

DOI: 10. 20174/j. JUSE. 2026. 02. 04

# 基于 Schwarz 交替法的浅埋双圆隧道塑性区解析解

王超, 邹金锋, 舒丹

(中南大学 土木工程学院, 长沙 410075)

**摘要:**为探究浅埋双线隧道开挖引起围岩塑性屈服模式,以浅埋双线圆形隧道为例,采用位移和附加面力联合控制 Schwarz 交替法和复变函数法,通过迭代循环求解浅埋双线圆形隧道围岩弹性应力函数,并基于 Mohr-Coulomb 屈服准则获得围岩塑性应力分量表达式,利用浅埋双线圆形隧道周围弹塑性区交界面上的应力连续性条件优先确定塑性区半径的弹塑性解,并根据极坐标与直角坐标相互转化关系建立浅埋双线圆形隧道周围塑性区分布范围的解析计算方法,通过数值模拟结果和现场实测结果分别验证本文解析计算方法的合理性和工程适用性,并分析双线隧道中心间距对浅埋双圆隧道周围塑性区的影响规律。结果表明:本文解析计算方法可用于解决实际工程中浅埋双线隧道周围塑性区分布范围的预测问题,且满足 20% 的工程精度要求,与数值模拟结果拟合良好,具有较高的计算精度;浅埋双线圆形隧道周围塑性区分布范围与双线隧道中心间距  $s$  呈正相关,可根据该因素影响下致使浅埋双线圆形隧道周围塑性区达到贯通的临界状态时的分布规律,初步判断塑性区分布范围计算结果的合理性。研究成果可为类似隧道工程设计和围岩变形控制提供理论指导。

**关键词:**浅埋双线圆形隧道; Schwarz 交替法; 复变函数法; Mohr-Coulomb 屈服准则; 应力连续性条件; 塑性区分布范围

中图分类号: U451

文献标识码: A

文章编号: 1673-0836(2026)02-0412-15

## Analytical Solution for Determining Plastic Zones around Shallow Twin-Circular Tunnels Based on the Schwarz Alternation Method

Wang Chao, Zou Jinfeng, Shu Dan

(School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, P. R. China)

**Abstract:** In order to investigate the plastic yielding mode of surrounding rock caused by the excavation of shallow twin tunnels, the displacement and additional surface force joint controlling the Schwarz alternation method and complex function method are adopted to solve the elastic stress function of surrounding rock of shallow twin circular tunnels through iterative cycles as an example. The expression of plastic stress components of surrounding rock is obtained based on Mohr-Coulomb failure criterion. The elastoplastic solution of the radius of the plastic zone is determined preferentially by using the stress continuity condition at the interface of the elastic-plastic zones around the shallow twin circular tunnels. The analytical solution for the distribution range of the plastic zones around the shallow twin circular tunnels is established, according to the interconversion relationship between polar coordinates and right-angle coordinates. The rationality and applicability of the analytical solution are verified by numerical simulation results and field measurement results of engineering application. The influence of the center spacing of the twin tunnels on the plastic zones around shallow twin circular tunnels are also analyzed. The results

收稿日期: 2025-02-06(修改稿)

作者简介: 王超(1994—), 男, 河南郑州人, 博士生, 主要从事岩土与地下工程稳定性分析方法与加固关键技术的研究。E-mail: wangchao214801069@yeah.net

基金项目: 国家重点研发计划(2017YFB1201200); 湖南省交通运输厅科技项目(202238, 202303); 江西省交通运输厅科技项目(2021C0002); 南昌轨道交通集团 2020 年度科研计划项目(2020HGKYB002)

show that the analytical solution in this study can be used to solve the problem of predicting the distribution range of the plastic zones around shallow twin tunnels in actual engineering, and meets the requirement of 20% engineering accuracy, fits well with the numerical simulation results, and has a high calculation accuracy. The distribution range of the plastic zones around shallow twin circular tunnels are positively correlated with the center spacing  $s$  of the twin tunnels. Based on the distribution pattern of the plastic zone around shallow twin circular tunnels under the influence of this factor, when the plastic zone reaches the critical state of penetration, the reasonableness of the calculation results of the distribution range of the plastic zones is preliminarily judged. It provides theoretical guidance for similar tunnel engineering design calculation and deformation control of surrounding rock.

**Keywords:** shallow twin-circular tunnels; Schwarz alternation method; complex function method; Mohr-Coulomb failure criterion; stress continuity condition; distribution range of the plastic zones

## 0 引言

浅埋双线隧道在隧道工程设计和施工中经常遇到,是地下工程中的一类重要结构形式。受隧道间相互作用影响,往往双线隧道围岩呈现出不同于单线隧道围岩的性质和规律,故已有的关于浅埋单线隧道围岩的相关理论不能完全适用于浅埋双线隧道工程,且考虑到现阶段国内外隧道工程多为双线隧道的结构形式,因此有必要探明浅埋双线隧道在施工过程中的围岩变化特性,以保证浅埋双线隧道工程建设的安全性。

由于隧道开挖过程中的施工扰动打破了围岩原有的应力平衡状态,将促使隧道周围逐渐形成塑性区,而塑性区的形成将导致浅埋双线隧道围岩的应力场和位移场发生变化,不利于围岩的稳定。为此,国内外专家学者已对浅埋隧道施工过程中围岩的应力和位移变化规律开展了相关研究。李倩倩等<sup>[1]</sup>考虑围岩自重和地表堆载的共同影响,综合采用复变函数法和 Mohr-Coulomb 屈服准则以建立隐伏椭圆形空洞洞周初始塑性区分布范围的解析计算方法,分析了空洞形状及外部荷载对塑性区分布的影响规律。杨公标等<sup>[2]</sup>考虑围岩重力的影响,采用复变函数法和 Schwarz 交替法建立了含空洞地层浅埋圆形隧道围岩应力和位移解析模型,分析了应力释放系数、空洞位置及尺寸对隧道围岩应力和变形的影响规律。蔡义等<sup>[3]</sup>采用数值模拟和模型试验的方法分析了空洞大小及空洞与隧道间净距对浅埋隧道所处地层变形的影响规律,并给出了邻近上覆空洞浅埋隧道施工引起隧道围岩的破坏特征。晏莉等<sup>[4]</sup>利用复变函数法和 Schwarz 交替法迭代求解了半无限平面内双孔平行圆形隧道开挖后围岩应力和位移的弹性解。张治国等<sup>[5]</sup>考虑隧道洞周椭圆化收敛变形的影响,利用位移控制 Schwarz 交替法和复变函数理论建立了任意布置方式下双线盾构隧道开挖引起周围地层变形的计算方法,并分析了双线隧道水平和斜交两种不同

布置方式下隧道中心间距对地层变形的影响规律。Zou 等<sup>[6]</sup>考虑重力的影响,采用双极坐标法和 Mohr-Coulomb 屈服准则,提出了浅埋圆形隧道围岩应力及其周围塑性区分布的解析解,并建立了隧道边界内支撑压力计算的新方法。Xiang 等<sup>[7]</sup>将以隧道边界条件的解析计算结果和以既有桩基边界条件的解析计算结果相叠加的处理方式,建立了既有桩基附近隧道开挖引起围岩的二次应力场和潜在塑性区的理论预测算法,并分析了既有桩基的荷载作用位置、大小和分布模式对隧道周围塑性区分布的影响规律。纵观上述关于浅埋隧道围岩应力和位移的理论研究成果,不难发现其中大多关于围岩应力和位移的弹性解,且少数关于浅埋隧道周围塑性区分布规律的研究成果也仅涉及单线隧道,但对于考虑塑性因素影响的浅埋双线隧道围岩弹塑性解的理论研究仍相对匮乏。众所周知,隧道开挖将导致周围岩土体发生塑性屈服,且塑性区的确定对于探明浅埋双线隧道围岩应力和位移的变化规律至关重要,因此有必要开展浅埋双线隧道周围塑性区分布规律的解析计算方法研究。

基于此,本文以水平布置方式下的浅埋双线圆形隧道为例,综合采用复变函数法和 Schwarz 交替法,以位移边界条件和附加面力条件综合控制迭代求解过程以确定合适精度条件下围岩的应力函数,通过构建浅埋双线圆形隧道周围弹塑性区交界面上弹性应力组合与 Mohr-Coulomb 屈服准则条件下塑性应力组合的应力连续性方程,求解并确定浅埋双线圆形隧道周围塑性区半径和分布范围,并分析双线隧道中心间距对浅埋双线圆形隧道周围塑性区的影响规律,以期对浅埋双线隧道设计计算和围岩变形控制提供可靠的理论指导与参考。

## 1 Schwarz 交替法基本原理

Schwarz 交替法是一种求解多连通域问题的常用解析计算方法,其最初是一种用于求解拉普拉斯方程狄里赫利问题的方法<sup>[8]</sup>,但在不断演化和发

展中逐渐拓宽并验证了其在二维平面和三维空间中的适用性<sup>[9,10]</sup>。考虑到本文中浅埋双线圆形隧道问题属于半无限平面中三连通域问题,故可利用 Schwarz 交替法基本原理将一个多连通域问题划分为一系列的单连通域问题来求解<sup>[11]</sup>,可有效简化本文中浅埋双线圆形隧道问题的求解难度。

基于此,以半无限平面中水平布置方式下等圆双孔洞为例,如图 1 所示。其中,洞 1 和洞 2 的半径均为  $R_0$ ,  $z_1, z_2$  分别为  $z$  平面上  $x_1O_1y_1$  和  $x_2O_2y_2$  局部坐标系下的坐标,  $H$  为洞 1 和洞 2 中心至半无限平面上边界的垂直距离,  $S$  为洞 1 和洞 2 的中心间距,同时规定压应力为正,拉应力为负。

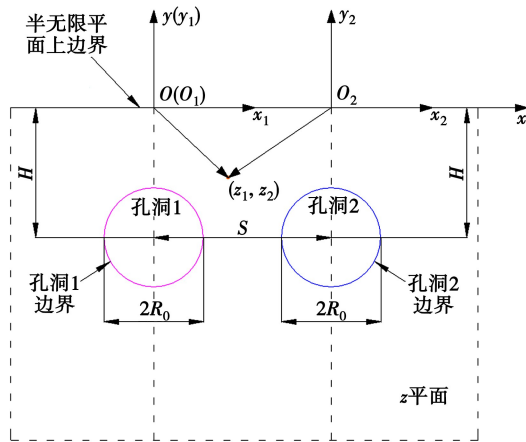


图 1 半无限平面中水平布置的双圆孔洞计算模型  
Fig. 1 Computational model of a horizontally arranged bicircular hole in the semi-infinite plane

根据文献[12]可知, Schwarz 交替法关于平面双圆形孔洞问题的求解步骤主要为:①平面条件下洞 1 开挖过程中的围岩应力分布规律可利用柯西积分法求解,此时未开挖洞 2 边界上的围岩应力分布规律亦可相应求解,由此可获得洞 2 边界上的附加面力(本文将孔洞边界作用的多余面力统一称为附加面力);②在洞 2 边界施加与第①步中附加面力大小相等、方向相反的反面力,以平衡洞 2 边界在第①步后生成的附加面力,保证洞 2 边界面力为零,与实际情况相符,此时若假设洞 1 不存在,则可将上述情形简化为单连通域问题;③求解仅在洞 2 边界反面力作用下仅存在洞 2 时的应力解,并对应获得该应力解在洞 1 边界引发的附加面力;④重复上述洞 1 和洞 2 的模拟开挖过程,可求解洞 1 边界反面力作用下仅存在洞 1 时的应力解,此时洞 1 周边满足零面力的边界条件,而洞 2 周边受洞 1 应力解的影响仍存在附加面力,因此需要多次迭代以消除附加面力的影响,直至双圆形孔洞边界均满足零面力的边界条件,由此可将上述过程中每次迭代计算所求解的应力函数相叠加,即可求得半无限平

