2026 年第 41 卷 第 5 期
2026,41(5):2012-2025
地球物理学进展 Progress in Geophysics
http://www.progeophys.cn
ISSN 1004-2903
CN 11-2982/P

郑闫钰婕,王若,付长民,等.2026.无单元伽辽金方法的发展、应用与展望.地球物理学进展,41(5):2012-2025,doi:10.6038/pg2026JJ0313.
ZHENG YanYuJie,WANG Ruo,FU ChangMin, *et al*. 2026. Development, applications and prospects of the element-free Galerkin method. *Progress in Geophysics* (in Chinese), 41(5):2012-2025,doi:10.6038/pg2026JJ0313.

无单元伽辽金方法的发展、应用与展望

Development, applications and prospects of the element-free Galerkin method

郑闫钰婕[1,2],王若[1,2*],付长民[1,2],胡文珊[1,2]
ZHENG YanYuJie[1,2],WANG Ruo[1,2*],FU ChangMin[1,2],HU WenShan[1,2]

1. 中国科学院地质与地球物理研究所深层油气理论与智能勘探开发重点实验室,北京 100029
2. 中国科学院大学,地球与行星科学学院,北京 101408
1. *Key Laboratory of Deep Petroleum Intelligent Exploration and Development*, *Institute of Geology and Geophysics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100029, *China*
2. *College of Earth and Planetary Sciences*, *University of Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 101408, *China*

摘 要 数值模拟(正演)作为解析复杂物理过程的核心工具,在地球物理等多领域发挥着不可替代的作用.然而传统网格类方法中的有限元法,虽凭借灵活的网格离散获得广泛应用,但其在处理不规则几何形状特别是尖角时存在网格划分困难问题,而无单元法只需布设节点,无需网格划分,从根本上解决了这个问题.众多分支中的无单元伽辽金法作为近二三十年发展起来的方法,凭借其理论严谨性及算法稳定性在无单元法中占据着重要地位,同时在数值模拟中展现出突出的优势.该方法通过移动最小二乘近似构建的形函数具备天然的高阶连续性,从而提高了模拟精度.在处理含尖锐内角、孔洞等复杂边界的模型时,无单元伽辽金法无需依赖网格重构,从根本上消除了网格畸变引发的计算偏差.本文系统梳理了无单元伽辽金法的理论框架、发展脉络、应用潜力,总结了无单元伽辽金法与有限元法和有限差分法在地球物理领域应用中的精度、效率差异,通过这一全面综述,为无单元伽辽金法的深入研究与工程实践提供综合材料,以期推动无单元伽辽金法在地球物理领域的持续发展.

关键词 无单元伽辽金法;移动最小二乘法;数值模拟;地球物理

Abstract Numerical simulation (forward modeling) serves as a core tool for analyzing complex physical processes and plays an irreplaceable role in multiple fields such as geophysics. However, traditional grid-based methods like the finite element method, despite their wide application due to flexible grid discretization, encounter difficulties in handling irregular geometries—especially those with sharp corners, the problem has been resolved by meshless methods, which only require the deployment of nodes without the need for mesh division. The element free Galerkin method, developed in the past two to three decades, holds a prominent position among meshless methods due to its rigorous theoretical foundation and algorithmic stability, and demonstrats remarkable advantages in numerical simulation. The shape functions constructed through moving least squares approximation inherently possess high-order continuity, thereby enhancing simulation accuracy. When simulating models with sharp inner angles, holes, and other complex boundaries, the element free Galerkin method does not rely on grid reconstruction, fundamentally eliminating the computational bias caused by grid distortion. This paper systematically reviews the theoretical framework, development history, application fields of the element free Galerkin method, and summarizes the differences in accuracy and computational efficiency among the Element-Free Galerkin Method, the Finite Element Method and the

