

DOI: 10. 20174/j. JUSE. 2026. 02. 05

基于 TPHM 的岩石应力-应变关系与孔隙率演化模型

李硕, 胡宇璇, 杨健航, 彭宗桓

(武汉科技大学 资源与环境工程学院, 武汉 430081)

摘要: 为研究岩石全应力-应变过程孔裂隙结构与岩石非线性变形特征的影响, 考虑孔隙和基质变形差异性, 将多孔岩石解构为硬弹簧与软弹簧两部分, 引入双弹簧 Hooke 模型 (Two-part Hooke's model, 简称 TPHM) 和统计损伤理论, 基于双弹簧 Hooke 模型建立岩石全应力-应变关系, 推导岩石全应力-应变过程的孔隙率演化方程。该模型克服了传统双弹簧 Hooke 模型无法表征岩石屈服后塑性变形的局限性, 能够准确地表征岩石压缩过程中的孔隙压密阶段的非线性变形、塑性屈服、峰值后应力下降以及残余应力特征, 还能有效表征岩石全应力-应变过程中的孔隙率变化规律。经过大量实验数据验证, 该本构模型的理论曲线与试验结果较为吻合, 相关系数均达到了 0.9 以上。

关键词: 双弹簧 Hooke 模型; 全应力-应变过程; 统计损伤; 孔隙率演化

中图分类号: TU452

文献标识码: A

文章编号: 1673-0836(2026)02-0427-10

Rock Stress-Strain Relationship and Porosity Evolution Model Based on TPHM

Li Shuo, Hu Yuxuan, Yang Jianhang, Peng Zonghuan

(School of Resource and Environmental Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081 P. R. China)

Abstract: In order to investigate the impact of pore and fracture structure on the nonlinear deformation characteristics of rocks during the entire stress-strain process, considering the differences in deformation between pores and the matrix, porous rocks are deconstructed into two components: hard springs and soft springs. The Two-part Hooke's Model (TPHM) and statistical damage theory are introduced. Based on the TPHM, the complete stress-strain relationship of rocks is established, and the porosity evolution equation for the entire stress-strain process of rocks is derived. This model overcomes the limitation of the traditional Two-part Hooke's Model, which is unable to represent the plastic deformation of rocks after yielding. It not only accurately characterizes the nonlinear deformation during the pore compaction stage, plastic yielding, stress drop after peak, and residual stress characteristics in the rock compression process, but also effectively represents the porosity variation during the entire stress-strain process of rocks. Extensive experimental data validation has demonstrated that the theoretical curves of this constitutive model align well with the experimental results, with correlation coefficients consistently exceeding 0.9.

Keywords: two-part Hooke's model; full stress-strain process; statistical damage; evolution of porosity

0 引言

岩石全应力-应变关系是评估工程岩体稳定性、

设计施工方案及预测工程安全性的重要理论基础^[1-2], 天然岩石内部存在大量孔裂隙, 孔裂隙结构与岩石基质之间变形特性差异较大, 导致岩石全

收稿日期: 2025-01-10 (修改稿)

作者简介: 李硕 (1999—), 男, 湖北黄冈人, 硕士生, 主要从事岩土力学数值研究方面的工作。

E-mail: lidshuo1999@163.com

通讯作者: 彭宗桓 (1996—), 男, 武汉人, 博士, 主要从事岩土工程等领域的研究工作。

E-mail: Pzh@wust.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金 (52479110)

过程应力-应变曲线呈现非线性特征;然而当前岩体变形的全过程分析主要依赖于传统线性 Hooke 模型^[3]。因此,开展岩石应力-应变关系的非线性特征研究对岩石工程的安全设计具有重要意义。

不少学者对岩石的应力-应变关系进行了深入研究,徐卫亚等^[4]、曹文贵等^[5-6]基于统计损伤力学建立了岩石的损伤本构模型,该类模型能够描述岩石产生塑性变形后的屈服现象以及岩石峰后力学特性。孙梦成等^[7]在连续损伤理论框架下引入最小耗能原理,提出了考虑能量变化的损伤本构模型,能够反映复杂应力条件下岩石力学行为。袁小平等^[8]考虑到塑性软化及损伤软化,基于 D-P 准则建立了弹塑性本构模型,该模型不仅能反映岩石的塑性膨胀硬化,也能表现岩石材料的损伤软化和塑性软化特性。刘振洋等^[9]通过分析能量驱动下岩石微结构系统的破损演变过程,依据能量耗散机制,建立了基于能量耗散机制的二元介质模型揭示了岩石塑性变形、剪胀行为以及残余强度现象。

上述本构模型假设岩石为均质材料,忽略了岩石内部存在的大量孔裂隙及其变形差异性,在岩石压缩前期孔裂隙相较于岩石基质更容易发生变形,导致上述本构模型无法表征岩石压缩初期变形的非线性特征。陈会宫等^[10]、张超等^[11]、曹文贵等^[12]进一步考虑了岩石孔隙对变形过程的影响,将岩石划分为岩石基质与孔隙两个部分,建立了能够表征岩石压缩过程中孔隙压密阶段非线性变形的本构关系。然而,岩石内部存在的部分孔隙是具备一定的承载能力^[13],单一地将岩石分为岩石基质与孔隙两个部分,而忽略岩石内部孔隙的承载能力,这与实际不符。Chen 等^[14]与 Li 等^[15]基于细观力学考虑岩石内部孔隙缺陷闭合与诱导裂隙扩展,利用粘结介质和摩擦介质的特征来表现岩石的宏观力学特性,建立了基于二元介质的岩石本构模型。

实际工程中孔裂隙作为岩石地下水的储存和渗透通道,岩石压缩过程的孔隙率演化对渗透特性及其水力耦合效应具有重要影响^[16-18],但上述研究较少考虑岩石全应力应变过程的孔隙率演化特征。Liu 等^[19]在传统 Hooke 模型的基础上提出了双弹簧 Hooke 模型(Two-part Hooke's model,简称 TPHM),该模型能够描述岩石在孔隙裂隙压密阶段的非线性变形,同时量化分析岩石压缩过程中孔隙率的变化。然而,TPHM 无法表示岩石在屈服后产生的塑性变形以及岩石屈服后的孔隙率变化。

为了准确表征岩石压缩全过程的应力应变关系,克服 TPHM 无法表征岩石屈服后塑性变形和

峰后破坏局限性,引入统计损伤理论,建立基于双弹簧 Hooke 模型的岩石全应力-应变关系,推导岩石全应力-应变过程的孔隙率演化方程,通过试验数据比较分析验证模型的合理性。