面中双圆孔洞问题的最终解。在上述步骤条件下,本文规定除第一次洞 1 和洞 2 的迭代求解外,从第 2 次迭代计算开始,将双圆孔洞边界各施加一次反面力定义为完成一次迭代计算。由此,针对浅埋双线圆形隧道的特点,可利用 Schwarz 交替法实现本文浅埋双线圆形隧道周围塑性区分布范围的求解。

## 2 问题描述及基本假设

本文研究对象为水平布置方式下的浅埋双线圆形隧道,如图 2 所示。以  $z$  平面为物理平面,则地表边界为半无限平面的上边界,且无荷载和约束作用,不考虑隧道支护和施工荷载等作用,即左线和右线圆形隧道边界无支护和其他荷载作用,均属于自由边界,且在隧道开挖后将引起隧道边界的收敛变形。左线和右线圆形隧道半径均为  $r_0$ ,双线隧道中心埋深为  $h$ ,且隧道中心间距为  $s$ 。

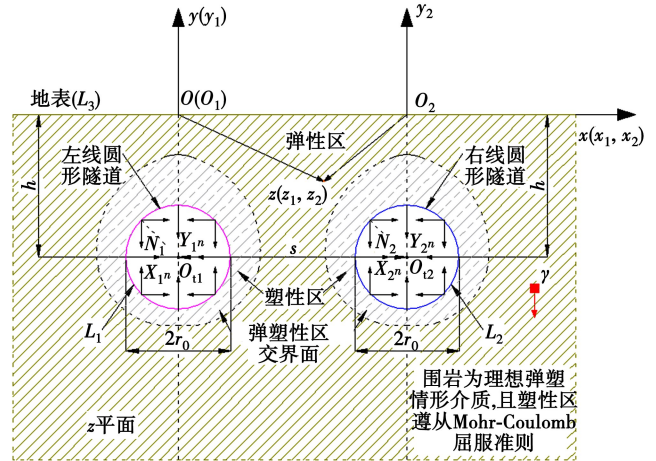


图 2 浅埋双线圆形隧道周围塑性区计算模型示意  
Fig. 2 Schematic of the computational model of the plastic zones around shallow twin circular tunnels

综上所述,将隧道围岩假设为单一地层,且为各向同性的理想弹塑性介质,围岩的泊松比、黏聚力、内摩擦角和弹性模量分别设为  $\lambda, c, \varphi, E$ 。与此同时,假设本文中浅埋双线圆形隧道周围塑性区未相互贯通且关于各自所围隧道全封闭,并将其视为半无限域中的平面应变问题进行求解。本文假设沿隧道轴线方向的正应力  $\sigma_z$  为中主应力,切向应力  $\sigma_\theta$  为最大主应力,径向应力  $\sigma_r$  为最小主应力,则根据 Hill<sup>[13]</sup>对塑性区围岩应力的研究成果可知,此时隧道边缘不存在剪切应力  $\tau_{r\theta}$ ,即塑性区的剪切应力  $\tau_{r\theta} = 0$ 。由图 2 可知,浅埋双线不等圆隧道边界和地表边界分别设为  $L_1, L_2, L_3$ ,则  $L_1, L_2$  和  $L_3$  所包含的半无限三连通域中的围岩处于弹性状态,并假设浅埋双线圆形隧道开挖引起围岩的塑性区遵从 Mohr-Coulomb 屈服准则,则由上述可假定隧道围岩破坏仅受最大和最小主应力作用,并由

此规定法向应力以压应力为正,拉应力为负。

### 3 浅埋双线圆形隧道周围塑性区分布范围解析计算方法建立

#### 3.1 映射函数确定

根据图 2 所示物理平面( $z$ 平面)中左线和右线圆形隧道间的位置关系,可知当左线圆形隧道或右线圆形隧道单独存在时,其各自所对应的局部坐标系分别为  $x_1O_1y_1$  和  $x_2O_2y_2$ ,且物理平面上与之对应的位置坐标分别为  $z_1$  和  $z_2$ ,故  $z$  平面上  $x_2O_2y_2$  局部坐标到  $x_1O_1y_1$  局部坐标的转换关系满足

$$z_1 = z_2 + s \quad (1)$$

式中: $z_1$  为半无限平面内各点在  $x_1O_1y_1$  局部坐标系下的坐标值; $z_2$  为半无限平面内各点在  $x_2O_2y_2$  局部坐标系下的坐标值; $s$  为浅埋双线圆形隧道中心间距。

考虑到浅埋双线圆形隧道作为三连通域问题直接求解难度巨大,根据上述 Schwarz 交替法基本原理,将浅埋双线圆形隧道简化为两个浅埋圆形隧道问题进行求解,则可由文献[14]确定本文所需的映射函数,如式(2)所示。

$$z = \omega(\zeta) = -ih \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} = -ia \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \quad (2)$$

式中: $z$  为浅埋圆形隧道在物理平面( $z$ 平面)上的位置坐标,且  $z = x + iy$ ;  $i$  为虚数单位,且  $i = \sqrt{-1}$ ;  $h$  为浅埋圆形隧道中心埋深; $\alpha$  为常量参数,与圆形隧道开挖半径  $r_0$  和隧道中心埋深  $h$  有关,如式(3)所示。

$$\frac{r_0}{h} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \quad (3)$$

综上所述,式(2)所示映射函数可将一个位于半无限平面( $z$ 平面)的浅埋圆形隧道边界以外区域变换为  $\zeta$  平面上内外半径分别为  $\alpha$  ( $\alpha < 1$ ) 和 1 的圆环域,如图 3 所示。

由图 3 和式(3)可得浅埋圆形隧道边界从  $z$  平面映射至  $\zeta$  平面上圆环域中的内圆周半径  $\alpha$  为

$$\alpha = \frac{h}{r_0} - \sqrt{\left(\frac{h}{r_0}\right)^2 - 1} \quad (4)$$

综上所述,按照式(2)所示的映射函数将  $z$  平面上左线或右线圆形隧道单独存在时隧道边界以外区域变换为  $\zeta$  平面上的圆环域的映射函数关系应分别满足  $z_1 = \omega_1(\zeta_1)$  和  $z_2 = \omega_2(\zeta_2)$ ,其中  $\zeta_1$  和  $\zeta_2$  分别为  $\zeta$  平面上局部坐标系  $\xi_1O'_1\eta_1$  和  $\xi_2O'_2\eta_2$  中的位置坐标,分别与  $z$  平面上局部坐标系  $x_1O_1y_1$  和  $x_2O_2y_2$  相对应,且由图 3 所示映射过程可知  $z_1 = \omega_1(\zeta_1)$  和  $z_2 = \omega_2(\zeta_2)$  相应的逆映射变换应满足  $\zeta_1 = \omega_{1-1}(z_1)$  和  $\zeta_2 = \omega_{2-1}(z_2)$ 。

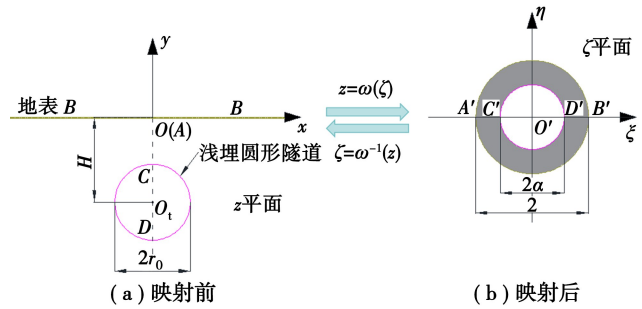


图 3 半无限平面中浅埋圆形隧道边界及其外部区域映射变换过程示意

Fig. 3 Schematic of the mapping transformation process of a shallow circular tunnel boundary and its outer region in the semi-infinite plane

#### 3.2 围岩应力函数求解

根据图 2 中浅埋双线圆形隧道围岩变形和地表受力的情况,可得左线和右线隧道分别在各自所属局部坐标系  $x_1O_1y_1$  和  $x_2O_2y_2$  中的边界条件为

$$z_1 = \bar{z}_1: \varphi(z_1) + z_1 \overline{\varphi'(z_1)} + \overline{\psi(z_1)} = 0 \quad (5)$$

$$|z_1 + ih| = r_0: 2G(u_1 + iv_1) = \kappa \varphi(z_1) - z_1 \overline{\varphi'(z_1)} - \overline{\psi(z_1)} \quad (6)$$

$$z_2 = \bar{z}_2: \varphi(z_2) + z_2 \overline{\varphi'(z_2)} + \overline{\psi(z_2)} = 0 \quad (7)$$

$$|z_2 + ih| = r_0: 2G(u_2 + iv_2) = \kappa \varphi(z_2) - z_2 \overline{\varphi'(z_2)} - \overline{\psi(z_2)} \quad (8)$$

式中:下标 1、2 分别表示左线和右线圆形隧道; $G$

为隧道围岩剪切模量,且  $G = \frac{E}{2(1+\lambda)}$ ,  $E$  为隧道围岩的弹性模量;

$\kappa = 3 - 4\lambda$ , 与泊松比  $\lambda$  有关; $u_1, v_1, u_2, v_2$  分别为  $z$  平面上浅埋双线圆形隧道中左线隧道和右线隧道围岩任一点的水平位移和竖向位移。

由于  $z_j = \bar{z}_j, |z_j + ih| = r_0$  ( $j = 1, 2$ ) 分别对应  $z$  平面中的地表边界和隧道边界,则由式(2)所示的映射函数可得其在  $\zeta$  平面上的边界条件为

$$|\zeta_1| = 1: \varphi(\zeta_1) + \frac{\omega(\zeta_1)}{\omega'(\zeta_1)} \overline{\varphi'(\zeta_1)} + \overline{\psi(\zeta_1)} = 0 \quad (9)$$

$$|\zeta_1| = \alpha: 2G(u_1 + iv_1) = \kappa \varphi(\zeta_1) - \frac{\omega(\zeta_1)}{\omega'(\zeta_1)} \overline{\varphi'(\zeta_1)} - \overline{\psi(\zeta_1)} \quad (10)$$

$$|\zeta_2| = 1: \varphi(\zeta_2) + \frac{\omega(\zeta_2)}{\omega'(\zeta_2)} \overline{\varphi'(\zeta_2)} + \overline{\psi(\zeta_2)} = 0 \quad (11)$$

$$|\zeta_2| = \alpha: 2G(u_2 + iv_2) = \kappa \varphi(\zeta_2) - \frac{\omega(\zeta_2)}{\omega'(\zeta_2)} \overline{\varphi'(\zeta_2)} - \overline{\psi(\zeta_2)} \quad (12)$$