收稿日期 2025-12-21; **修回日期** 2026-05-08. **投稿网址** http://www.progeophys.cn
基金项目 国家自然科学基金项目(42374170)和地球深部探测与矿产资源勘查国家科技重大专项(2024ZD1002305, 2025ZD1008500)联合资助.
第一作者简介 郑闫钰婕,女,2001 年生,硕士研究生,研究方向为电磁勘探方法正反演研究. E-mail:zhengyanyujie23@mails.ucas.ac.cn
***通讯作者** 王若,女,1971 年生,博士,主要从事电磁法正反演等相关研究工作. E-mail:wangruo@mail.iggcas.ac.cn

中图分类号　P631
文献标识码　A
doi:10.6038/pg2026JJ0313
CSTR:32085.14.pg2026JJ0313

Finite Difference Method in their applications to the field of geophysics. Through this comprehensive review, it provides comprehensive materials for deeper research and engineering practice of the element free Galerkin method, with the aim of promoting its continuous development.
Keywords　Element-free Galerkin method; Moving Least Square method; Numerical simulation; Geophysics

0　引　言

数值模拟(正演)作为解析复杂物理过程的核心工具,在地球物理等多领域发挥着不可替代的作用——不仅为理论模型验证提供量化依据,更为野外数据反演奠定关键基础,其精度直接决定着勘探解释的效率与可靠性.在追求正演精度提升的过程中,传统数值模拟方法为解决复杂模型问题奠定了基础,其中有限元法的表现尤为突出.

有限元法(Finite Element Method,FEM)采用灵活的、规则或不规则的网格离散,可以方便地仿真比较复杂的结构,数值模拟过程比较稳定,使得采用有限元法比采用有限差分法和积分方程法更有优越性(Belytschko, 1989;Aziz,1972;Bangerth and Rannacher, 2003),因此,有限元法在数值计算方法中占据主导地位,在水利水电工程(黄尧等,2022;卜现港和夏仕锋,2005;张华和文航,2025)、地球物理学(徐世浙,1994;底青云等,2004;王若等,2006;柳建新等,2014;蔡红柱等,2015;叶益信等,2016;李建慧等,2016;严家斌等,2020;陶梦丽等,2024;周军等,2026)、建筑科学与工程(韩守福等,2025;程林等,2025)、石油天然气工业(柯敢攀和黄清华,2009;罗毓明等,2025)等领域有广泛应用.但是,在处理具有不规则几何形状或边界条件的问题时,FEM 会遇到困难:即生成适合这些区域的高质量网格往往比较复杂,有时甚至难以实现.例如,对于具有尖锐内角、孔洞或非光滑边界的模型,网格划分可能会出现扭曲、变形等问题,从而影响计算精度和稳定性.此外,若要得到分辨率更高、精度更高的模拟结果,需应用更高阶的拟合函数(形函数),但高阶形函数形式复杂,文献中鲜有给出和应用,因此通过加密剖分网格的方式来提高计算精度成为常用手段.然而,精细的网格剖分,比如自适应网格剖分,需要重复多次进行网格划分和前、后处理,不仅增加了计算难度,还大大降低了计算效率.

为了解决这些问题,无单元法(也称无网格法)被提了出来.无单元法采用节点离散方式,不但无需对复杂的模型进行网格剖分,而且可给定不同阶的基函数,通过求解系数的方式构建任意阶的形函数.其核心目标在于摆脱传统 FEM 对结构化网格的依赖,从而有效克服网格畸变、重划分困难等问题,在大变形、裂纹动态扩展、材料成型及涉及复杂几何边界的问题中展现出了独特优势.因此,针对复杂的不均匀结构情况,采用无单元方法的节点离散方式,不但可以更精细地刻画模型的复杂形态,而且可以通过高阶形函数提高数值模拟精度.