1 岩石变形过程及双弹簧 Hooke 模型

岩石全应力-应变曲线揭示了岩石在压缩过程中微观结构的变化,每个阶段都代表了岩石内部不同应力状态下的响应机制,从孔隙压缩到弹性变形,再到裂纹的萌生、扩展直至破坏失效。通过大量的岩石压缩试验数据分析,将岩石在应力作用下的应力-应变曲线精确地划分为 5 个具有显著物理意义的阶段^[20]。岩石在应力作用下变形破坏具体过程如图 1 所示。

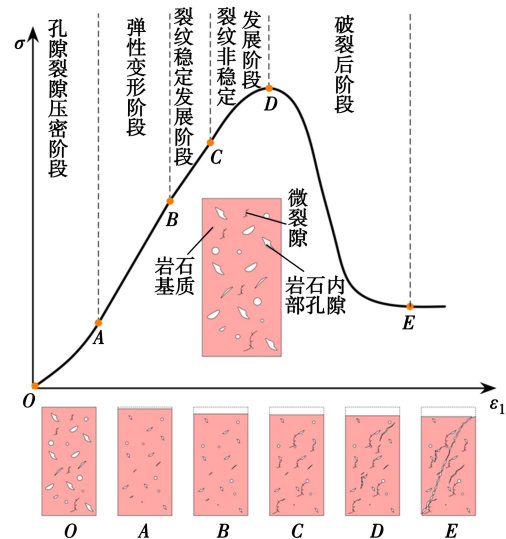


图 1 岩石压缩应力应变过程

Fig. 1 The process of compressive stress and strain in rocks

由于岩石内部存在许多孔隙及微裂隙,在受力压缩前期这些孔隙裂隙相较于岩石基质对应力的敏感性更高,更容易产生较大的变形,应力应变曲线前期呈现非线性形变,这就导致传统的将岩石视为均质材料变形的本构模型无法解释天然岩石在压缩前期的非线性变形。例如,传统的 Hooke 模型认为岩石在变形过程中应力与应变为线形关系:

$$d\sigma = Kd\varepsilon \quad (1)$$

式中: σ 为静水压力; K 为体积模量; ε 为体积应变。

为了解释岩石内部存在的大量孔隙裂隙对岩石变形的影响,Liu 等^[19]在传统 Hooke 模型的基础上建立了双弹簧 Hooke 模型,将岩石的孔裂隙与岩石基质进行区分,如图 2 所示。

尽管两个弹簧所受作用力相同,但它们的变形

是基于两种不同的变形规律。研究表明^[21], 工程应变 ε_e (岩体体积的改变与未受应力状态下岩体的体积之比) 仅适用于描述岩体发生较小的弹性变形, 而岩石非线性变形阶段变形较大, 应该采用自然应变 ε_t (岩体体积的改变与当前应力状态下岩体的体积之比) 进行描述。基于上述说明, 两种应变表示为:

$$d\varepsilon_t = -dV/V \quad (2)$$

$$d\varepsilon_e = -dV/V_0 \quad (3)$$

式中: V 为当前应力状态下岩体的体积; V_0 为未受应力状态下岩体的体积; 下标“0”表示未受应力状态, 并只考虑各向同性应力作用下的应力-应变关系; 下标“t”表示软弹簧; 下标“e”表示硬弹簧。

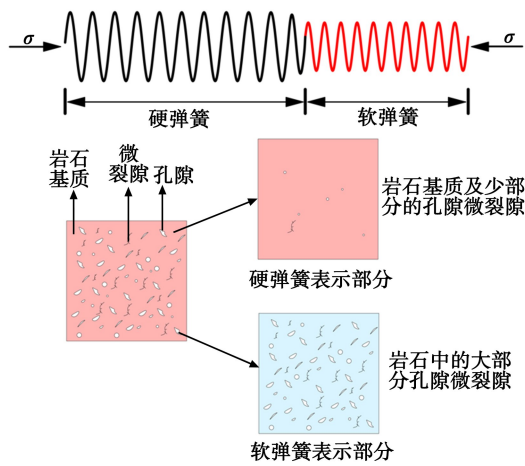


图 2 双弹簧 Hooke 模型

Fig. 2 Two-part Hooke's model

软弹簧部分表示岩石结构中大多数的孔隙裂隙, 硬弹簧表示除大多数孔隙外的其他物质。

当 $\sigma = 0$ 时, $V = V_0$, 结合式 (1), 对式 (2)、式 (3) 进行积分, 得到弹簧体积与应力关系的表达式为:

$$V_t = V_{0,t} \exp\left(-\frac{\sigma}{K_t}\right) \quad (4)$$

$$V_e = V_{0,e} \left(1 - \frac{\sigma}{K_e}\right) \quad (5)$$

式中: V_e 和 V_t 分别为当前应力状态下硬体和软体的体积; $V_{0,e}$ 和 $V_{0,t}$ 分别为初始应力状态下硬体和软体的体积; K_e 和 K_t 分别为硬体和软体的体积模量。

对于未受任何外部荷载的岩体有:

$$V_0 = V_{0,e} + V_{0,t} \quad (6)$$

$$dV = dV_e + dV_t \quad (7)$$

结合式 (4) — (7) 可得:

$$-\frac{dV}{V_0} = \gamma_e \frac{d\sigma}{K_e} + \gamma_t \exp\left(-\frac{\sigma}{K_t}\right) \frac{d\sigma}{K_t} \quad (8)$$

$$\gamma_t = \frac{V_{0,t}}{V_0} \quad (9)$$

$$\gamma_e = 1 - \gamma_t \quad (10)$$

式中: γ_e 和 γ_t 分别为未受应力状态下硬体和软体的体积分数。

只考虑岩石在轴向方向上的应变, 式 (8) 轴向应变与应力关系为:

$$d\varepsilon_1 = \frac{\gamma_e}{E_e} [d\sigma_1 - \nu(d\sigma_2 + d\sigma_3)] + \frac{\gamma_t}{3} \exp\left(-\frac{d\sigma_1}{E_t}\right) d\sigma_1 \quad (11)$$

式中: ε_1 为轴向应变; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 分别为轴向应力和围压; E_e, E_t 分别为硬弹簧和软弹簧的弹性模量; ν 为岩石的泊松比。

对式 (8) 进行积分得到双弹簧本构模型轴向上的表达式为:

$$\varepsilon_1 = \frac{3 - \gamma_t}{3E_e} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \frac{\gamma_t}{3} \left[1 - \exp\left(-\frac{\sigma_1}{E_t}\right) \right] \quad (12)$$

如图 3 所示, 岩石所受应力较小时, 软弹簧的变形远大于硬弹簧, 随着应力的逐渐增大, 软弹簧变形逐渐趋于定值 ($\gamma_t/3$)。当软弹簧的变形几乎不变时, 硬弹簧对岩石变形起到控制作用。这符合岩石的峰值前的变形规律, 即变形初期大孔隙被压缩, 随着应力增大, 孔隙被压实后岩石基质发生弹性变形。由应力应变曲线斜率可以看出, 硬弹簧的弹性模量基本与岩石的弹性模量一致, 由此可以通过岩石的弹性模量来确定硬弹簧的弹性模量 E_e 。