根据文献 [15-16], 可将解析函数  $\varphi(\zeta_1)$ 、 $\psi(\zeta_1)$ 、 $\varphi(\zeta_2)$ 、 $\psi(\zeta_2)$  按 Laurent 级数展开为

$$\varphi(z_1) = \varphi(\omega(\zeta_1)) = \varphi(\zeta_1) = a_{1_0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{1_k} \zeta_1^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{1_k} \zeta_1^{-k} \quad (13)$$

$$\psi(z_1) = \psi(\omega(\zeta_1)) = \psi(\zeta_1) = c_{1_0} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{1_k} \zeta_1^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{1_k} \zeta_1^{-k} \quad (14)$$

$$\varphi(z_2) = \varphi(\omega(\zeta_2)) = \varphi(\zeta_2) = a_{2_0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2_k} \zeta_2^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2_k} \zeta_2^{-k} \quad (15)$$

$$\psi(z_2) = \psi(\omega(\zeta_2)) = \psi(\zeta_2) = c_{2_0} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2_k} \zeta_2^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{2_k} \zeta_2^{-k} \quad (16)$$

式中:  $a_{1_0}$ 、 $a_{2_0}$ 、 $c_{1_0}$ 、 $c_{2_0}$ 、 $a_{1_k}$ 、 $a_{2_k}$ 、 $b_{1_k}$ 、 $b_{2_k}$ 、 $c_{1_k}$ 、 $c_{2_k}$ 、 $d_{1_k}$ 、 $d_{2_k}$  均为未知系数, 可由浅埋双圆形隧道边界条件求得。

综上所述, 考虑到浅埋双圆形隧道在半无限平面中关于左线和右线圆形隧道中心连线的中垂线对称, 故优先对左线圆形隧道进行分析, 则由式(2)所示的映射函数可知地表边界映射为  $\zeta_1$  平面上圆环域中的单位圆周, 左线圆形隧道边界映射为圆环域中半径为  $\alpha$  的内圆周, 故  $\zeta_1 = r\sigma_1$ 。其中,  $r$  为  $\zeta_1$  平面上圆环域内任一点的半径,  $\alpha \leq r \leq 1$ ;  $\sigma_1 = e^{i\theta_1}$ 。

综上所述, 当仅存在左线圆形隧道时, 地表边界上各点可表示为  $\zeta_1 = \sigma_1$ , 代入式(9)可得

$$\varphi(\sigma_1) + \frac{\omega(\sigma_1)}{\omega'(\sigma_1)} \overline{\varphi'(\sigma_1)} + \overline{\psi(\sigma_1)} = 0 \quad (17)$$

将  $\zeta_1 = \sigma_1$  代入式(13)、(14)后, 又代入式(17), 可得

$$a_{1_0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{1_k} \sigma_1^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{1_k} \sigma_1^{-k} - \frac{(1 + \sigma_1)(\sigma_1 - 1)^2}{2(1 - \sigma_1)\sigma_1^2} \cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} k a_{1_k} \overline{\sigma_1^{1-k}} - \sum_{k=1}^{\infty} k b_{1_k} \overline{\sigma_1^{k+1}} \right) + c_{1_0} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{1_k} \sigma_1^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} d_{1_k} \overline{\sigma_1^k} = 0 \quad (18)$$

进一步化简式(18)并整理, 可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1_k} \sigma_1^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \overline{a_{1_{k+1}}} \sigma_1^{-k} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \overline{b_{1_{k-1}}} \sigma_1^k - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \overline{a_{1_{k-1}}} \sigma_1^{-k} +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{1_k} \sigma_1^{-k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \overline{b_{1_{k+1}}} \sigma_1^k + a_{1_0} + \overline{c_{1_0}} + \frac{\overline{a_{1_1}}}{2} + \frac{\overline{b_{1_1}}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_{1_k}} \sigma_1^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{d_{1_k}} \sigma_1^k = 0 \quad (19)$$

由式(19)可得  $c_{1_0}$ 、 $c_{1_k}$ 、 $d_{1_k}$  分别为

$$\begin{cases} c_{1_0} = -\overline{a_{1_0}} - \frac{a_{1_1}}{2} - \frac{b_{1_1}}{2} \\ c_{1_k} = -\overline{b_{1_k}} + \frac{(k-1)a_{1_{k-1}}}{2} - \frac{(k+1)a_{1_{k+1}}}{2} \\ d_{1_k} = -\overline{a_{1_k}} + \frac{(k-1)b_{1_{k-1}}}{2} - \frac{(k+1)b_{1_{k+1}}}{2} \end{cases} \quad (20)$$

综上所述, 由式(20)仅可知系数  $c_{1_0}$ 、 $c_{1_k}$ 、 $d_{1_k}$  与  $a_{1_0}$ 、 $a_{1_k}$ 、 $b_{1_k}$  之间的函数关系, 但系数  $a_{1_0}$ 、 $c_{1_0}$ 、 $a_{1_k}$ 、 $b_{1_k}$ 、 $c_{1_k}$ 、 $d_{1_k}$  仍是未知的, 故需要利用其他边界条件率先求解未知系数  $a_{1_0}$ 、 $a_{1_k}$  和  $b_{1_k}$ , 则由左线圆形隧道 ( $\zeta_1 = \alpha\sigma_1$ ) 收敛变形的边界条件可得

$$\kappa\varphi(\alpha\sigma_1) - \frac{\omega(\alpha\sigma_1)}{\omega'(\alpha\sigma_1)} \overline{\varphi'(\alpha\sigma_1)} - \overline{\psi(\alpha\sigma_1)} = 2G(u_1 + iv_1) = f(\alpha\sigma_1) \quad (21)$$

在式(21)等号两边同乘  $(1 - \alpha\sigma_1)$ , 可得

$$(1 - \alpha\sigma_1) \left[ \kappa\varphi(\alpha\sigma_1) - \frac{\omega(\alpha\sigma_1)}{\omega'(\alpha\sigma_1)} \overline{\varphi'(\alpha\sigma_1)} - \overline{\psi(\alpha\sigma_1)} \right] = (1 - \alpha\sigma_1)f(\alpha\sigma_1) \quad (22)$$

又因为  $(1 - \alpha\sigma_1)f(\alpha\sigma_1) = f'(\alpha\sigma_1)$ , 故可将  $(1 - \alpha\sigma_1)f(\alpha\sigma_1)$  展开成 Fourier 级数的形式, 如式(23)所示。

$$(1 - \alpha\sigma_1)f(\alpha\sigma_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{1_k} \sigma_1^k \quad (23)$$

将式(23)代入式(22)可得

$$(1 - \alpha\sigma_1) \left[ \kappa\varphi(\alpha\sigma_1) - \frac{\omega(\alpha\sigma_1)}{\omega'(\alpha\sigma_1)} \overline{\varphi'(\alpha\sigma_1)} - \overline{\psi(\alpha\sigma_1)} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{1_k} \sigma_1^k = A_{1_0} + A_{1_1} \sigma_1 + \sum_{k=2}^{\infty} A_{1_k} \sigma_1^k + \sum_{k=1}^{\infty} A_{1_{-k}} \sigma_1^{-k} \quad (24)$$

由文献 [17] 可知, 浅埋隧道边界的收敛变形模式通常包括均匀收敛、椭圆化变形、平移下沉以及地层损失和非均匀收敛变形共同作用的综合变形, 如图 4 所示。

根据 Gonzalez 等 [18] 的研究成果, 浅埋圆形隧道边界收敛变形由均匀收敛、椭圆化变形和平移下沉共同组成, 因此本文选择图 4(d) 的收敛变形模式, 则由 Wang 等 [19] 的研究成果可求得式(24)中等

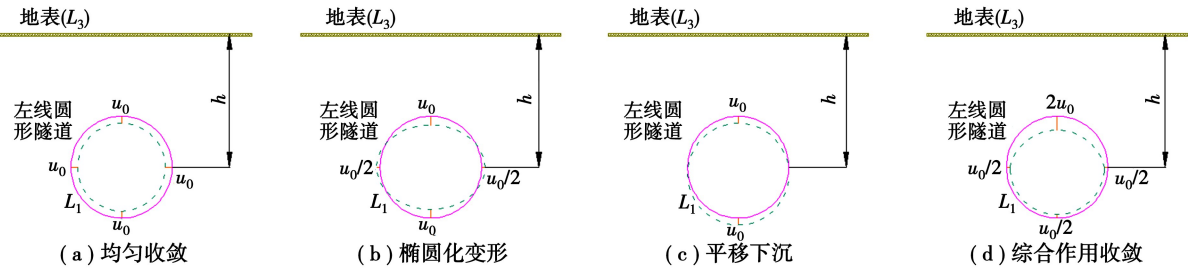


图 4 浅埋隧道边界收敛变形模式

Fig. 4 Convergent deformation pattern of shallow buried tunnel boundary

号右边的系数  $A_{1_k}$  为:

$$\begin{cases} A_{1-k} = \frac{3(\alpha^2 - 1)^2 \alpha^{k-1} u_0 Gi}{8} \\ A_{1_0} = -\frac{[3(\alpha^2 + 1) + 10\alpha] u_0 Gi}{4} \\ A_{1_1} = \frac{[3(3\alpha + 2\alpha^2 - \alpha^3 - \alpha^4) + 7] u_0 Gi}{4} \\ A_{1_k} = -\frac{3\alpha^{k-3} (\alpha^2 - 1)^2 [(k + 1)\alpha^2 + 2\alpha + 2 - k] u_0 Gi}{8} \end{cases} \quad (25)$$

式中:  $u_0$  为初始水平位移值,如式(26)所示。

$$u_0 = \frac{8r_0(1 - \sqrt{1 - V_L})}{7} \quad (26)$$

式中:  $V_L$  为地层损失率。

由式(25)可知式(24)等号右边  $\sigma_1$  幂次项前的系数为已知量,则将式(2)、(13)、(14)、(20)、(25)代入式(24),并根据等号两边相同幂次项系数相等以求解未知系数  $a_{1_0}$ 、 $a_{1_k}$  和  $b_{1_k}$ ,如式(27)所示。

$$a_{1_0} = \frac{-4(1 - \alpha^2)\overline{a_{1_1}} + 4(\kappa + \alpha^2)b_{1_1} - [3(\alpha^2 + 1) + 10\alpha]u_0 Gi}{4(\kappa + 1)} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} \overline{a_{1_1}} = & \frac{-4(\kappa + 1)a_{1_0} - [3(\alpha^2 + 1) + 10\alpha]u_0 Gi}{4(1 - \alpha^2)} + \frac{1}{[(1 - \alpha^2)^2 + (1 + \kappa\alpha^2)(\kappa + \alpha^2)](1 - \alpha^2)} \cdot \\ & \left\{ \left\{ \frac{[3(3\alpha^2 + 2\alpha^3 - \alpha^4 - \alpha^5) + 7\alpha]u_0 G}{4} + \alpha^2(\kappa + 1)\overline{a_{1_0}} \right\} (\kappa + \alpha^2)(1 - \alpha^2) + \right. \\ & \left. \left\{ \frac{[3(\alpha^2 + 1) + 10\alpha]u_0 Gi}{4} + (\kappa + 1)a_{1_0} \right\} (1 + \kappa\alpha^2)(\kappa + \alpha^2) \right\} \end{aligned} \quad (27b)$$