无单元法起源于 20 世纪 70 年代,Lucy(1977)为解决天体建模与计算问题,提出了光滑质点流体动力学方法,首次实现了纯无单元的拉格朗日模拟,为无单元法奠定了思想基础.虽然这种方法在处理天体物理现象中的无边界星系爆炸问题取得了成功(Monaghan,1988),但由于早期无单元法缺乏严格的数学框架,难以保证收敛性和数值稳定性,因此一直没有得到更为广泛的应用,初期发展比较缓慢.后来,各种无单元方法逐渐发展起来, Belytschko 以移动最小二乘法形成形函数,发展出无单元伽辽金法(Element-Free Galerkin Method, EFGM)(Belytschko *et al.*, 1994; Dolbow and Belytschko, 1999; Lu *et al.*, 1994; Chung and Belytschko, 1998);Liu 将传统的粒子方法与小波概念结合起来提出了再生核粒子法(Liu and Chen, 1995; Liu *et al.*, 1995, 1996);Powell (1992)提出了径向基函数法,由于其具有形式简单和各向同性等优点,数学界和计算力学界对其进行了广泛研究(Micchelli, 1986; Hardy, 1971, 1990; Sun, 1993);Oñate 提出了有限点法(Oñate *et al.*, 1996);Atluri 将边界元法的思想引入无单元方法的研究中,发展了局部边界积分法(Zhu *et al.*, 1998a, b)和局部彼得罗夫伽辽金无单元法(Atluri and Zhu, 1998, 2000)等等.各种无单元方法的差异主要体现在求形函数的方式及离散求解方程的方式上.

目前已有一些文献对无单元法进行了综述:刘欣(2011)对无单元法的发展进行了比较全面详细的论述,归纳了无单元法中常用的几种散点插值技术方法,以及无单元法的几种主要实现方式的原理;

张雄和刘岩(2004)以紧支试函数加权残量法为主线,系统地论述了目前现有的各种无单元法的基本原理以及它们之间的区别与联系,建立了一些新型有效的无单元法,如最小二乘配点无单元法、加权最小二乘无单元法、伽辽金最小二乘无单元法和伽辽金配点无单元法等;刘更等(2005)给出了无单元伽辽金方法、再生核粒子方法、光滑粒子动力学方法、单元分解法及多尺度再生核粒子法等无单元法的数学模型、实现过程及数值算例,研究了无单元法与其他方法耦合的基本原理和实现过程,最后论述了无单元法在接触问题和微/纳米领域中的应用.严家斌和李俊杰(2014)围绕无网格法的近似方式及加权残量法这两个核心内容,详细阐述了无网格法的基本原理,评述了无网格法的优缺点,并对无网格法的研究进展及在地球物理学中的应用作了综述.黄尧等(2022)非常全面地概述了无单元法的发展、进展及地球物理学应用,阐述多种近似方法与加权余量法,对比差异及适用范围,例举其在地震、重磁勘探等领域的应用及困难与挑战.

从上面的论述看出,无单元法分支众多.在这些无单元方法中,EFGM 凭借其算法的稳定性成为应用最广泛的方法,在无单元法数值模拟中占据着重要位置.本文将着重论述无单元伽辽金法的原理、发展脉络、应用潜力及面临的挑战.首先系统阐述 EFGM 区别于传统网格方法的理论,包括移动最小二乘近似构建形函数、伽辽金弱形式离散、背景网格以及边界条件处理策略等关键环节,然后回顾这一方法从提出至今的关键发展历程,探讨其在理论完善、效率提升和稳定性增强等方面的重要突破,随后列举 EFGM 的应用领域,最后总结并分析了未来 EFGM 的发展前景.通过这一全面梳理,期望为该方法的深入研究与工程实践提供不可或缺的理论参照与应用指引.

1 EFGM 基本理论

要深入理解 EFGM 的发展脉络、应用潜力及面临的挑战,必须把握其核心理论基础.无单元伽辽金方法的核心理论是以移动最小二乘法建立形函数,采用伽辽金弱形式离散求解.本节从形函数的构建(其中包括基函数与权函数的选择)、伽辽金弱形式离散以及 EFGM 中背景网格、数值积分以及边界条件处理策略等关键环节简要介绍 EFGM 基本理论.