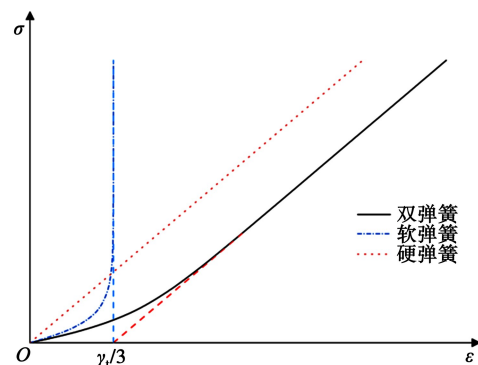


图 3 双弹簧 Hooke 模型变形曲线

Fig. 3 The deformation curves of two-part Hooke's model

岩石与硬弹簧应变上的增量是由前期的孔隙变形引起的, 即软弹簧的变形, 当应力较大时, 软弹簧的应变几乎恒定为 $\gamma_t/3$, 因此可以通过应力应变曲线在应变轴上的截距确定软弹簧的体积分数 γ_t , 然后基于孔隙压缩阶段的应力应变曲线可以拟合

出软弹簧的弹性模量 E_t 。

2 基于 TPHM 的全应力应变关系

2.1 理论模型

曹文贵等^[5]认为岩石在屈服强度之后可分为未受损岩石与损伤岩石 2 个部分。如图 4 所示,对岩石微元的一个截面进行分析,岩石在轴向上受到的应力被分解为 σ'_1 与 σ''_1 ,这 2 个力之和构成了岩石受到的全部轴向应力,采用静力学分析岩石受力平衡:

$$\sigma_1 S = \sigma'_1 S_1 + \sigma''_1 S_2 \quad (13)$$

$$S = S_1 + S_2 \quad (14)$$

式中: σ'_1 、 σ''_1 分别为未损伤部分所受应力与损伤部分所受应力; S_1 、 S_2 分别为未受损岩石与受损岩石的面积。

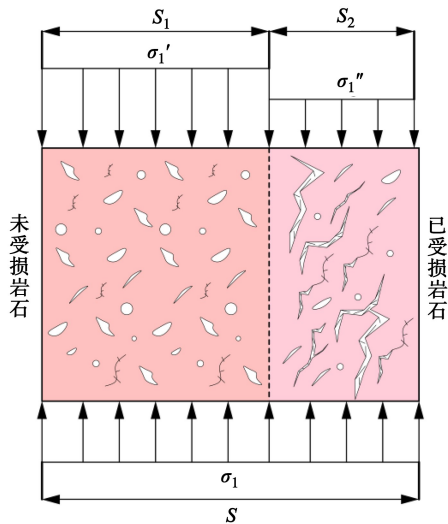


图 4 岩石损伤受力分析

Fig. 4 Stress analysis of rock damage

定义损伤变量为:

$$D = S_2/S \quad (15)$$

由式(13)—(15)可得:

$$\sigma_1 = \sigma'_1(1 - D) + \sigma''_1 D \quad (16)$$

假定,岩石只在轴向上产生损伤,并且存在以下关系^[5]:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 = \varepsilon''_1 \quad (17)$$

$$\sigma''_1 = \sigma_{res} \quad (18)$$

$$\sigma_2 = \sigma''_2 \quad (19)$$

$$\sigma_3 = \sigma''_3 \quad (20)$$

式中: ε_1 、 ε'_1 、 ε''_1 分别为岩石整体轴向应变,未损伤岩石轴向应变,损伤岩石轴向应变; σ_{res} 为岩石残余强度; σ_2 、 σ_3 为岩石侧方向上的名义应力; σ'_2 、 σ'_3 为岩石侧方向上的实际应力。

未损伤岩石假定符合双弹簧 Hooke 模型,有:

$$\varepsilon'_1 = \frac{3 - \gamma_t}{3E_e} [\sigma'_1 - \nu(\sigma'_2 + \sigma'_3)] + \frac{\gamma_t}{3} \left[1 - \exp\left(-\frac{\sigma'_1}{E_t}\right) \right] \quad (21)$$

当岩石产生损伤时应力值较大,此时双弹簧模型中软体部分形变量可以视为不变,即:

$$1 - \exp\left(-\frac{\sigma'_1}{E_t}\right) \approx 1 \quad (22)$$

式(21)可简化为:

$$\sigma'_1 = \frac{3E_e}{3 - \gamma_t} \varepsilon'_1 + \nu(\sigma'_2 + \sigma'_3) - \frac{\gamma_t E_e}{3 - \gamma_t} \quad (23)$$

结合式(16)—(23)得到基于 TPHM 的岩石应力-应变关系:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{3 - \gamma_t}{3E_e} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \frac{\gamma_t}{3} \left[1 - \exp\left(-\frac{\sigma_1}{E_t}\right) \right] & D \leq 0 \\ \sigma_1 = (1-D) \left[\frac{3E_e}{3 - \gamma_t} \varepsilon_1 + \nu(\sigma_2 + \sigma_3) - \frac{\gamma_t E_e}{3 - \gamma_t} \right] + D\sigma_{res} & D > 0 \end{cases} \quad (24)$$

损伤函数 D 作为表征岩石内部损伤体分布特征的关键参数,其准确性直接关系到本构模型对岩石破坏行为的描述精度。研究表明^[22],采用 Weibull 分布构建的损伤函数能够精准表达岩石损伤后的内部损伤体分布规律,此时损伤函数 D 表达式为:

$$D = \begin{cases} 1 - \exp[-(F/F_0)^m] & F \geq 0 \\ 0 & F < 0 \end{cases} \quad (25)$$

式中: F 为微元强度分布变量; m 与 F_0 为待求参数。

由(25)的表述可以看出,微元强度分布变量值大于零时岩石开始出现损伤,并且随着值的增大,损伤程度不断增加。这与岩石强度准则表述的岩石破坏情况一致,因此选取岩石强度准则表达式作为微元强度分布变量具有合理性。由于 D-P 准则考虑了到了中间主应力的影响,适合与岩石材料并且公式简单,故选择 D-P 准则函数表达式作为微元强度分布变量,即:

$$F = \alpha I'_1 + \sqrt{J'_2} - K_0 \quad (26)$$

$$I'_1 = \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 \quad (27)$$

$$J'_2 = \frac{1}{6} [(\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_3 - \sigma'_1)^2] \quad (28)$$

$$\alpha = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin\varphi)} \quad (29)$$

$$K_0 = \frac{6\cos\varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin\varphi)} \quad (30)$$