$$b_{1_1} = \frac{1}{(1 - \alpha^2)^2 + (1 + \kappa\alpha^2)(\kappa + \alpha^2)} \cdot \left\{ \left\{ \frac{[3(\alpha^2 + 1) + 10\alpha]u_0 Gi}{4} + (\kappa + 1)a_{1_0} \right\} (1 + \kappa\alpha^2) + \right. \\ \left. \left\{ \frac{[3(3\alpha^2 + 2\alpha^3 - \alpha^4 - \alpha^5) + 7\alpha]u_0 G}{4} + \alpha^2(\kappa + 1)\overline{a_{1_0}} \right\} (1 - \alpha^2) \right\} \quad (27c)$$

$$\begin{aligned} \overline{a_{1_{k+1}}} = & \frac{[(1 - \alpha^2)k\overline{a_{1_k}} - (1 + \kappa\alpha^{-2k})b_{1_k} + \frac{3(\alpha^2 - 1)^2 \alpha^{-1} u_0 Gi}{8}](1 - \alpha^2)(k + 1)}{(1 - \alpha^2)^2(k + 1)^2 + (\kappa\alpha^{-2k} + \alpha^2)(1 + \kappa\alpha^{2k+2})} + \\ & \frac{(\kappa\alpha^{-2k} + \alpha^2) \left[ \alpha^2(1 + \kappa\alpha^{2k})\overline{a_{1_k}} + (1 - \alpha^2)kb_{1_k} - \frac{3\alpha^{2k-1}(\alpha^2 - 1)^2 [(k + 2)\alpha^2 + 2\alpha + 1 - k] u_0 G}{8} \right]}{(1 - \alpha^2)^2(k + 1)^2 + (\kappa\alpha^{-2k} + \alpha^2)(1 + \kappa\alpha^{2k+2})} \end{aligned} \quad (27d)$$

$$b_{1_{k+1}} = \frac{(1 - \alpha^2)(k + 1) \left[ \alpha^2(1 + \kappa\alpha^{2k})\overline{a_{1_k}} + (1 - \alpha^2)kb_{1_k} - \frac{3\alpha^{2k-1}(\alpha^2 - 1)^2 [(k + 2)\alpha^2 + 2\alpha + 1 - k] u_0 G}{8} \right]}{(1 - \alpha^2)^2(k + 1)^2 + (\kappa\alpha^{-2k} + \alpha^2)(1 + \kappa\alpha^{2k+2})} - \\ \frac{\left[ (1 - \alpha^2)k\overline{a_{1_k}} - (1 + \kappa\alpha^{-2k})b_{1_k} + \frac{3(\alpha^2 - 1)^2 \alpha^{-1} u_0 Gi}{8} \right] (1 + \kappa\alpha^{2k+2})}{(1 - \alpha^2)^2(k + 1)^2 + (\kappa\alpha^{-2k} + \alpha^2)(1 + \kappa\alpha^{2k+2})} \quad (27e)$$

综上所述,将式(27)代入式(20)可分别求得  $c_{1_0}$ 、 $c_{1_k}$  和  $d_{1_k}$ ,故当仅存在左线圆形隧道,且仅开挖左线圆形隧道时的应力函数  $\varphi(\zeta_1)$ 、 $\psi(\zeta_1)$  已求得,但本文研究的是浅埋双线圆形隧道周围塑性区的分布问题,故引入 Schwarz 交替法。同时,考虑到弹性体的加载次序及几何形状改变次数与最终应力无关<sup>[20]</sup>,故通过 Schwarz 交替法可将浅埋双线圆形隧道问题简化为 2 个半径均为  $r_0$  的浅埋圆形隧道问题进行求解。为便于区分,可将上述已解得的解析函数  $\varphi(\zeta_1)$ 、 $\psi(\zeta_1)$  分别表示为  $\varphi(\zeta_1)_1$ 、 $\psi(\zeta_1)_1$ 。其中,括号内的下标表示隧道位置;括号外的下标表示迭代计算次数,即  $\varphi(\zeta_1)_1$ 、 $\psi(\zeta_1)_1$  是

左线圆形隧道开挖在第 1 次迭代计算中的解析函数。采用相同的解法,建立  $z$  平面上从  $x_2O_2y_2$  坐标系到  $\zeta_2$  平面的映射关系  $z_2 = \omega(\zeta_2)$ ,由于本文研究对象为水平布置方式下浅埋双线圆形隧道,故根据式(2)所示的映射函数可知  $z_2 = -ih \frac{1-\alpha^2 1+\zeta_2}{1+\alpha^2 1-\zeta_2} = -ia \frac{1+\zeta_2}{1-\zeta_2}$ ,按照上述相同的步骤可求得解析函数  $\varphi(\zeta_2)_1$ 、 $\psi(\zeta_2)_1$ ,但考虑到双线隧道间的相互影响,需引用 Schwarz 交替法来消减每次迭代过程中隧道边界附加面力的影响,并求解适宜精度条件下浅埋双线圆形隧道的应力函数。具体求解流程如图 5 所示。

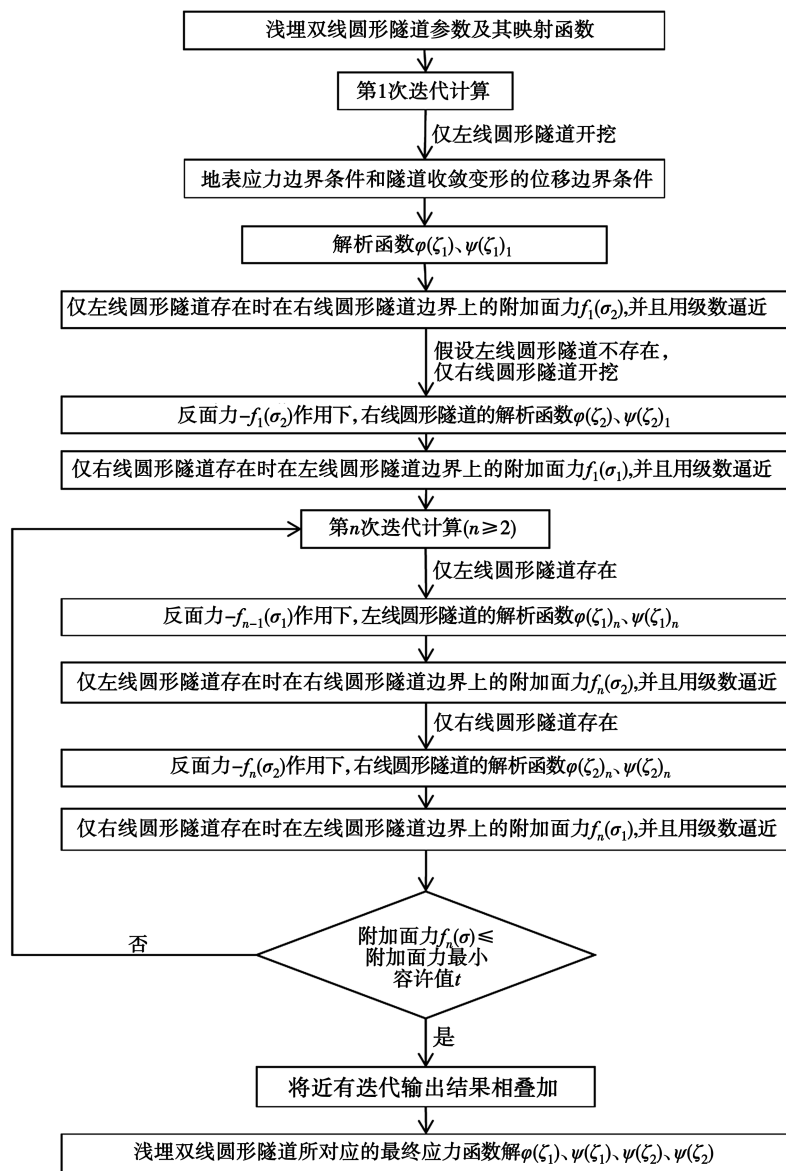


图 5 水平布置方式下浅埋双线圆形隧道围岩应力函数的 Schwarz 交替法求解流程

Fig. 5 Flowchart of the Schwarz alternating method for solving the stress function of the surrounding rock in the shallow twin circular tunnels with horizontal arrangement

由图 5 可知,左线和右线圆形隧道边界各施加 一次反面力为完成一次迭代(第 1 次迭代除外),

且由于 Schwarz 交替法的计算特点,左线和右线圆形隧道边界上的附加面力不可能同时消减为零,但在多次迭代的过程中,附加面力将迅速趋近于零,当迭代一定次数后,计算结果可满足实际工程的精度要求。基于此,根据前述已求得的半无限平面内仅存在左线圆形隧道开挖在第 1 次迭代计算中的解析函数  $\varphi(\zeta_1)_1, \psi(\zeta_1)_1$ ,可计算右线圆形隧道边界上各点的附加面力为

$$f_1(\sigma_2) = \varphi(\eta_1)_1 + \frac{\omega(\eta_1)}{\omega'(\eta_1)} \overline{\varphi'(\eta_1)_1 + \psi(\eta_1)_1} \quad (28)$$

式中: $\sigma_2$  为右线圆形隧道边界各点在  $\zeta_2$  平面上的坐标; $f_1(\sigma_2)$  为左线圆形隧道开挖引起右线圆形隧道边界上的附加面力; $\eta_1$  为  $\sigma_2$  经过映射变换  $z_2 = \omega(\sigma_2)$ 、坐标平移  $z_1 = z_2 + s$  以及逆映射变换  $\eta_1 = \omega^{-1}(z_1)$  求得的  $\zeta_1$  平面上右线圆形隧道边界点的坐标。

由于式(28)中  $f_1(\sigma_2)$  是  $\zeta_2$  平面上以  $2\pi$  为周期的矢量函数,故直接求解其复变函数表达式存在困难,可采用级数逼近的方法以实现有限项的级数来表示  $f_1(\sigma_2)$  的目的。令复数  $Q_k$  为逼近  $f_1(\sigma_2)$  的级数表达式中关于  $\sigma_2$  的各幂次项系数,如式(29)所示,当  $N$  达到一定值时就可以实现很高的逼近精度。

$$f_1(\sigma_2) = \sum_{k=-N}^N Q_k \sigma_2^k \quad (29)$$

又因为  $\sigma_2 = e^{i\theta}$ ,故  $f_1(\sigma_2)$  也可以在极坐标系下表示为关于  $\theta$  的复数函数式,如式(30)所示。

$$f_1(\sigma_2) = f_1(\theta) = \mu_1(\theta) + i\mu_2(\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (30)$$

式中: $\mu_1(\theta)$ 、 $\mu_2(\theta)$  分别为  $f_1(\theta)$  实部和虚部上的函数式,且均为区间  $[0, 2\pi]$  上的实函数。

设周期为  $2\pi$  的函数  $\mu_1(\theta)$ 、 $\mu_2(\theta)$  在区间  $(0, 2\pi)$  的等距离点  $\theta_\beta$  处的  $w$  个值是已知的,可表示为

$$\theta_\beta = \frac{2\pi\beta}{w} \quad (w > 2m, \beta = 0, 1, 2, \dots, w-1) \quad (31)$$