1.1 移动最小二乘法建立形函数

用移动最小二乘法(Moving Least Square, MLS)建立形函数是 EFGM 与 FEM 的根本区别,传统 FEM 依赖于预定义的单元网格来构造形函数,而 EFGM 仅依赖积分点附近一定范围内的离散节点,这些离散节点构成了局部影响域(或支持域),通过移动最小二乘法近似构造形函数,摆脱了网格的束缚.由于对于不同的积分点,所使用的节点集合不同,随着积分点位置的移动,局部支持域也会相应地移动,因此被称为“移动”.移动最小二乘法强调局部近似,它在每个积分点处构建一个局部的近似函数,通过最小二乘法构造形函数.形函数的构造过程如下:

在求解域内任意点 x 处,场函数 $u(x)$ 可表示为:

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m} p_j(x) a_j(x) \equiv \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{a}(x) , \quad (1)$$

其中,$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(x)$ 为 m 维基向量的转置,通常为多项式基,$\boldsymbol{a}(x)$ 为依赖于点 x 的 m 维未知系数向量.

假设点 x 有一个包含 n 个节点的影响域,影响域外的节点对 x 处的场值没有贡献,而影响域内的节点对 x 处场值的贡献由权函数决定,则系数 $\boldsymbol{a}(x)$ 可通过最小化点 x 的影响域内所有节点的加权残差 $J(x)$:

$$\min[J(x)] = \min \sum_{i=1}^{n} W(x - x_i)[\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(x_i)\boldsymbol{a}(x) - u_i]^2 , \quad (2)$$

获得,其中 $W(x - x_i)$ 是关于计算点 x 影响域内所包含节点 x_i 的权函数,u_i 是节点 i 处的待求函数值.

最小化 $J(x)$,即令:

$$\frac{\partial J(x)}{\partial \boldsymbol{a}} = 0 ,$$

通过移项转换后,得到 $\boldsymbol{a}(x)$ 的表达式:

$$\boldsymbol{a}(x) = \boldsymbol{A}^{-1}(x)\boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{U} , \quad (3)$$

其中,$\boldsymbol{A}(x) = \sum_{i=1}^{n} W(x - x_i)\boldsymbol{p}(x_i)\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(x_i)$,$\boldsymbol{B}(x) = [W(x - x_1)\boldsymbol{p}(x_1), W(x - x_2)\boldsymbol{p}(x_2), \cdots, W(x - x_n)\boldsymbol{p}(x_n)]$.

将式(3)代入式(1)中,这时的场近似为局域场:

$$u(x) \approx u^{\mathrm{h}}(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_j(x)[\boldsymbol{A}^{-1}(x)\boldsymbol{B}(x)]_{ij} u_i = \boldsymbol{\phi}(x)\boldsymbol{U} , \quad (4)$$

其中局部场 $u^{\mathrm{h}}(x)$ 由影响域中的节点得到,$\boldsymbol{\phi}(x)$ 就是由移动最小二乘法构造的形函数,其元素为 $\phi_i(x) = \sum_{j=1}^{m} p_j(x)[\boldsymbol{A}^{-1}(x)\boldsymbol{B}(x)]_{ij}$.

由于形函数是由局部节点通过最小二乘拟合的结果,而且权函数由计算点向外连续衰减,而非在自

身节点处突变为1、其他节点处为0,因此EFGM中的形函数不再具有Kronecker delta函数性质,这是与FEM形函数的本质区别.

(1)基函数

由(4)式知,形函数最终通过基函数的线性组合生成,因此基函数对形函数的精度与连续性有着直接影响.

基函数 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(x)$ 的选取应满足:

$$p_1(x)=1, p_i(x)\in C^k(\Omega), i=1,2,\cdots,m \quad (5)$$

其中 $C^k(\Omega)$ 表示域 Ω 内具有直到 k 阶连续导数的函数空间. 基函数的类型有多种,比如多项式基、径向基、三角函数基等,尽量选取完备基. 在传统的EFGM中,多用多项式基,其阶数决定了近似解的精度. 当采用Pascal三角确定基函数时,对于一维、二维和三维空间,多项式基可有:

一维:线性基 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(x)=[1,x],(m=2)$,

二次基 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(x)=[1,x,x^2],(m=3)$,

二维:线性基 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(x)=[1,x,y],(m=3)$,

二次基 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(x)=[1,x,y,x^2,xy,y^2],(m=6)$,

三维:线性基 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(x)=[1,x,y,z],(m=4)$,

二次基 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(x)=[1,x,y,z,x^2,xy,y^2,xz,yz,z^2],(m=10)$.