式中: I'_1 为实际应力张量的第一不变量; J'_2 为实际应力偏量的第二不变量; φ 为内摩擦角; c 为黏聚力; α 、 K_0 为材料参数。

2.2 参数确定方法

为了求解上述基于 TPHM 的全应力应变关系待定参数,对式(23)中符号做出如下表达:

$$\frac{3E_c}{3 - \gamma_1} = A \quad (31)$$

$$\frac{\gamma_1 E_c}{3 - \gamma_1} = B \quad (32)$$

由此式(23)可表示为:

$$\sigma'_1 = A\varepsilon_1 + \nu(\sigma'_2 + \sigma'_3) - B \quad (33)$$

结合式(16)~(22)可将式(23)简化为:

$$\sigma_1 = (1 - D)[A\varepsilon'_1 + \nu(\sigma'_2 + \sigma'_3) - B] + D\sigma_{res} \quad (34)$$

假设在不同围压下应力-应变曲线在峰值点对应的应力和应变分别为 σ_c 和 ε_c ,则在应力-应变曲线的峰值点有:

$$\left. \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} \right|_{(\sigma_c, \varepsilon_c)} = 0 \quad (35)$$

由式(34)求偏微分可得:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} = (1 - D)A -$$

$$[A\varepsilon'_1 + \nu(\sigma'_2 + \sigma'_3) - B] \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_1} \sigma_{res} \quad (36)$$

结合式(35),偏微分在峰值点的值为 0:

$$(1 - D_c)A - [A\varepsilon_c + \nu(\sigma'_2 + \sigma'_3) - B] \frac{\partial D_c}{\partial \varepsilon_c} + \frac{\partial D_c}{\partial \varepsilon_c} \sigma_{res} = 0 \quad (37)$$

依据式(25),当 $F \geq 0$ 时有:

$$D = 1 - \exp[-(F/F_0)^m] \quad (38)$$

所以 D 关于 ε_1 的偏微分为:

$$\frac{\partial D}{\partial \varepsilon_1} = \frac{m(1 - D)}{F} \left(\frac{F}{F_0} \right)^m \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1} \quad (39)$$

在应力峰值点就有:

$$\frac{\partial D_c}{\partial \varepsilon_c} = \frac{m(1 - D)}{F_c} \left(\frac{F_c}{F_0} \right)^m \frac{\partial F_c}{\partial \varepsilon_c} \quad (40)$$

将式(40)代入公式(37)中可得到:

$$m = - \frac{AF_c}{E \ln(1 - D_c)} \frac{\partial F_c}{\partial \varepsilon_c} \quad (41)$$

式中: $E = A\varepsilon_c + \nu(\sigma'_2 + \sigma'_3) - B - \sigma_{res}$ 。

在峰值点时,式(34)可表示为:

$$\sigma_c = (1 - D_c)[A\varepsilon_c + \nu(\sigma'_2 + \sigma'_3) - B] + D_c \sigma_{res} \quad (42)$$

由式(42)可得:

$$D_c = 1 + \frac{\sigma_{res} - \sigma_c}{E} \quad (43)$$

将式(43)代入式(38)可得:

$$F_0 = \frac{F_c}{[-\ln(1 - D_c)]^{\frac{1}{m}}} \quad (44)$$

依据上文假设微元强度分布变量服从 D-P 准则,将式(33)代入式(26)中有:

$$F = \alpha[A\varepsilon'_1 + P_1] - K_0 +$$

$$\sqrt{\frac{1}{6}} \sqrt{[A\varepsilon'_1 + P_2]^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + [A\varepsilon'_1 + P_3]^2} \quad (45)$$

式中: $P_1 = \nu(\sigma'_2 + \sigma'_3) - B + \sigma'_2 + \sigma'_3$; $P_2 = (\nu - 1)\sigma'_2 + \nu\sigma'_3 - B$; $P_3 = (\nu - 1)\sigma'_3 + \nu\sigma'_2 - B$ 。

式(45)对 ε_1 偏微分:

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1} = A\alpha + \frac{2A^2\varepsilon_1 + AP_2 + AP_3}{\sqrt{6} \sqrt{[A\varepsilon_1 + P_2]^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + [A\varepsilon_1 + P_3]^2}} \quad (46)$$

在应力应变曲线峰值点时微元强度分布变量存在以下关系:

$$F_c = A\alpha\varepsilon_c + \alpha P_1 - K_0 +$$

$$\sqrt{\frac{1}{6}} \sqrt{[A\varepsilon_c + P_2]^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + [A\varepsilon_c + P_3]^2} \quad (47)$$

$$\frac{\partial F_c}{\partial \varepsilon_c} = A\alpha + \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot$$

$$\frac{2A^2\varepsilon_c + AP_2 + AP_3}{\sqrt{[A\varepsilon_c + P_2]^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + [A\varepsilon_c + P_3]^2}} \quad (48)$$

将式(43)、(47)及(48)代入式(41)可求解出 m ,将式(41)、(43)及(47)代入式(44)可求解出 F_0 。

2.3 模型验证

文献[23-27]使用砂岩、花岗岩与大理岩标准样进行了大量室内压缩试验,试验数据显示岩石的全应力应变曲线的孔隙裂隙压密阶段均具有明显的非

线性特征。为验证基于 TPHM 的全应力应变关系的合理性,选取其室内压缩试验数据,依据试验曲线按常规岩石力学方法进行数据处理,岩石力学参数如表 1 所示,图 5 为理论模型与试验数据对比。

如图 5 所示,不同岩石在不同围压条件下,岩石应力-应变曲线前期均出现了非线性变形,但由于不同岩石的物理力学性质以及加载方式的不同,

表 1 岩石力学参数

Table 1 Rock mechanics parameters

编号	E_c /GPa	γ_i	E_t /MPa	c /MPa	$\varphi/(^\circ)$	ν	m	F_0	数据来源
a	4.764	0.003 67	3.699	6.33	43	0.15	11.285	23.585	文献[23]
b	58.386	0.001 64	15.877	24.0	53.5	0.45	5.605	209.902	文献[24]
c	52.732	0.002 04	17.441	24.0	53.5	0.45	5.617	249.888	文献[24]
d	54.810	0.002 34	12.144	24.0	53.5	0.45	4.145	295.977	文献[24]
e	7.752	0.005 06	6.627	8.32	45.6	0.16	5.726	90.947	文献[25]
f	10.310	0.009 89	9.527	8.32	45.6	0.14	5.011	140.143	文献[25]
g	27.562	0.002 27	4.992	12.44	40.98	0.24	4.521	160.094	文献[26]
h	19.511	0.002 72	3.829	11.58	38.4	0.21	4.484	162.911	文献[26]
i	42.295	0.002 78	5.589	31.18	33.23	0.26	3.602	168.373	文献[27]