由此,可将  $\mu_1(\theta)$ 、 $\mu_2(\theta)$  在各点的值分别记为  $\mu_1(\theta_0)$ 、 $\mu_2(\theta_0)$ 、 $\mu_1(\theta_1)$ 、 $\mu_2(\theta_1)$ 、 $\mu_1(\theta_2)$ 、 $\mu_2(\theta_2)$ 、 $\dots$ 、 $\mu_1(\theta_w)$ 、 $\mu_2(\theta_w)$ ,且由  $\mu_1(\theta)$ 、 $\mu_2(\theta)$  的周期性可

$$f_1(\theta) = \frac{q_0}{2} + \sum_{k=1}^m (q_k \cos k\theta + p_k \sin k\theta) + i \left[ \frac{q'_0}{2} + \sum_{k=1}^m (q'_k \cos k\theta + p'_k \sin k\theta) \right] = \left( \frac{q_0}{2} + \frac{iq'_0}{2} \right) + \sum_{k=1}^m \frac{[(p_k + q'_k) + i(p'_k - q_k)] (\cos k\theta + i \sin k\theta)}{2} +$$

知, $\mu_1(\theta_0) = \mu_1(\theta_w)$ 、 $\mu_2(\theta_0) = \mu_2(\theta_w)$ 。据此,可用  $m$  次的三角多项式 ( $m$  固定) 逼近  $\mu_1(\theta)$ 、 $\mu_2(\theta)$ ,如式(32)所示。

$$\begin{cases} \delta_1(\theta) = \frac{q_0}{2} + \sum_{k=1}^m (q_k \cos k\theta + p_k \sin k\theta) \\ \delta_2(\theta) = \frac{q'_0}{2} + \sum_{k=1}^m (q'_k \cos k\theta + p'_k \sin k\theta) \end{cases} \quad (32)$$

确定每组  $2m+1$  个常数  $q_k$ 、 $p_k$  和  $q'_k$ 、 $p'_k$  时,需要满足  $w$  个不同点处  $\delta(\theta)$  与  $\mu(\theta)$  的平均平方偏差最小的条件,故可得

$$\begin{cases} \sum_{\beta=0}^{w-1} [\mu(\theta_\beta) - \delta(\theta_\beta)] = 0 \\ \sum_{\beta=0}^{w-1} [\mu(\theta_\beta) - \delta(\theta_\beta)] \cos \chi \theta_\beta = 0 \\ \sum_{\beta=0}^{w-1} [\mu(\theta_\beta) - \delta(\theta_\beta)] \sin \chi \theta_\beta = 0 \quad (\chi = 1, 2, \dots, m) \end{cases} \quad (33)$$

将  $w$  个  $\theta$  值均代入式(33),并由三角函数正交性可得常数  $q_0$ 、 $q'_0$ 、 $q_k$ 、 $q'_k$ 、 $p_k$ 、 $p'_k$  分别为

$$\begin{cases} q_0 = \frac{1}{w} \sum_{\beta=0}^{w-1} \mu_1 \left( \frac{2\pi\beta}{w} \right) \\ q'_0 = \frac{1}{w} \sum_{\beta=0}^{w-1} \mu_2 \left( \frac{2\pi\beta}{w} \right) \\ q_k = \frac{2}{w} \sum_{\beta=0}^{w-1} \mu_1 \left( \frac{2\pi\beta}{w} \right) \cos \frac{2\beta k \pi}{w} \\ q'_k = \frac{2}{w} \sum_{\beta=0}^{w-1} \mu_2 \left( \frac{2\pi\beta}{w} \right) \cos \frac{2\beta k \pi}{w} \\ p_k = \frac{2}{w} \sum_{\beta=0}^{w-1} \mu_1 \left( \frac{2\pi\beta}{w} \right) \sin \frac{2\beta k \pi}{w} \\ p'_k = \frac{2}{w} \sum_{\beta=0}^{w-1} \mu_2 \left( \frac{2\pi\beta}{w} \right) \sin \frac{2\beta k \pi}{w} \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (34)$$

故由上述复数级数  $f_1(\theta)$  实部和虚部的计算结果,可将  $\mu_1(\theta)$ 、 $\mu_2(\theta)$  按 Fourier 级数形式展开为

$$\begin{cases} \mu_1(\theta) = \frac{q_0}{2} + \sum_{k=1}^m (q_k \cos k\theta + p_k \sin k\theta) \\ \mu_2(\theta) = \frac{q'_0}{2} + \sum_{k=1}^m (q'_k \cos k\theta + p'_k \sin k\theta) \end{cases} \quad (35)$$

综上所述,将式(35)代入式(30),可得

$$\sum_{k=1}^m \frac{[(p_k - q'_k) + i(p'_k + q_k)](\cos k\theta - isink\theta)}{2} \tag{36}$$

由于式(29)中  $Q_k$  一般为复数,且  $\sigma_2 = e^{i\theta}$ , 可令

$$\begin{cases} Q_0 = \frac{q_0}{2} + \frac{iq'_0}{2} \\ Q_k = \frac{p_k + q'_k}{2} + \frac{i(p'_k - q_k)}{2} \\ Q_{-k} = \frac{p_k - q'_k}{2} + \frac{i(p'_k + q_k)}{2} \end{cases} \tag{37}$$

故可将式(36)进一步简化为

$$f_1(\theta) = Q_0 + \sum_{k=1}^m Q_k e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^m Q_{-k} e^{-ik\theta} = \sum_{k=-m}^m Q_k e^{ik\theta} = \sum_{k=-m}^m Q_k \sigma_2^k \tag{38}$$

综上所述,利用式(37)可实现  $f_1(\sigma_2)$  在右线圆形隧道边界分布的求解。为保证逼近求解的精度,应控制逼近点总数  $j$  和级数项总数  $m$  取较大值,以提升计算精度。由此,根据上述右线圆形隧道边界附加面力的计算结果可知,右线圆形隧道边界的反面力为  $-f_1(\sigma_2)$ ,且由于本文已假设浅埋双线圆形隧道边界无其他荷载作用,故可令仅存在右线圆形隧道时  $z$  平面上  $x_2O_2y_2$  局部坐标系中的解析函数为  $\varphi(z_2)_1, \psi(z_2)_1$ ,且考虑到水平布置方式下浅埋双线圆形隧道关于竖直方向的对称性,故仍可采用式(2)所示的映射函数将右线圆形隧道从  $z$  平面上  $x_2O_2y_2$  局部坐标系映射至  $\zeta_2$  平面,可得此时  $\zeta_2$  平面上的解析函数为  $\varphi(\zeta_2)_1, \psi(\zeta_2)_1$ ,则根据右线圆形隧道边界的受力情况可知其边界条件应为:

$$\varphi(\sigma_2)_1 + \frac{\omega(\sigma_2)}{\omega'(\sigma_2)} \overline{\varphi'(\sigma_2)_1} + \overline{\psi(\sigma_2)_1} = - \sum_{k=-m}^m Q_k \sigma_2^k \tag{39}$$

式中:  $\varphi(\sigma_2)_1, \psi(\sigma_2)_1$  分别为  $\zeta_2$  平面上内圆边界 ( $|\zeta_2| = \alpha$ ) 上解析函数  $\varphi(\zeta_2)_1, \psi(\zeta_2)_1$  的值,且  $\varphi(\zeta_2)_1, \psi(\zeta_2)_1$  如式(40)所示。

$$\begin{cases} \varphi(z_2)_1 = \varphi(\zeta_2)_1 = \\ (a_{2_0})_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2_k} \zeta_2^k)_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_{2_k} \zeta_2^{-k})_1 \\ \psi(z_2)_1 = \psi(\zeta_2)_1 = \\ (c_{2_0})_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2_k} \zeta_2^k)_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (d_{2_k} \zeta_2^{-k})_1 \end{cases} \tag{40}$$

综上所述,将式(40)代入式(39),可得

$$(a_{2_0})_1 + \frac{1}{2}(a_{2_1})_1 + \frac{1}{2}(b_{2_1})_1 + (c_{2_0})_1 +$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m (a_{2_k} \sigma_2^k)_1 - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^m (k-1)(b_{2_{k-1}} \sigma_2^k)_1 + \\ & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (k+1)(\overline{b_{2_{k+1}} \sigma_2^k})_1 + \\ & \sum_{k=1}^m (\overline{d_{2_k} \sigma_2^k})_1 + \sum_{k=1}^m (b_{2_k} \sigma_2^{-k})_1 + \\ & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (k+1)(\overline{a_{2_{k+1}} \sigma_2^{-k}})_1 - \\ & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (k-1)(\overline{a_{2_{k-1}} \sigma_2^{-k}})_1 + \\ & \sum_{k=1}^m (\overline{c_{2_k} \sigma_2^{-k}})_1 = - \sum_{k=-m}^m Q_k \sigma_2^k \end{aligned} \tag{41}$$

由于  $\sum_{k=-m}^m Q_k \sigma_2^k$  为已知,故由式(41)等号两边同幂次项系数相等可求解得到解析函数  $\varphi(\zeta_2)_1$  和  $\psi(\zeta_2)_1$ ,由此可将  $\varphi(\zeta_1)_1, \psi(\zeta_1)_1$  和  $\varphi(\zeta_2)_1, \psi(\zeta_2)_1$  分别叠加即为 Schwarz 交替法第 1 次迭代求解结果。虽然此时右线圆形隧道边界满足零面力的边界条件,但左线圆形隧道受右线圆形隧道边界上反面力的影响而在其边界产生附加面力,同右线圆形隧道的处理方法一致,在左线圆形隧道边界上施加大小相等方向相反的反面力,并由式(42)所示的此时左线圆形隧道的应力边界条件,可求出在该反面力作用下仅存在左线圆形隧道的解析函数  $\varphi(\zeta_1)_2, \psi(\zeta_1)_2$ 。

$$\varphi(\sigma_1)_2 + \frac{\omega(\sigma_1)}{\omega'(\sigma_1)} \overline{\varphi'(\sigma_1)_2} + \overline{\psi(\sigma_1)_2} = - \sum_{k=-m}^m C_k \sigma_1^k \tag{42}$$

式中:  $\varphi(\sigma_1)_2, \psi(\sigma_1)_2$  分别为左线圆形隧道边界映射为  $\zeta_1$  平面上内圆边界 ( $|\zeta_1| = \alpha$ ) 上第 2 次迭代的解析函数  $\varphi(\zeta_1)_2, \psi(\zeta_1)_2$  的值,且  $\varphi(\zeta_1)_2, \psi(\zeta_1)_2$  如式(43)所示;  $C_k$  为左线圆形隧道边界附加面力的逼近级数中各幂次项系数。

$$\begin{cases} \varphi(z_1)_2 = \varphi(\zeta_1)_2 = \\ (a_{1_0})_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{1_k} \zeta_1^k)_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_{1_k} \zeta_1^{-k})_2 \\ \psi(z_1)_2 = \psi(\zeta_1)_2 = \\ (c_{1_0})_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_{1_k} \zeta_1^k)_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (d_{1_k} \zeta_1^{-k})_2 \end{cases} \tag{43}$$

综上所述,按照图 5 所示迭代求解过程,迭代循环直至左线或右线圆形隧道边界的附加面力值远小于浅埋双线圆形隧道边界初始应力值时为止。由此,从第 2 次迭代计算开始,每次迭代循环计算的边界条件均通过与式(42)形式相同的隧道应力

边界条件来实现,故在每次的迭代计算过程中(第 1 次除外)均可只考虑每条线隧道边界的反面力,并根据不同的迭代次数和开挖隧道变换相应的量即可。由于反面力的合力是平衡力,故左线和右线圆形隧道在每次迭代计算中的围岩应力函数  $\varphi(\zeta_1)_k$ 、 $\psi(\zeta_1)_k$  和  $\varphi(\zeta_2)_k$ 、 $\psi(\zeta_2)_k$  均可仿照式(13)~(16)展开为 Laurent 级数的形式,但每次迭代循环中不同隧道所对应的函数变量和各幂次项系数不同。