(2)权函数

由式(4)知,移动最小二乘法构建的形函数 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 的连续性由基函数 $\boldsymbol{p}(x)$ 以及矩阵 $\boldsymbol{A}(x)$ 和 $\boldsymbol{B}(x)$ 的光滑性所确定,而后者的光滑性又取决于权函数的光滑性,故权函数对形函数近似的性能起着极其重要的作用.

权函数 $W(x-x_i)$ 定义了节点 x_i 对空间中的点 x 的影响程度和范围,决定了影响域的大小以及节点贡献的衰减方式. 选取权函数需要满足的条件有:光滑性、半正定性、紧支性、归一性、单调递减性、在自身节点处取最大值、随距离增加而光滑衰减.

EFGM中使用的权函数 $W(x-x_i)$ 首先要满足以下基本原则(刘桂荣和顾元通,2007):

① 在影响域内,权函数的值大于零,即 $W(x-x_i)>0$;

② 在影响域外,权函数的值小于零,即 $W(x-x_i)<0$;

③ $W(x-x_i)$ 随着计算点 x 与节点 x_i 距离的增加而单调递减,当 $x=x_i$ 时,权重最大;当 $\|x-x_i\|=d_i$ 时,权重为零;(d_i 为影响域半径);

④ 具有正态性,$\int_\Omega W(x-x_i)\mathrm{d}\Omega=1$;

⑤ 应该足够光滑,尤其是在边界上,保证近似场函数的连续性.

权函数的选择具有一定的随意性,一般来说,只要满足上面五个条件即可,但权函数直接影响形函数的连续性、光滑性、计算精度和效率,实际应用中常常根据实际问题合理选择. 目前常见形式有指数函数、高斯函数、样条函数(如四次样条、三次样条)(Dolbow and Belytschko,1998)等.

1.2　伽辽金法

伽辽金法是一种特殊类型的加权余量法,最初由俄国工程师Boris Galerkin于1915年提出,其核心思想是将形函数作为权函数,通过加权余量法将基于边值问题的控制方程转换为等效的积分弱形式,以降低对解函数导数的阶次要求,最终将微分方程的求解转化为代数方程组的求解.

加权余量法的具体内容为在求解域 Ω 内,场变量 $u(x)$ 满足由微分算子 L 描述的控制方程 $L(u)=f$,同时在边界 Γ 上满足由边界算子 B 描述的边界条件 $B(u)=g$,为求得近似解,引入余量概念:在域 Ω 内,余量为 $R_\Omega=L(u)-f$,在边界上,余量为 $R_\Gamma=B(u)-g$. 选取适当的权函数 w(定义于域内)和 v(定义于边界),使余量在加权积分下为零,即建立加权余量方程:

$$\int_\Omega wR_\Omega\mathrm{d}\Omega+\int_\Gamma vR_\Gamma\mathrm{d}\Gamma=0, \quad (8)$$

伽辽金法将形函数 ϕ_i 作为权函数,即:

$$\int_\Omega \phi_i R_\Omega\mathrm{d}\Omega+\int_\Gamma \phi_i R_\Gamma\mathrm{d}\Gamma=0. \quad (9)$$

通过将式(9)进行分部积分,将二重积分转换为一重积分,达到降低解函数导数的阶次的目的,从而得到原问题的弱形式.

将局域场 $u^{\mathrm{h}}(x)$ 的表达式(4)代入弱形式方程. 由于形函数 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 已知(由节点分布和权函数确定),最终可以将连续的弱形式方程离散化为关于节点场值 u_i 的线性代数方程组:$\boldsymbol{Ku}=\boldsymbol{F}$,其中 $\boldsymbol{K}$ 是全局刚度矩阵及质量阵等的组合,$\boldsymbol{F}$ 是等效源向量,$\boldsymbol{K}$ 的表达式为形函数或其导数的积分.