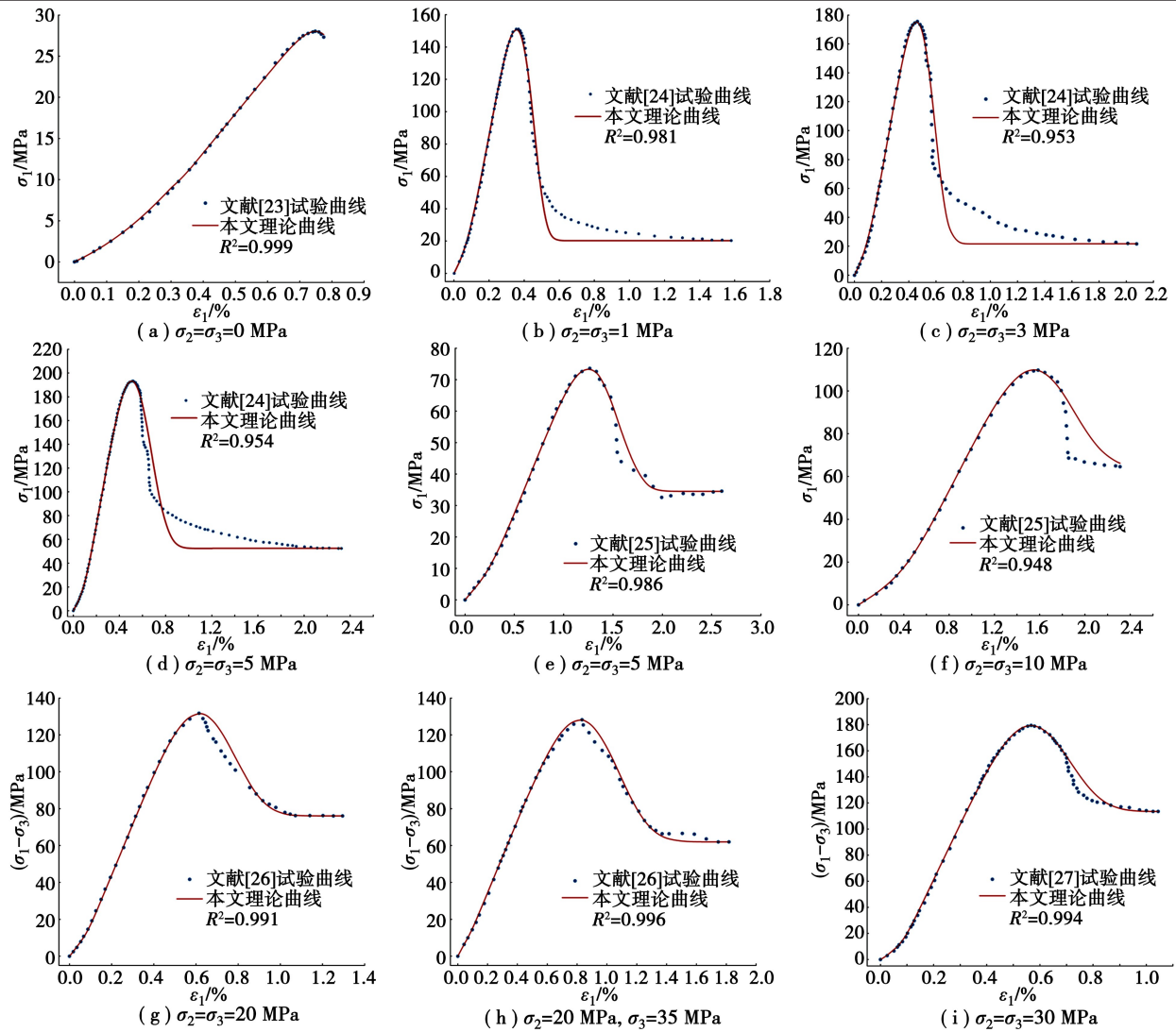


图 5 理论模型与试验数据对比

Fig. 5 Theoretical model compared with experimental data

此阶段的非线性变形程度有所差异,但本文建立的基于 TPHM 的全应力应变关系均能够很好地表征不同岩石不同的加载过程中的非线性变形。理论模型克服了双弹簧 Hooke 本构模型不能表征岩石在屈服应力之后的塑性变形的局限性,即使不同的岩石在不同围压条件下,理论曲线也能够描述岩石的全应力-应变过程, R^2 均达到了 0.94 以上。

3 孔隙率演化模型

3.1 模型建立

硬弹簧包含岩石部分不易被压缩的孔隙,软弹簧代表岩石中大部分容易被压缩的孔隙,根据岩石的孔隙率定义为:

$$d\varphi = \frac{dV^p}{V} = \frac{dV_e^p + dV_l}{V} \approx \frac{dV_e^p + dV_l}{V_0} \quad (49)$$

式中: φ 表示岩石孔隙率; V^p 表示孔隙体积; V_e^p 表示硬弹簧代表的孔隙体积。 V 为岩石的体积,但在实际研究中,岩石的体积 V 与岩石的初始体积 V_0 差异较小,因此 $V \approx V_0$ 。

按照孔隙率定义,硬弹簧中初始孔隙率可以表示为:

$$\varphi_0^e = \frac{V_{0,e}^p}{V_0} = \varphi_0 - \gamma_l \quad (50)$$

式中: φ_0 是岩石初始孔隙率; $V_{0,e}^p$ 为硬弹簧孔隙部分初始孔隙率。

引入孔隙压缩系数 C_e :

$$C_e = -\frac{1}{3} \frac{1}{V_{0,e}^p} \frac{dV_e^p}{d\sigma_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (51)$$

于是,对于硬弹簧代表的部分孔隙符合以下变化规律:

$$d\varphi_e = \frac{dV_e^p}{V_0} = \frac{V_{0,e}^p}{V_0} \frac{dV_e^p}{V_{0,e}^p} = -(\varphi_0 - \gamma_l) C_e (d\sigma_1 + d\sigma_2 + d\sigma_3) \quad (52)$$

由于软弹簧代表的是岩石内部的大部分孔隙,因此软弹簧的孔隙变化即为软弹簧的体积变化,由公式(4)、(49)及(52)可知软弹簧孔隙率变化为:

$$d\varphi_l = \frac{dV_l}{V_0} = -\frac{\gamma_l}{3E_l} \left[\exp\left(-\frac{\sigma_1}{E_l}\right) d\sigma_1 + \exp\left(-\frac{\sigma_2}{E_l}\right) d\sigma_2 + \exp\left(-\frac{\sigma_3}{E_l}\right) d\sigma_3 \right] \quad (53)$$