可根据上述 Schwarz 交替法的迭代求解流程及其精度要求,经过多次迭代计算,虽无法完全消除浅埋双线圆形隧道边界的附加面力,但可通过设定控制计算精度的附加面力最小容许值(通常情况下,该值约为隧道边界初始应力值的 1/250 000),以保证计算精度达到工程要求,故可停止迭代。若将应力函数的最终解设为  $\varphi(\zeta_j)$  和  $\psi(\zeta_j)$  的形式( $j=1,2$ ),则可求解得到浅埋双线圆形隧道中左线和右线隧道在  $n$  次迭代后的解析函数,并将所有迭代结果相叠加可得

$$\begin{cases} \varphi(\zeta_1) = \sum_{k=1}^n \varphi(\zeta_1)_k, \psi(\zeta_1) = \sum_{k=1}^n \psi(\zeta_1)_k \\ \varphi(\zeta_2) = \sum_{k=1}^n \varphi(\zeta_2)_k, \psi(\zeta_2) = \sum_{k=1}^n \psi(\zeta_2)_k \end{cases} \quad (44)$$

式中: $\varphi(\zeta_1)$ 、 $\psi(\zeta_1)$ 、 $\varphi(\zeta_2)$ 、 $\psi(\zeta_2)$  分别为浅埋双线圆形隧道在满足精度要求后迭代结果相叠加的最终围岩应力函数解。

### 3.3 浅埋双线圆形隧道周围塑性区分布范围的弹塑性解

由于本文中围岩材料已假设为理想弹塑性体,则根据浅埋双线圆形隧道围岩的应力函数求解结果,在浅埋双线圆形隧道周围弹塑性区交界面上按照应力连续性条件建立平衡方程,以实现浅埋双线圆形隧道周围塑性区分布范围的求解,故由文献[20]的研究成果可知,左线和右线圆形隧道各自在  $x_1O_1y_1$  和  $x_2O_2y_2$  局部坐标系下围岩内任意一点的弹性应力组合分别为:

$$\sigma_{x_1}^e + \sigma_{y_1}^e = \sigma_{\theta_1}^e + \sigma_{\rho_1}^e = 2[\Phi(\zeta_1) + \overline{\Phi(\zeta_1)}] \quad (45a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{y_1}^e - \sigma_{x_1}^e + 2i\tau_{x_1y_1}^e &= \\ (\sigma_{\theta_1}^e - \sigma_{\rho_1}^e + 2i\tau_{\rho_1\theta_1}^e) e^{-2i\theta_1} &= \\ \frac{2\zeta_1^2 e^{-2i\theta_1}}{\rho^2 \omega'(\zeta_1)} [\omega(\zeta_1)\Phi'(\zeta_1) + \omega'(\zeta_1)\Psi(\zeta_1)] & \end{aligned} \quad (45b)$$

$$\sigma_{x_2}^e + \sigma_{y_2}^e = \sigma_{\theta_2}^e + \sigma_{\rho_2}^e = 2[\Phi(\zeta_2) + \overline{\Phi(\zeta_2)}] \quad (45c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{y_2}^e - \sigma_{x_2}^e + 2i\tau_{x_2y_2}^e &= \\ (\sigma_{\theta_2}^e - \sigma_{\rho_2}^e + 2i\tau_{\rho_2\theta_2}^e) e^{-2i\theta_2} &= \\ \frac{2\zeta_2^2 e^{-2i\theta_2}}{\rho^2 \omega'(\zeta_2)} [\omega(\zeta_2)\Phi'(\zeta_2) + \omega'(\zeta_2)\Psi(\zeta_2)] & \end{aligned} \quad (45d)$$

综上所述,由文献[8,21-22]可得浅埋双线圆形隧道围岩塑性区的应力平衡方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{\rho_j}}{\partial \rho_j} + \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial \tau_{\rho_j\theta_j}}{\partial \theta_j} + \frac{\sigma_{\rho_j} - \sigma_{\theta_j}}{\rho_j} = 0 \\ \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial \sigma_{\theta_j}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial \tau_{\rho_j\theta_j}}{\partial \rho_j} + \frac{2\tau_{\rho_j\theta_j}}{\rho_j} = 0 \\ \sqrt{(\sigma_{\rho_j} - \sigma_{\theta_j})^2 + 4\tau_{\rho_j\theta_j}^2} - (\sigma_{\rho_j} + \sigma_{\theta_j}) \sin\varphi = 2c \cos\varphi \end{cases} \quad (46)$$

式中: $\sigma_{\rho_j}$ 、 $\sigma_{\theta_j}$  和  $\tau_{\rho_j\theta_j}$  分别为浅埋双线圆形隧道围岩的径向应力、环向应力和剪切应力,且  $j=1$  表示左线圆形隧道, $j=2$  表示右线圆形隧道; $c$  为黏聚力; $\varphi$  为内摩擦角。

根据文献[8,22-24]中的方法确定浅埋双线圆形隧道围岩的塑性应力分布,且由左线和右线圆形隧道的应力边界条件  $\sigma_{\rho_1} = \sigma_{\rho_2} = 0$  和  $\tau_{\rho_1\theta_1} = \tau_{\rho_2\theta_2} = 0$ ,求解浅埋双线圆形隧道围岩的塑性应力分量,可得  $z$  平面弹塑性区交界面上的塑性应力分量组合为:

$$\begin{cases} \sigma_{x_1}^p + \sigma_{y_1}^p = \sigma_{\rho_1}^p + \sigma_{\theta_1}^p = \\ \frac{2c \cot\varphi \left(\frac{\rho_1}{r_0}\right) \frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi} - 2c \cot\varphi \\ \sigma_{y_1}^p - \sigma_{x_1}^p + 2i\tau_{x_1y_1}^p = (\sigma_{\theta_1}^p - \sigma_{\rho_1}^p + 2i\tau_{\rho_1\theta_1}^p) e^{-2i\theta_1} = \\ \frac{2c \cos\varphi \left(\frac{\rho_1}{r_0}\right) \frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi} e^{-2i\theta_1} \\ \sigma_{x_2}^p + \sigma_{y_2}^p = \sigma_{\rho_2}^p + \sigma_{\theta_2}^p = \\ \frac{2c \cot\varphi \left(\frac{\rho_2}{r_0}\right) \frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi} - 2c \cot\varphi \\ \sigma_{y_2}^p - \sigma_{x_2}^p + 2i\tau_{x_2y_2}^p = (\sigma_{\theta_2}^p - \sigma_{\rho_2}^p + 2i\tau_{\rho_2\theta_2}^p) e^{-2i\theta_2} = \\ \frac{2c \cos\varphi \left(\frac{\rho_2}{r_0}\right) \frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi} e^{-2i\theta_2} \end{cases} \quad (47)$$

根据浅埋双线圆形隧道周围弹塑性区交界面上的应力连续性条件,则由前述已求得的式(45)所示  $z$  平面上  $x_1O_1y_1$  和  $x_2O_2y_2$  局部坐标系下浅埋

双线圆形隧道围岩弹性应力分量组合,可建立左线和右线圆形隧道周围弹塑性区交界面上的应力连续性平衡方程为:

$$\begin{cases} \sigma_{x_1}^e + \sigma_{y_1}^e = \sigma_{\rho_1}^e + \sigma_{\theta_1}^e = \sigma_{\rho_1}^p + \sigma_{\theta_1}^p = \sigma_{x_1}^p + \sigma_{y_1}^p \\ \sigma_{x_2}^e + \sigma_{y_2}^e = \sigma_{\rho_2}^e + \sigma_{\theta_2}^e = \sigma_{\rho_2}^p + \sigma_{\theta_2}^p = \sigma_{x_2}^p + \sigma_{y_2}^p \end{cases} \quad (48)$$

将式(45)、(47)代入式(48),可得

$$\begin{cases} 2[\Phi(\zeta_1) + \overline{\Phi(\zeta_1)}] = 2\left[\frac{\varphi'(\zeta_1)}{\omega'(\zeta_1)} + \frac{\overline{\varphi'(\zeta_1)}}{\overline{\omega'(\zeta_1)}}\right] = \\ \frac{2c\cot\varphi}{1 - \sin\varphi} \left(\frac{\rho_1}{r_0}\right) \frac{2\sin\varphi}{1 - \sin\varphi} - 2c\cot\varphi \\ 2[\Phi(\zeta_2) + \overline{\Phi(\zeta_2)}] = 2\left[\frac{\varphi'(\zeta_2)}{\omega'(\zeta_2)} + \frac{\overline{\varphi'(\zeta_2)}}{\overline{\omega'(\zeta_2)}}\right] = \\ \frac{2c\cot\varphi}{1 - \sin\varphi} \left(\frac{\rho_2}{r_0}\right) \frac{2\sin\varphi}{1 - \sin\varphi} - 2c\cot\varphi \end{cases} \quad (49)$$

综上所述,求解式(49)所示的方程组,可得浅埋双线圆形隧道周围塑性区半径的解析表达式为

$$\rho_j = r_0 \sqrt{\frac{2\sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \left\{ 2\left[\frac{\varphi'(\zeta_j)}{\omega'(\zeta_j)} + \frac{\overline{\varphi'(\zeta_j)}}{\overline{\omega'(\zeta_j)}}\right] + 2c\cot\varphi \right\} \cdot \frac{1 - \sin\varphi}{2c\cot\varphi}} \quad (j = 1, 2) \quad (50)$$

式中: $\rho_j$ 为浅埋双线圆形隧道周围塑性区的半径,且 $j=1$ 表示左线圆形隧道, $j=2$ 表示右线圆形隧道; $r_0$ 为浅埋双线圆形隧道半径。

由式(50)可求得浅埋双线圆形隧道周围弹塑性区交界面上任一点在 $z$ 平面上 $xOy$ 全局坐标系下的位置坐标,由此即可确定水平布置方式下浅埋双线圆形隧道周围塑性区的分布范围,分别如式(51)、(52)所示。

$$\text{左线圆形隧道:} \begin{cases} x = \rho_1 \cos\theta_1 \\ y = \rho_1 \sin\theta_1 \end{cases} \quad (51)$$

$$\text{右线圆形隧道:} \begin{cases} x = \rho_2 \cos\theta_2 + s \\ y = \rho_2 \sin\theta_2 \end{cases} \quad (52)$$

式中: $\theta_j$ 为浅埋双线圆形隧道周围弹塑性区交界面上任一点与各自所围隧道中心连线与 $x$ 轴之间的夹角,且 $j=1$ 表示左线圆形隧道, $j=2$ 表示右线圆形隧道; $s$ 为浅埋双线圆形隧道中心间距。

### 3.4 解析计算方法验证

#### 3.4.1 合理性验证

根据前述问题描述及基本假设的内容,通过设置一个算例,以解析计算结果对比数值模拟结果的拟合效果以验证本文解析计算方法的合理性,则该

案例的具体参数如表 1 所示。

表 1 算例参数取值情况统计表

Table 1 Statistics on the values of the algorithm parameters

参数项	取值	参数项	取值
浅埋双线圆形隧道半径 $r_0$ /m	3	浅埋双线隧道中心间距 $s$ /m	16
隧道中心埋深 $h$ /m	8	黏聚力 $c$ /MPa	3
内摩擦角 $\phi$ /( $^\circ$ )	30	围岩弹性模量 $E$ /MPa	300
泊松比 $\nu$	0.5	地层损失率 $V_L$	0.00 025