1.3　背景网格积分

无单元法虽然避免了单元划分,但计算刚度矩阵和质量矩阵时仍需在空间域内进行数值积分. 在EFGM中,通过移动最小二乘法构建的形函数通常比较复杂且不具有如FEM法中形函数的简洁形式,其导数更为复杂,因此精确计算刚度矩阵和质量矩

阵中的积分是 EFGM 计算成本的主要来源之一. 常用的积分计算方法为背景网格积分.

背景网格积分需要先划分背景网格,即将求解区域划分为规则网格(如矩形或四边形),由于背景网格仅用于刚度矩阵和质量矩阵中的积分计算,不参与场近似,因此可以比 FEM 网格粗糙,但仍需足够精细以保证精度.

背景网格的积分通常采用高斯数值积分,为了满足积分求解的精度,往往需要较多的高斯点,但积分方案的选择需要在计算精度、效率和数值稳定性之间进行权衡. 但对于地球物理问题中的电磁场模拟,闫海涛等(2019)研究了高斯点数选取的影响,研究表明在一个背景网格中采用 2~3 个高斯点就能得到与解析解近似的结果.

1.4 本质边界条件的施加

EFGM 的优点是算法稳定且精度较高;缺点是近似函数不是插值函数,导致边界条件的处理相对困难. 由于 MLS 形函数缺乏 Kronecker delta 性质,无法像 FEM 那样直接将本质边界条件施加在边界节点参数上,这是 EFGM 理论上的一个主要挑战和特色,而边界条件的处理方式对 EFGM 的计算精度、效率和稳定性有显著影响. 在 EFGM 中,目前使用最多的方法有拉格朗日乘子法、罚函数法以及耦合有限元法等.

(1)拉格朗日乘子法(Ventura,2002)

拉格朗日乘子法将本质边界条件作为约束条件,因此不要求近似函数满足本质边界条件. 其最大的缺点是增加了总体求解矩阵的维数,并使离散方程的系数矩阵不再具有正定、带状的特点,增加了求解的计算量. 但通过该方法引入本质边界条件后使 EFGM 具有很高的精度和较好的数值稳定性,对于规模较小的问题,这种方法是适用的.

(2)罚函数法

罚函数法是应用本质边界条件常用的方法,即在弱解方程中增加一个惩罚项 α,相较于拉格朗日乘子法,该方法具有实施简单、不引入新的未知量等优点,且能保持矩阵对称正定和带状性. 但是,精度依赖于罚因子 α 的选择,罚数 α 越大,本质边界条件满足得越好,但过大易导致病态. 在电磁法中,一般将 α 选为 10^{12}.

(3)耦合有限元法(Yang *et al.*,2003;Cingoski *et al.*,2000)

在边界附近使用 FEM 单元,内部使用 EFGM,结合了两者的优势. 但由于引入了网格,部分丧失了纯粹无网格的特性.

1.1~1.4 小节描述的理论框架是 EFGM 发展的基础. 接下来,我们将回顾这一方法从提出至今的关键发展过程,探讨其在理论完善、效率提升和稳定性增强等方面的重要突破.

2 无单元伽辽金法发展历史

2.1 无单元伽辽金法的提出与发展

1977 年,英国剑桥大学 Lucy(1977)团队提出的光滑质点流体动力学方法(简称 SPH)奠定了无单元法的思想基础,后面虽然又有发展(Monaghan,1992;Dyka and Ingel,1994;Swegle *et al.*,1995;Johnson *et al.*,1996),但总体来说,早期无单元法多基于配点法或粒子近似,缺乏严格的数学框架,难以保证收敛性和数值稳定性.