结合(52)与式(53)并积分得到双弹簧 Hooke 模型孔隙率表达式:

$$\varphi = (\varphi_0 - \gamma_l) [1 - C_e(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)] + \frac{\gamma_l}{3} \left[\exp\left(-\frac{\sigma_1}{E_l}\right) + \exp\left(-\frac{\sigma_2}{E_l}\right) + \exp\left(-\frac{\sigma_3}{E_l}\right) \right] \quad (54)$$

在岩石受损之后内部会产生新的裂隙裂纹,导致岩石孔隙率增大,双弹簧模型参数发生变化,使其不再适用于受损岩石的孔隙率变化率,因此引入损伤统计力学,将双弹簧模型孔隙率表达式进行优化。

如图 6 所示,优化后模型将岩石的孔隙变化认为是由未受损岩石的孔隙压缩与损伤体不断发育共同作用下产生的,未损伤岩石仍符合 TPHM 孔隙率表达式变化规律,并且只会不断压缩原有裂隙,不会产生新的孔隙。模型假设提出损伤体只受到残余应力作用,该应力大小恒定,因此损伤体内部孔隙压缩程度固定,因此认定损伤体内部孔隙率不会因外部应力产生变化,是由岩体发生损伤时新裂隙产生决定的。

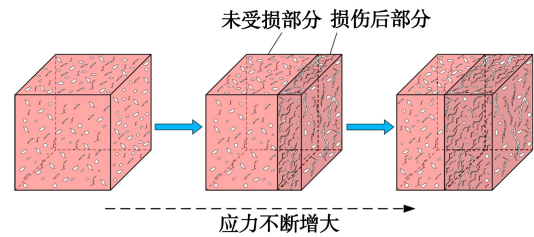


图 6 孔隙率随损伤变化过程

Fig. 6 The porosity rate varies with the damage evolution process

岩石总的孔隙率可以表示为:

$$\varphi = \frac{V_w^p + V_s^p}{V_0} \quad (55)$$

式中: V_w^p 为未损伤岩石中裂隙体积; V_s^p 为损伤体裂隙体积; V_0 为岩石总体积。

损伤体中孔隙率为:

$$\varphi_s = V_s^p / V_s \quad (56)$$

未损伤岩石中孔隙率为:

$$\varphi_w = V_w^p / V_w \quad (57)$$

由上述损伤变量的定义可得到损伤体体积和未损伤岩石体积与岩石总体积的关系:

$$V_s = D \cdot V_0 \quad (58)$$

$$V_w = (1 - D) \cdot V_0 \quad (59)$$

结合式(55)–(59)可得:

$$\varphi = (1 - D) \varphi_w + D \varphi_s \quad (60)$$

未损伤岩石遵循传统的双弹簧孔隙率模型,所受应力为实际应力,损伤岩石受到恒定的残余应力,孔隙率不变,由此得到孔隙率表达式为:

$$f = [(f_0 - \gamma_l) [1 - C_e(\sigma'_1 + \sigma_2 + \sigma_3)] + \frac{\gamma_l}{3} \left[\exp\left(-\frac{\sigma'_1}{E_l}\right) + \exp\left(-\frac{\sigma_2}{E_l}\right) + \exp\left(-\frac{\sigma_3}{E_l}\right) \right]] \cdot (1 - D) + f_s \cdot D \quad (61)$$

优化后孔隙率表达式中需要继续求解的参数为孔隙压缩系数,研究表明,岩石中的孔隙随着压

缩程度的不断增加,越来越难以压缩^[28]。由图 7 中的孔隙率变化试验曲线可以看出,随着施加的应力增大,孔隙率变化曲线斜率不断减小,即孔隙率变化速率减小,从孔隙压缩系数的角度来表达,即随着岩石孔隙被不断压缩,岩石孔隙压缩系数逐渐减小,并且随着孔隙被压缩体积的增大,孔隙压缩系数减小的速率也不断增加。通过多次拟合研究,得出孔隙压缩系数与实际应力 σ'_1 关系为:

$$C_e = C_e^0 - C_e^0 \cdot C_1 \cdot \sigma'_1 \cdot e^{C_2 \sigma'_1} \quad (62)$$

式中: C_e^0 为初始孔隙压缩率; C_1 、 C_2 为待定参数,可通过拟合得到。

当 $C_e = 0$ 时,表示硬弹簧中的孔隙已经完全闭合,不可被压缩,因此在此应力之后 C_e 恒等于零。

3.2 模型验证

在试验过程中直接测量出岩石压缩全过程的孔隙率变化通常难以做到,研究表明^[29] 岩石压缩全过程的孔隙率变化可以通过压缩过程中的体积应变求解得到:

$$f = \frac{f_0 - \varepsilon_v + \frac{\sigma_0}{K}}{1 - \varepsilon_v} \quad (63)$$

式中: ε_v 为体积应变; σ_0 为静水压力, $\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$; K 为岩石实体的体积模量, $K = E/3(1 - 2\nu)$, E 为岩石实体的弹性模量。

俞缙等^[23] 给出了中不同围压下砂岩压缩试验数据,通过上述计算方式得到试验全过程中孔隙率随应力变化数据进行模型验证。

为方便图形表述,对定义应力 σ_1^e 作出如下规定:

$$\begin{cases} \sigma_1^e = \sigma_1 & \sigma_1 \leq \sigma_c \\ \sigma_1^e = 2\sigma_c - \sigma_1 & \sigma_1 > \sigma_c \end{cases} \quad (64)$$

如图 7 所示,理论曲线能够很好的拟合孔隙率试验曲线,将双弹簧本构模型进一步扩展,能够表征出岩石因出现损伤而发生的孔隙率增大效应,拟合效果很好, R^2 均达到 0.95 以上。图 7 还给出了岩石压缩过程中的孔隙率变化规律,孔隙率随着岩石的不断压缩先减小后增大,这与实验数据变化规律一致,这验证了岩石孔隙率与渗透性具有极强的关联性。孔隙率曲线在岩石压缩前期斜率不断减小,表现出非线性的特性,这与前文所述的随着孔隙的不断被压密,孔隙越难以被压缩相互佐证。孔隙率变化情况与围压大小具有极强的相关性:随着