基于此,利用 FLAC<sup>3D</sup> 有限元软件构建水平布置方式下浅埋双线圆形隧道的数值模型。其中,数值模型的长 $\times$ 高为 80 m $\times$ 50 m,沿隧道中轴线( $z$ 轴)的宽为 1 m,浅埋双线圆形隧道半径  $r_0$  为 3 m,共分为 8 个组,其单元数和网格数分别划分为 4 392 个、9 114 个。如图 6 所示,模型左、右两侧的水平位移和底部的垂直位移受到约束,且沿隧道轴线的位移是固定的,以模拟平面应变问题。其他材料参数取值见表 1。

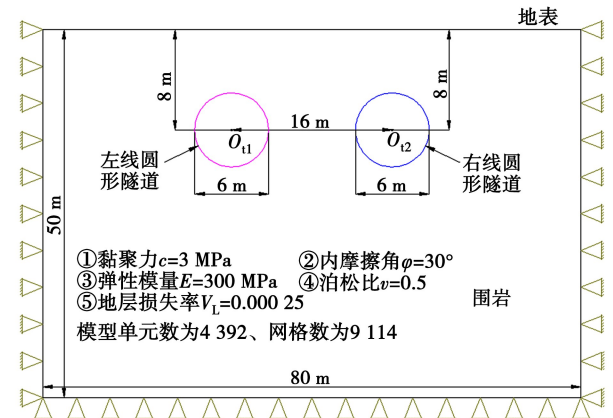


图 6 数值模型边界条件及约束示意

Fig. 6 Schematic of numerical model boundary conditions and constraints

将表 1 所示算例的浅埋双线圆形隧道周围塑性区半径的解析计算结果与数值模拟结果进行对比,分析结果如图 7 所示。

由图 7 可知,本文方法关于塑性区分布范围的解析计算结果与数值模拟结果拟合良好,满足本文所研究问题中对称性的基本条件,且理论计算与数值模拟结果曲线的变化趋势相一致,浅埋双线圆形隧道周围塑性区半径的解析计算结果与数值模拟结果之间的最大误差从左线隧道至右线隧道依次

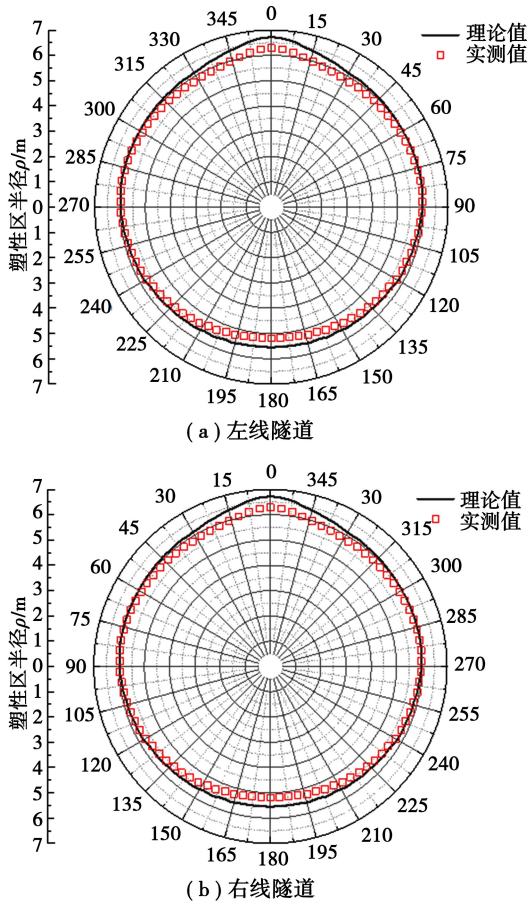


图 7 浅埋双线圆形隧道周围塑性区半径分布曲线图  
Fig. 7 Radius distribution curves of the plastic zones around shallow twin circular tunnels

为 5.63%、5.63%，平均误差从左线隧道至右线隧道依次为 1.89%、1.89%，均远小于工程经验允许的 20% 误差限值，故反映了解析计算结果与数值模拟结果之间的误差很小，有效验证了本文中浅埋双线圆形隧道周围塑性区分布范围解析计算方法的合理性，且具有较高的计算精度。

3.4.2 工程适用性验证

为进一步验证本文解析计算方法的工程适用性，依托南昌市轨道交通 1 号线北延工程南齿站—冠山站曲线双线盾构隧道工程试验段，该段线路地面高程在 38.56~40.32 m 之间，高差约 1.76 m。左右线隧道间距约为 16 m，且该试验段为双线单洞隧道，采用盾构法施工。该试验段线路近似为直线，且隧道拱顶覆土厚度约为 12.5 m，盾构隧道半径为 3 m。各层土体厚度及类型从上至下依次为 ①素填土，层厚约 2.1 m；②粉质黏土，层厚约 3.5 m；③强风化千枚岩，层厚约 34.4 m，且双线盾构隧道主要穿越地层为强风化千枚岩层，并位于地下水位线以上，故不考虑地下水渗流等因素的影响，其各层土体主要物理力学参数如表 2 所示。

表 2 各层土体物理力学参数统计表  
Table 2 Statistics of physical and mechanical parameters of each soil layer

地层	内摩擦角 $\varphi/(\circ)$	黏聚力 $c/\text{MPa}$	压缩模量 $E_s/\text{MPa}$	泊松比 $\nu$
素填土	14	1.5	55.6	0.35
粉质黏土	22	3.5	80.8	0.34
强风化千枚岩	42	26.5	350.8	0.28

综上所述，根据文献[25]中的实测方法，在施工现场采用岩层钻孔窥视仪对试验段中 DK28+295-DK28+468 里程范围内的水平布置方式下浅埋双线圆形盾构隧道围岩松动圈进行探测，选取同一断面上的双线隧道进行布孔和测试，且由于试验段里程内双线隧道均为水平布置且相互平行，故选择任一断面均可进行测试，以该试验段的中点里程所处断面为对象，则在该断面上分别围绕左线和右线隧道边界各布置 8 个探测孔，且为保证各测孔可以有效探明破坏区域并覆盖松动圈边界，将各测孔深度均设为 5 m，如图 8 所示。

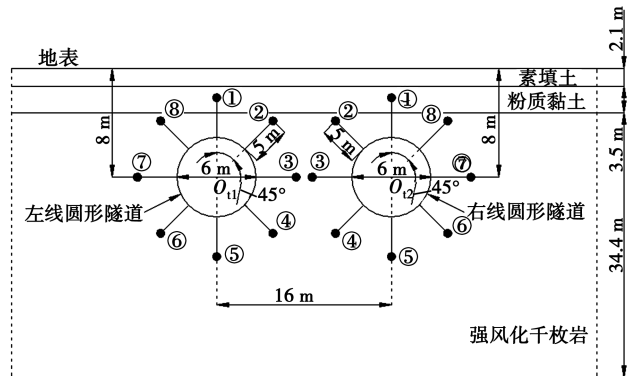


图 8 浅埋双线隧道围岩松动圈探测孔现场布置示意  
Fig. 8 Schematic of on-site arrangement of the hole for detecting the loosening circle of the surrounding rock in the shallow buried twin tunnels

综上所述，将各测孔处土体的破坏情况统计于表 3，并由此大致确定浅埋双线盾构隧道围岩松动圈的分布范围，如表 3 所示。同时，将本文所依托工程中复合地层土体的内摩擦角  $\varphi$ 、黏聚力  $c$ 、压缩模量  $E_s$  和泊松比  $\nu$  等均按照地层厚度取其加权平均值，以满足本文解析方法的假设条件，并由此利用本文解析方法计算上述所依托工程地质和施工条件下浅埋双线圆形隧道周围塑性区分布范围的理论值，将解析计算结果与现场实测结果进行对比分析，如图 9 所示。

由图 9 可知，浅埋双线圆形隧道周围所布测孔

表 3 围岩松动圈探测结果统计表

Table 3 Statistical table of the results of the detection of perimeter rock loosening circle

隧道位置	探测孔序号	土体严重破坏处与隧道中心间距/m	土体开始破坏处与隧道中心间距/m	松动圈半径/m
左线	①	1.7	4.8	5.0
	②	1.5	4.4	4.6
	③	2.6	3.8	4.1
	④	1.7	3.9	4.2
	⑤	1.0	3.9	4.1
	⑥	1.5	4.1	4.5
	⑦	2.5	4.8	5.0
	⑧	2.7	4.2	4.4
右线	①	1.6	4.7	4.9
	②	2.2	4.3	4.6
	③	2.2	4.5	4.8
	④	1.4	4.0	4.3
	⑤	1.2	4.3	4.5
	⑥	2.7	4.2	4.5
	⑦	2.6	3.9	4.1
	⑧	2.9	4.6	4.8

位置处的塑性区半径实测值与本文解析方法所得的塑性区半径理论值之间的误差较小,且左线和右线圆形隧道周围测孔位置处塑性区分布范围的理论值与实测值之间的最大误差分别为 15.99%、15.69%,分别出现在左线隧道②号测孔和右线隧道⑦号测孔,且二者之间的平均误差分别为 10.19%、9.17%,均小于工程经验允许的 20%误差阈值,且平均误差也相对较小,故说明本文解析计算方法可有效解决浅埋隧道工程中塑性区分布范围的预测问题,具有良好的工程适用性。

### 4 双线隧道中心间距 $s$ 影响规律分析

通过本文所提出的浅埋双线圆形隧道周围塑性区分布范围的解析计算方法可知,双线隧道中心间距  $s$  对其周围塑性区的分布存在影响,因此采用控制变量法研究双线隧道中心间距  $s$  对塑性区分布范围的影响规律。基于前述合理性验证算例,利用本文解析方法依次计算  $s$  为 12 m、13 m、16 m、19 m、23 m、28 m 时的塑性区分布范围,共分为 6 种工况,如表 4 所示,其对应的计算结果如图 10 所示。

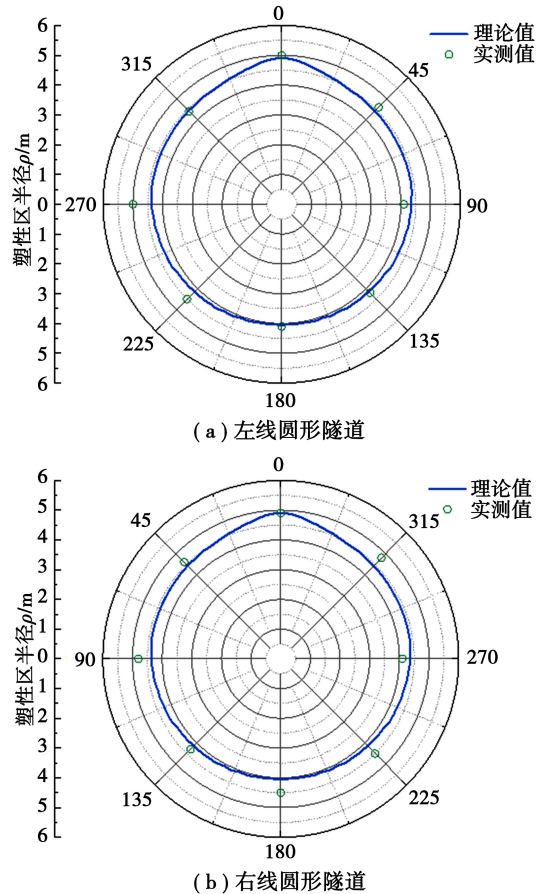


图 9 浅埋双线圆形隧道周围塑性区分布范围的理论值与实测值对比

Fig. 9 Comparison of theoretical and measured values of the distribution range of the plastic zones around shallow twin circular tunnels