1992 年,Nayroles 首次将移动最小二乘法引入到伽辽金方法中,并称之为扩散单元法(Nayroles *et al.*,1992),并用这种方法分析了泊松问题和弹性问题. 需要指出的是,Nayroles 的原始方法在数值实现上存在一个关键缺陷:没有正确地处理移动最小二乘形函数导数的影响. 这导致了其伽辽金方程离散形式的不精确性,影响了计算精度. 随后,1994 年,美国西北大学的 Belytschko 团队发表论文(Belytschko *et al.*,1994),对扩散单元法进行改进,首次建立了严格的数学基础,发展出了一种以移动最小二乘法形成形函数的新方法——无单元伽辽金法. 这些改进包括:(1)对形函数导数考虑得更全面;(2)采用高阶高斯积分进行区域积分;(3)引入拉式乘子处理本质边界条件. EFGM 正式诞生,成为第一个兼具无网格特性和严格伽辽金理论支撑的高精度数值方法,开启无单元法研究新纪元.

1998—2000 年,著名计算力学家 Atluri 及其团队将边界元法的思想引入无单元方法的研究中,发展了局部边界积分法(Zhu *et al.*,1998a,b)和局部彼得罗夫伽辽金无单元法(Atluri and Zhu,1998,2000). 它们都是基于移动最小二乘原理建立形函数,与 EFGM 不同的是,这两种方法在积分时不需要背景网格,是纯无单元方法(Atluri *et al.*,1999). 局部边界积分法引入了边界元的思想,降低了求解问题的维数,相对其他无单元方法,该方法在处理边界条件尤其是复杂边界条件方面具有很大的优势. 局域无单元伽辽金法将求解域划分为一系列相互重叠的局部子域(通常为圆形或方形),在每个节点处构建一个以该节点为中心的局部子域,在该子域上应

用伽辽金弱形式(或配点形式),由于仅涉及该子域内节点(数量远少于全局节点),因此局域无单元伽辽金法降低了刚度矩阵组装成本. 局域伽辽金无单元法可直接将本质边界条件施加在边界节点上,无需拉格朗日乘子或罚函数,最终形成的系数矩阵保持对称、正定、稀疏和带状. 理论证明在合理选择子域尺寸和积分规则下,局域伽辽金无单元法具有与全局 EFGM 相当的收敛精度.

随后,众多学者对 EFGM 理论各个细节方面的研究以及在不同领域的应用推动了 EFGM 的快速发展与完善.

2.2　形函数构建的发展

Bouillard 提出改进的插值型移动最小二乘法(Bouillard and Suleaub, 1998)在后来也得到应用(Wang *et al.*, 2012),该方法采用非奇异权函数,所构造的形函数不仅满足 Kronecker delta 性质,且在函数构建过程中减少一个待定系数,相较传统 MLS 方法提升了计算效率,为数值逼近领域提供了更高效、更易实现的解决方案. 杨源等(2020)聚焦 EFGM 在船体开孔板格弹性屈曲分析中的应用,通过对比移动最小二乘近似与移动 Kriging 插值两种形函数构造方式,发现在不同板格尺寸、开孔位置及载荷条件下,移动最小二乘法均能保持较高计算精度与良好适用性.

陈莘莘和王娟(2017a)通过构建节点值与虚拟节点值间的映射关系,对传统移动最小二乘形函数进行了创新性修正,将比例边界法和无单元伽辽金法相结合,利用虚功原理推导出反平面断裂分析的无单元伽辽金比例边界法. 该方法只需在求解域边界上进行无单元伽辽金法离散,不仅使问题降低一维,计算工作量明显降低,而且无需将边界上离散的节点连成单元,从而在环向上具有无单元伽辽金法前后处理简单、形函数高阶连续以及计算精度高的优点. 在此基础上,研究团队将改进的插值型移动最小二乘法与比例边界法相结合,提出适用于压电材料断裂分析的插值型无单元伽辽金比例边界法(陈莘莘和王娟,2017b). 该方法不仅有效突破了传统数值方法在处理压电材料复杂断裂问题时的局限性,还进一步拓展其应用范畴,成功应用于弹性力学问题的求解(陈莘莘等,2017),为相关领域的数值分析提供了新的理论工具与技术路径. 随后,众多学者对无单元伽辽金比例边界法的应用开展了研究并取得了一系列丰硕成果(李鹤,2018;王娟,2017;张国达,2017;张飞,2018),验证了该方法的精确性与有效性.