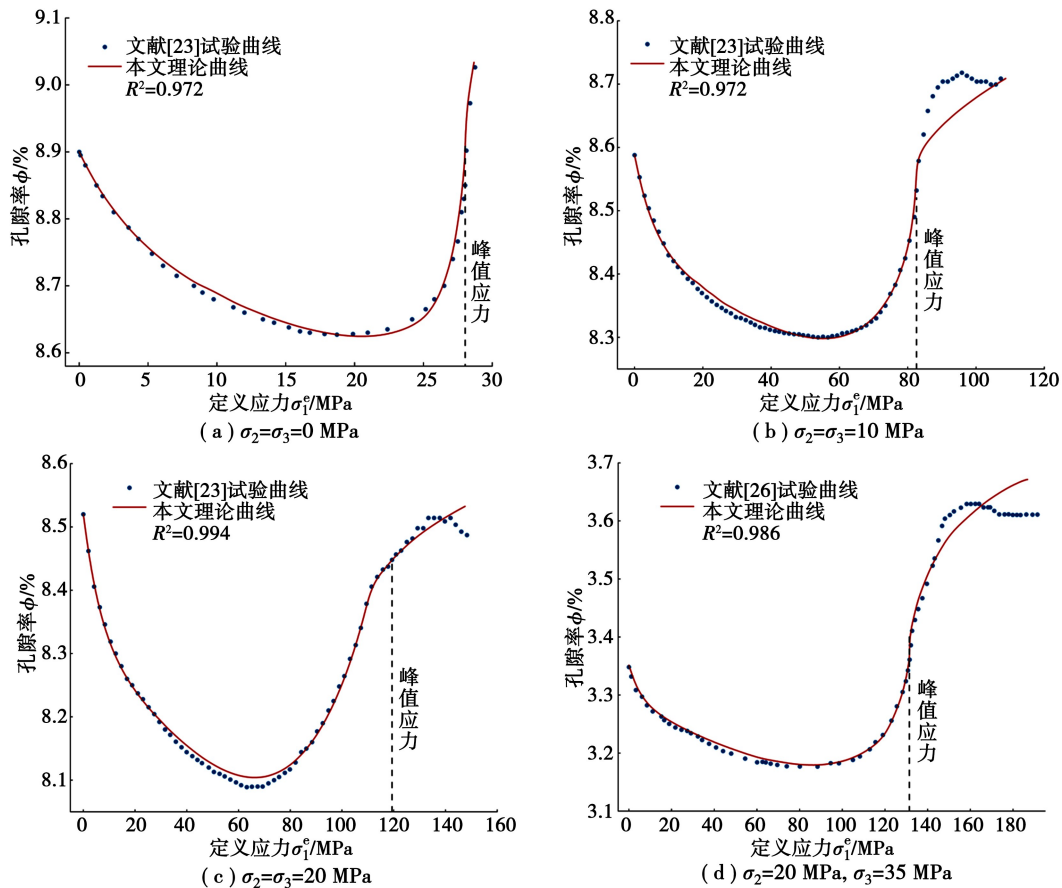


图 7 理论曲线与试验曲线孔隙率对比

Fig. 7 Comparison of porosity between theoretical curves and experimental curves

围压的不断增大,孔隙率出现增长点的应力值增大,孔隙率的最小值减小,破坏后孔隙率最大值减小,这一现象表明围岩控制岩石孔隙的压缩程度。

4 结论

(1)该模型表明了岩石在低应力条件下的非线性变形是由岩石内部孔隙压缩引起的,在屈服应力后产生的塑性变形及承载能力下降与岩石的损伤有关,克服了传统的双弹簧 Hooke 模型不能表征岩石在屈服应力之后的塑性变形的局限性。即使在不同的岩石、不同围压条件下,理论曲线也能够较好描述岩石压缩过程中孔隙裂隙压密阶段至残余强度阶段全过程的曲线。

(2)岩石压缩过程中内部孔隙也不断被压密,但随着孔隙的不断压密,孔隙被压缩的难度不断增加,即孔隙压缩系数不断减小。岩石在屈服应力之后发生损伤会产生新的孔隙导致孔隙率增加。考虑到孔隙压缩系数的变化以及损伤后新孔隙的产生,基于TPHM的岩石全应力-应变本构模型建立了孔隙率表达式。该表达式不仅能够很好地表达前期较低应力下孔隙不断被压缩导致的孔隙率下降,而且对岩石因损伤导致的孔隙率上升现象也能很好表征。

(3)岩石孔隙率的变化趋势与围压之间具有极强的关联性:当围压逐渐增强时,孔隙率开始呈现增长趋势所对应的应力阈值随之提升;同时,孔隙率在该加载过程中所能达到的最小值逐渐减小;进一步地,岩石破坏后,孔隙率所能达到的最大值降低。

参考文献 (References)

- [1] 杨文君, 谢强, 班宇鑫, 等. 变加载速率砂岩声发射特征及损伤本构模型[J]. 地下空间与工程学报, 2021, 17(1): 71-79. (Yang Wenjun, Xie Qiang, Ban Yuxin, et al. The acoustic emission characteristics and damage constitutive model of sandstone under variable loading rate [J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2021, 17(1): 71-79. (in Chinese))
- [2] 贾朝军, 王永刚, 龚琛杰, 等. 水-力耦合作用下隧道围岩本构模型研究[J]. 地下空间与工程学报, 2020, 16(增1): 100-107. (Jia Chaojun, Wang Yonggang, Gong Chenjie, et al. Constitutive modeling of H-M coupling behavior of brittle rock for rock tunnels [J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2020, 16(Supp. 1): 100-107. (in Chinese))
- [3] 李连崇, 赵瑜. 基于双应变胡克模型的岩石非线性弹性行为分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(10): 2119-2126. (Li Lianchong, Zhao Yu. Investigation on nonlinear elastic behaviour of rocks based on a two-part Hooke's model[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2012, 31(10): 2119-2126. (in Chinese))
- [4] 徐卫亚, 韦立德. 岩石损伤统计本构模型的研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(6): 787-791. (Xu Weiya, Wei Lide. Study on statistical damage constitutive model of rock[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2002, 21(6): 787-791. (in Chinese))
- [5] 曹文贵, 赵衡, 李翔, 等. 基于残余强度变形阶段特征的岩石变形全过程统计损伤模拟方法[J]. 土木工程学报, 2012, 45(6): 139-145. (Cao Wengui, Zhao Heng, Li Xiang, et al. A statistical damage simulation method for rock full deformation process with consideration of the deformation characteristics of residual strength phase [J]. China Civil Engineering Journal, 2012, 45(6): 139-145. (in Chinese))
- [6] 曹文贵, 赵衡, 张玲, 等. 考虑损伤阈值影响的岩石损伤统计软化本构模型及其参数确定方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(6): 1148-1154. (Cao Wengui, Zhao Heng, Zhang Ling, et al. Damage statistical softening constitutive model for rock considering effect of damage threshold and its parameter determination method [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(6): 1148-1154. (in Chinese))
- [7] 孙梦成, 徐卫亚, 王苏生, 等. 基于最小耗能原理的岩石损伤本构模型研究[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2018, 49(8): 2067-2075. (Sun Mengcheng, Xu Weiya, Wang Susheng, et al. Study on damage constitutive model of rock based on principle of minimum dissipative energy [J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2018, 49(8): 2067-2075. (in Chinese))
- [8] 袁小平, 刘红岩, 王志乔. 基于Drucker-Prager准则的岩石弹塑性损伤本构模型研究[J]. 岩土力学, 2012, 33(4): 1103-1108. (Yuan Xiaoping, Liu Hongyan, Wang Zhiqiao. Study of elastoplastic damage constitutive model of rocks based on Drucker-Prager criterion [J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, 33(4): 1103-1108. (in Chinese))
- [9] 刘振洋, 王爱文, 刘晓林, 等. 基于能量耗散机制的岩石二元介质模型[J]. 工程力学, 2025(7): 232-245. (Liu Zhenyang, Wang Aiwen, Liu Xiaolin, et al. Rock binary medium model based on energy dissipation mechanism [J]. Engineering Mechanics, 2025(7): 232-245. (in Chinese))
- [10] 陈会官, 赵程, 张睿, 等. 考虑空隙压密特征的岩石弹塑性损伤增量本构模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2023, 42(12): 3043-3055. (Chen Huiguan, Zhao Cheng, Zhang Rui, et al. Elastoplastic damage incremental constitutive model of rock considering the characteristics of void compaction [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2023, 42(12): 3043-3055. (in Chinese))
- [11] 张超, 曹文贵, 徐赞, 等. 岩石初始宏观变形模拟及微裂纹闭合应力确定方法[J]. 岩土力学, 2018,