表 4 不同双线隧道中心间距  $s$  的工况统计表  
Table 4 Statistics of working conditions for different center spacing  $s$  of shallow twin circular tunnels

工况	双线隧道半径 $r_0/m$	双线隧道中心埋深 $h/m$	双线隧道中心间距 $s/m$	黏聚力 $c/MPa$	内摩擦角 $\phi/(\circ)$	其他参数
①			12			
②			13			同前述合理性验证算例中的取值
③	3	8	16	3	30	
④			19			
⑤			23			
⑥			28			

由图 10 可知,双线隧道中心间距  $s$  是浅埋双线圆形隧道周围塑性区分布范围的主要影响因素,且在一定间距范围内二者呈正相关。在  $s$  从 12 m 逐渐增加至 23 m 的过程中,浅埋双线圆形隧道周围塑性区的分布范围也随之逐渐增大,而在  $s$  从

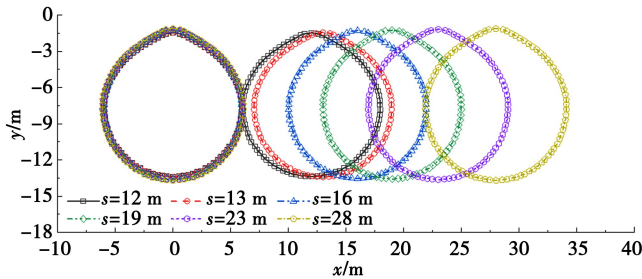


图 10 不同双线隧道中心间距  $s$  的浅埋双线圆形隧道周围塑性区分布曲线图

Fig. 10 Distribution curves of plastic zones around shallow twin circular tunnels with different center spacing  $s$  of twin tunnels

23 m 逐渐增加至 28 m 的过程中,浅埋双线圆形隧道周围塑性区的分布范围几乎不变,故双线隧道中心间距  $s$  对塑性区分布范围的有效影响范围在 23 m 以内,且塑性区分布范围在这一范围内的增大趋势相对较小,但  $s$  从 12 m 增加至 28 m 过程中的浅埋双线圆形隧道周围始终形成封闭塑性区,并呈现为向上凸起的鸭蛋形,且关于浅埋双线隧道中心连线的中垂线对称分布。当  $s < 12$  m 时,左右线圆形隧道周围塑性区将在浅埋双线圆形隧道中间区域相互贯通,此时由于塑性区贯通而可能形成较大围岩变形等不良现象,故在浅埋双线隧道设计和施工中应避免小净距隧道的情形,并控制双线隧道中心间距  $s$  在合理范围内,以保证浅埋双线隧道工程的安全性。

## 5 结论

(1)建立的浅埋双线圆形隧道周围塑性区分布范围的弹塑性解析计算方法利用地表应力边界条件和隧道收敛变形的位移边界条件共同控制 Schwarz 交替法的第一次迭代计算,既简化了 Schwarz 交替法在第一次迭代循环中的应力边界条件,也优化了 Schwarz 交替法的迭代计算精度和效率。不仅可解决一定精度条件下浅埋双线隧道周围塑性区分布范围的计算问题,也可描述隧道周围塑性区分布形状和弹塑性区交界面上的应力分布规律,具有良好的工程适用性和计算精度,为浅埋双线圆形隧道围岩应力和变形机理的规律性表征和类似隧道工程的设计计算提供了可靠的理论方法。

(2)塑性区分布范围与双线隧道中心间距  $s$  呈正相关,且塑性区始终呈关于双线隧道中心连线的中垂线对称并呈向上凸起的鸭蛋形分布,当  $s < 12$  m 时,双线隧道中间区域塑性区相互贯通,可据此初步检验塑性区分布结果的合理性,在隧道工程

的设计和施工中应注意双线隧道中心间距对围岩应力和应变的影响。

(3)本文所建立的浅埋双线圆形隧道周围塑性区分布范围的弹塑性解析计算方法中的映射函数未能直接变换半无限平面中含双圆孔的情形,而是通过 Schwarz 交替法多次迭代实现近似求解,在计算精度上有待进一步提升,且本文方法未考虑隧道支护、施工荷载等作用,在隧道施工阶段的应用范围存在一定的局限性,不适于解决塑性区相互贯通的情形,在后续研究中将进一步分析上述情形下塑性区的分布规律,并尝试推导半无限平面中双圆孔以外区域变换为三圆环的映射函数,以完善本文解析计算方法并提升其计算精度。

## 参考文献 (References)

- [1] 李倩倩,张顶立,房倩. 含空洞地层初始破坏的复变函数解析研究[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(11): 2110-2117. (Li Qianqian, Zhang Dingli, Fang Qian. Analytic solution to initial damage of cavern strata by complex function method [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, 36(11): 2110-2117. (in Chinese))
- [2] 杨公标,张成平,蔡义,等. 考虑重力影响的含空洞地层浅埋隧道围岩应力及位移解析解[J]. 中国公路学报, 2020, 33(3): 119-131. (Yang Gongbiao, Zhang Chengping, Cai Yi, et al. An analytical solution for stress and displacement of surrounding rock for a shallow tunnel with a cavity in strata considering gravity condition [J]. China Journal of Highway and Transport, 2020, 33(3): 119-131. (in Chinese))
- [3] 蔡义,张成平,闵博. 邻近上覆空洞浅埋隧道施工引起的地层变形和破坏特征[J]. 铁道学报, 2019, 41(9): 118-127. (Cai Yi, Zhang Chengping, Min Bo. Analysis of ground deformation and failure induced by shallow tunneling with cavity in the overlying strata [J]. Journal of the China Railway Society, 2019, 41(9): 118-127. (in Chinese))
- [4] 晏莉,阳军生,刘宝琛. 浅埋双孔平行隧道开挖围岩应力和位移分析[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(3): 413-419. (Yan Li, Yang Junsheng, Liu Baochen. Stress and displacement of surrounding rock with shallow twin-parallel tunnels [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, 33(3): 413-419. (in Chinese))
- [5] 张治国,张成平,奚晓广. 双线隧道不同布置方式下相互作用影响的地层位移解析[J]. 岩土工程学报, 2019, 41(2): 262-271. (Zhang Zhiguo, Zhang Chengping, Xi Xiaoguang. Closed solutions to soil displacements induced by twin-tunnel excavation under different layout patterns [J]. Chinese Journal

- of Geotechnical Engineering, 2019, 41 (2): 262-271. (in Chinese))
- [6] Zou J F, Wei A, Yang T. Elasto-plastic solution for shallow tunnel in semi-infinite space [J]. Applied Mathematical Modelling, 2018, 64 (12): 669-687.
- [7] Xiang Y Y, Feng S Q. Theoretical prediction of the potential plastic zone of shallow tunneling vicinity of pile foundation in soils [J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2013, 38 (9): 115-121.
- [8] 陈子荫. 围岩力学分析中的解析方法[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1994: 1-23. (Chen Ziyin. Analytical methods in the mechanical analysis of surrounding rocks [M]. Beijing: China Coal Industry Publishing House, 1994: 1-23. (in Chinese))
- [9] Mikhlín S G. Method of successive approximations in solutions to biharmonic equations [D]. Trudy, Seismological Institute, USSR, 1934: 56-68.
- [10] Soboloff I S. Schwarz algorithm in the theory of elasticity [D]. Reports from Academy of Science, USSR, IV, 1936: 44-56.
- [11] Sokolnikoff I S. Mathematical theory of elasticity [M]. New York: McGraw-Hill, 1956.
- [12] 张路青, 杨志法, 吕爱钟. 两平行的任意形状洞室围岩位移场解析法研究及其在位移反分析中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2000, 19(5): 584-589. (Zhang Luqing, Yang Zhifa, Lü Aizhong. Analysis study on displacement field of surrounding rocks of two parallel tunnels with arbitrary shapes and its application to back-analysis of displacement [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2000, 19(5): 584-589. (in Chinese))
- [13] Hill R. The mathematical theory of plasticity [M]. New York: Oxford University Press, 1950: 15-68.
- [14] Verruijt A. Deformations of an elastic half plane with a circular cavity [J]. International Journal of Solids and Structures, 1998, 35(21): 2795-2804.
- [15] Lu A Z, Zeng X T, Xu Z. Solution for a circular cavity in an elastic half plane under gravity and arbitrary lateral stress [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2016, 89(11): 34-42.
- [16] Lu A Z, Cai H, Wang S J. A new analytical approach for a shallow circular hydraulic tunnel[J]. Meccanica, 2019, 54(1-2): 223-238.
- [17] Park K H. Analytical solution for tunnelling-induced ground movement in clays [J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2005, 20 (3): 249-261.
- [18] Gonzalez C, Sagaseta C. Patterns of soil deformations around tunnels-application to the extension of Madrid Metro [J]. Computers and Geotechnics, 2001, 28(6): 445-468.
- [19] Wang L Z, Li L L, Lu X J. Complex variable solutions for tunneling-induced ground movement [J]. International Journal of Geomechanics, 2009, 9(2): 63-72.
- [20] 吕爱钟, 张路青. 地下隧洞力学分析的复变函数方法[M]. 北京: 科学出版社, 2007. (Lu Aizhong, Zhang Luqing. A complex function approach to mechanical analysis of underground tunnels [M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese))
- [21] Ma Y C, Lu A Z, Zeng X T, et al. Analytical solution for determining the plastic zones around twin circular tunnels excavated at great depth [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2020, 136(12): 104475.
- [22] Ma Y C, Lu A Z, Cai H, et al. Analytical solution for determining the plastic zones around two unequal circular tunnels [J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2022, 120 (1): 104267.
- [23] 赖勇, 蒲扬东, 贺任凯. 考虑弹性模量劣化的洞室围岩弹塑性分析[J]. 地下空间与工程学报, 2023, 19(4): 1097-1105. (Lai Yong, Pu Yangdong, He Renkai. Elastoplastic analysis on cave surrounding rock considering deterioration of elastic modulus [J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2023, 19(4): 1097-1105. (in Chinese))
- [24] 邹金锋, 张煜邦. 相邻深埋圆形隧道围岩塑性区解析解[J]. 地下空间与工程学报, 2024, 20(增2): 543-552. (Zou Jinfeng, Zhang Yubang. Analytical solution for the elastoplastic zone of surrounding rock in adjacent deep circular tunnels [J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2024, 20 (Supp. 2): 543-552. (in Chinese))
- [25] 董海龙. 非均匀应力场巷道围岩分区模型及塑性区解析研究[D]. 北京: 中国矿业大学(北京), 2020. (Dong Hailong. Study on zoning model and plastic zone analysis of roadway surrounding rock under non-uniform stress field [D]. Beijing: China University of Mining and Technology-Beijing, 2020. (in Chinese))