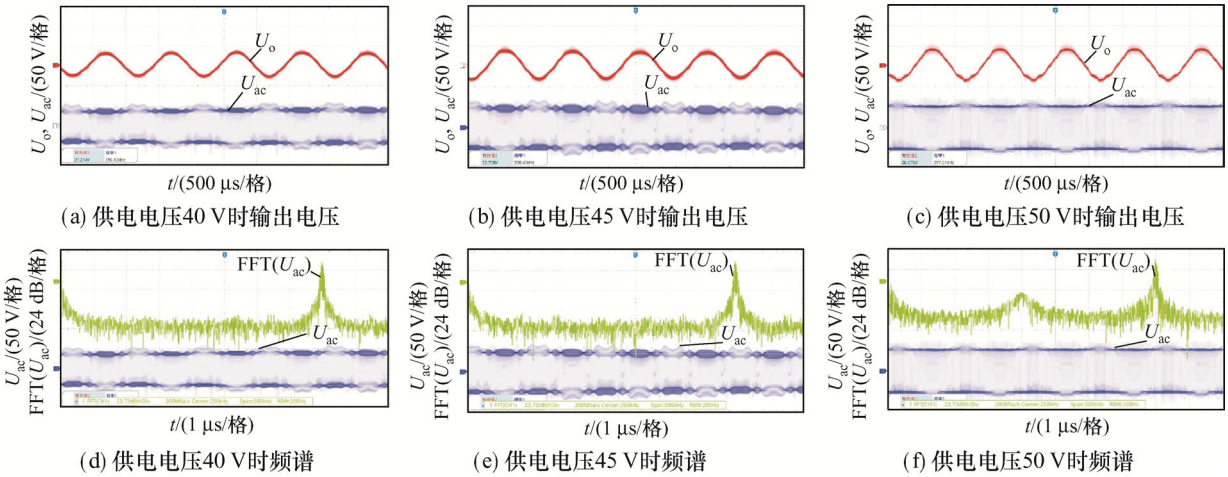


图 16 在不同供电电压时基于 SPWM 调制的功放电路输出电压及频谱实验波形

Fig. 16 The output voltage and spectrum waveform of power amplifier circuit based on SPWM modulation at different supply voltages

通过实验对比模拟 2nd-SD 调制和传统 SPWM，验证了基于模拟 2nd-SD 调制的功放输出电压不受电源波动影响、具有噪声整形能力。

5 结语

本文构建了基于二阶 Sigma-Delta 调制 D 类功放的连续域数学模型及其离散化时域迭代数学模型。连续域数学模型揭示二阶 Sigma-Delta 调制电路原理为基于正反馈的自激振荡。对连续域数学模型离散化的时域迭代数学模型可计算任意输入信号时的开关频率值并分析二阶 Sigma-Delta 调制电路的稳定性。实验结果表明，基于数学模型计算的开关频率理论值和实验值误差不超过 14%，验证了该数学模型的正确性。此外，该数学模型可作为设计模拟二阶 Sigma-Delta 调制电路的指导。

参考文献：

[1] 谢奕, 李成豪, 涂其捷. 浅谈音频功率放大器[J]. 电声技术, 2018, 42(9): 13-18.
Xie Yi, Li Chenghao, Tu Qijie. Discussion of the audio power amplifier [J]. Audio Engineering, 2018, 42(9): 13-18. (in Chinese)

[2] 李钰梁, 杨桢, 李艳, 等. 一种基于功率合成器和功率分配器的 2.45 GHz 功率放大器[J]. 电源学报, 2024, 22 (2): 421-430.
Li Yuliang, Yang Zhen, Li Yan, et al. Research on 2.45 GHz power amplifier based on power synthesizer and power splitter [J]. Journal of Power Supply, 2024, 22(2): 421- 430. (in Chinese)

[3] Jiang Xicheng. Fundamentals of audio class D amplifier design: A review of schemes and architectures [J]. IEEE Solid-State Circuits Magazine, 2017, 9(3): 14-25.

[4] 张缨, 李耀华, 蔡凌, 等. 基于相移 PWM 调制的多电平 D 类功率放大器谐波分析[J]. 电工技术学报, 2007, 22(7): 103-108.
Zhang Ying, Li Yaohua, Cai Ling, et al. Analysis of a cascade multilevel class-D power amplifier output harmonic [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2007, 22(7): 103-108. (in Chinese)

[5] Mauerer M, Kolar J W. Distortion minimization for ultra-low THD class-D power amplifiers [J]. CPSS Transactions on Power Electronics and Applications, 2018, 3(4): 324-338.

[6] Pakniat H. Precise mathematical model of PSCM class-D amplifiers [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2022, 69(10): 9731-9738.

[7] 王家豪. 一种基于模拟电路的倍频单极性 SPWM 控制策略[J]. 中国设备工程, 2018(9): 176-177.
Wang Jiahao. A frequency-doubled unipolar SPWM control strategy based on analog circuits [J]. China Plant Engineering, 2018(9): 176-177. (in Chinese)

[8] 苗狄, 张东来, 张乃通. 基于 ΔΣ 超频的高功率密度空间功率平台[J]. 电工技术学报, 2013, 28(8): 233-240.
Miao Di, Zhang Donglai, Zhang Naitong. Research on space power conditioning unit with high power density based on ΔΣ overclocking characteristics [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2013, 28(8): 233-240. (in Chinese)

[9] 霍安邦. 一种应用于便携式音频设备的 Sigma-Delta 调制器[D]. 大庆: 东北石油大学, 2018.
Huo Anbang. A kind of Sigma-Delta modulator applied in portable audio system [D]. Daqing: Northeast Petroleum University, 2018. (in Chinese)

[10] Berkhout M, Dooper L. Class-D audio amplifiers in mobile applications [C]// IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2010: 992-1002.

[11] 宁兴忠. 基于 Σ-Δ 调制的水声信号发射机研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2011.
Ning Xingzhong. Study of acoustical signal transmitter which based on Sigma-Delta modulation [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2011. (in Chinese)

[12] 周广佼. 基于ΣΔ 调制的水声通信发射机的研究与设计[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2016.
Zhou Guangjiao. Study and design of underwater acoustic communication transmitter based on ΣΔ modulation technique [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2016. (in Chinese)

[13] Ge Tong, Chang J S, Shu Wei. Modeling and analysis of PSRR in analog PWM class D amplifiers [C]// 2006 IEEE

International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS). Island of Kos, Greece, 2006: 4.

[14] Shu Wei, Chang J S. THD of closed-loop analog PWM class-D amplifiers [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2008, 55(6): 1769-1777.

[15] HØyerby M C W, Andersen M A E. Carrier distortion in hysteretic self-oscillating class-D audio power amplifiers: Analysis and optimization [J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2009, 24(3): 714-729.

[16] 钟胜兰. 基于 Sigma-Delta 调制的 D 类功放电源的研究 [D]. 武汉: 华中科技大学, 2018.
Zhong Shenglan. Research on class D amplifier based on Sigma-Delta modulation [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2018. (in Chinese)



盛学锐

作者简介：

盛学锐(1994—)，男，通信作者，博士，工程师。研究方向：功率放大器。E-mail：13260277699@163.com。

王昭君(1997—)，女，硕士，助理工程师。研究方向：信号检测。E-mail：1835570351@qq.com。

张昌(1989—)，男，硕士，工程师。研究方向：信号处理。E-mail：misspopular@126.com。

(责任编辑：郭凯凯)



公益广告来源：中国文明网