- 39(4): 1281-1288, 1301. (Zhang Chao, Cao Wengui, Xu Zan, et al. Initial macro-deformation simulation and determination method of micro-crack closure stress for rock[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2018, 39(4): 1281-1288, 1301. (in Chinese))
- [12] 曹文贵, 张超, 贺敏, 等. 岩石空隙变化及其变形全过程的统计损伤模拟方法[J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2017, 44(9): 100-106. (Cao Wengui, Zhang Chao, He Min, et al. Voids change and statistical damage simulation method of the full deformation process for rocks [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2017, 44(9): 100-106. (in Chinese))
- [13] Zhao Y, Liu H H. An elastic stress-strain relationship for porous rock under anisotropic stress conditions[J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2012, 45: 389-399.
- [14] Chen Y, Liu E, Yu Y, et al. A binary-medium-based constitutive model for porous rocks [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2023, 164: 105345.
- [15] Qian L, Mo Z G, Zhang J H, et al. A macro-mesoscopic constitutive model for porous and cracked rock under true triaxial conditions [J]. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 2024, 16(8):3080-3098.
- [16] Niu Z H, Zhu Z D, Que X C, et al. Hydromechanical behaviour of columnar jointed rock masses under true triaxial conditions: An experimental and theoretical investigation[J]. *Geoenergy Science and Engineering*, 2023, 224: 211623.
- [17] 蒋长宝, 余塘, 魏文辉, 等. 加卸载应力作用下煤岩渗透率演化模型研究[J]. *岩土力学*, 2022, 43(增1): 13-22. (Jiang Changbao, Yu Tang, Wei Wenhui, et al. Permeability evolution model of coal under loading and unloading stresses [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2022, 43(Supp. 1): 13-22. (in Chinese))
- [18] 王伟, 陈超维, 刘世藩, 等. 各向异性层状千枚岩渗透率及有效孔隙率试验研究[J]. *岩土工程学报*, 2024, 46(2): 445-451. (Wang Wei, Chen Chaowei, Liu Shifan, et al. Experimental study on permeability and effective porosity of anisotropic layered phyllite [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2024, 46(2): 445-451. (in Chinese))
- [19] Liu H H, Rutqvist J, Berryman J G. On the relationship between stress and elastic strain for porous and fractured rock [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2009, 46(2): 289-296.
- [20] 吴顺川, 李利平, 张晓平. 岩石力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021. (Wu Shunchuan, Li Liping, Zhang Xiaoping. *Rock mechanics* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2021. (in Chinese))
- [21] 杨健航, 叶祖洋, 黄诗冰, 等. 考虑软体和硬体开度的岩体单裂隙渗流与法向应力耦合模型研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2023, 42(增1): 3473-3480. (Yang Jianhang, Ye Zuyang, Huang shibing, et al. Research on coupling model of single fracture seepage and normal stress of rock mass considering the soft and hard aperture [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2023, 42 (Supp. 1): 3473-3480. (in Chinese))
- [22] 蒋浩鹏, 姜谔男, 杨秀荣. 基于 Weibull 分布的高温岩石统计损伤本构模型及其验证[J]. *岩土力学*, 2021, 42(7): 1894-1902. (Jiang Haopeng, Jiang Annan, Yang Xiurong. Statistical damage constitutive model of high temperature rock based on Weibull distribution and its verification [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2021, 42(7): 1894-1902. (in Chinese))
- [23] 俞缙, 李宏, 陈旭, 等. 渗透压-应力耦合作用下砂岩渗透率与变形关联性三轴试验研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2013, 32(6): 1203-1213. (Yu Jin, Li Hong, Chen Xu, et al. Triaxial experimental study of associated permeability-deformation of sandstone under hydro-mechanical coupling [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2013, 32(6):1203-1213. (in Chinese))
- [24] Walton G, Gaines S. Evaluation of stress path and load rate effects on rock strength using compression testing data for Stanstead Granite [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2023, 169(1):105455.
- [25] 姚华彦, 张振华, 朱朝辉, 等. 干湿交替对砂岩力学特性影响的试验研究[J]. *岩土力学*, 2010, 31(12): 3704-3708, 3714. (Yao Huayan, Zhang Zhenhua, Zhu Chaohui, et al. Experimental study of mechanical properties of sandstone under cyclic drying and wetting [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2010, 31(12):3704-3708,3714. (in Chinese))
- [26] Lu J, Xie H, Li M, et al. Effect of microwave radiation on mechanical behaviors of tight fine sandstone subjected to true triaxial stress [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2022, 152: 105063.
- [27] Deng J, Li S, Jiang Q, et al. Probabilistic analysis of shear strength of intact rock in triaxial compression: a case study of Jinping II project [J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2021, 111(4):103833.
- [28] 李传亮. 岩石压缩系数与孔隙度的关系[J]. *中国海上油气(地质)*, 2003(5): 65-68. (Li Chuanliang. The relationship between rock compression and porosity [J]. *China Offshore Oil and Gas (Geology)*, 2003(5): 65-68. (in Chinese))
- [29] 段品佳, 王芝银. 煤岩孔隙率与渗透率变化规律试验研究[J]. *地下空间与工程学报*, 2013, 9(6): 1283-1288. (Duan Pingjia, Wang Zhiyin. Experimental research on variations of permeability and porosity for coals [J]. *Chinese Journal of Underground Space and Engineering*, 2013, 9(6): 1283-1288. (in Chinese))