2.3　基函数的发展

在 EFGM 中,基函数的设计是近似函数构建的核心环节,直接决定着方法的求解精度、函数连续性与计算效率. 庞作会等(1999a)在对悬臂梁受均布荷载作用算例中使用了线性基,证明了 EFGM 具有求解精度高、后处理方便等优点. 张飞等(2017)利用无单元伽辽金方法求解二维稳态热传导方程,对比了线性基函数与二次基函数下 EFGM 的数值解和解析解,分析了基函数的阶数对无单元伽辽金方法精度的影响,结果表明采用线性基的精度高于采用二次基的精度,并说明用 EFGM 所得数值解和解析解的相对误差能够达到 0.001 数量级. 针对 EFGM 在形函数构造过程中矩阵易出现不可逆的情况,王振宽等(2014)深入研究了无单元法中的正交基函数,采用了带权正交基函数构造形函数,不仅有效避免了矩阵不可逆的情况,而且还具有编程实现简便、计算效率高的特点,通过经典悬臂梁问题的算例验证,改进后的带权正交无单元伽辽金法计算结果与精确解高度吻合,充分证明了该方法的可行性与准确性,为 EFGM 的优化提供了新技术.

2.4　权函数的发展

EFGM 中的权函数是定义节点影响范围、控制近似函数性质的核心工具,其作用远不止简单的"权重分配",还直接影响方法的精度、稳定性、计算效率等. 权函数的选择使用涉及两个方面的因素,权函数形式的选择和权函数中参数的确定. 一般来说,权函数的连续性和可导性越好,计算精度越高,权函数本身形式越复杂,计算效率越差. 刘素贞等(2006)对几种常见的权函数进行研究比较,得出了适合电磁场数值计算的权函数类型,并对权函数中的一个重要参数——支撑域进行了研究,给出了支撑域的选取原则及二维、三维场中影响半径的计算公式. 冯茜(2007)在 EFGM 的基础上引入了奇异权函数,通过对多个典型算例的数值解与精确解的对比,验证了奇异权函数无单元伽辽金法的可行性.

2.5　背景网格的发展

曾亿山和曾清红(2007)针对传统 EFGM 依赖背景网格积分的局限进行改进,将 Shepard 函数作为单位分解函数引入方法中,这个方案彻底摆脱了对背景网格的依赖,使其成为真正意义上的无单元方法,在数值积分过程中有效减少了网格相关误差,经算例验证,其计算精度较经典背景网格积分方案有显著提升,为无单元法的工程应用提供了更可靠

的技术路径.

2.6 边界条件的发展

在 EFGM 中,本质边界条件的合理施加是保障数值计算准确性的核心.1998 年,Marechal(1998)与日本广岛大学 Cingoski 提出强加边界条件的引入方式,并通过数值算例验证了方法有效性(Cingoski *et al.*,1998).2001 年,Ho 等人采用拉格朗日乘子法处理边界条件(Ho *et al.*,2001),通过一/二维算例证实其优势,同时指出该方法可省略变分形式中强加边界方向导数项却不引入误差,而强加法忽略此项将导致显著数值偏差.龙述尧等(2005)用 EFGM 求解几何非线性问题时,采用了罚函数法施加本质(位移)边界条件,用算例证明了其具有很好的精度.高志华等(2005)将 EFGM 应用于瞬态温度场的研究中,采用罚函数法引入了第一类边界条件,和有限元结果比较,说明了无单元法具有精度高、前后处理简单等优越性,是一种具有较大发展潜力的新数值计算方法.窦如令和张伟星(2009)研究 EFGM 在对称叠层板弯曲问题中的应用分析中,采用罚因子施加本质边界条件,通过单层方板和对称叠层板的数值算例并与其他方法的结果进行比较,表明 EFGM 求解对称叠层板弯曲问题具有收敛性好、精度高等优点,从而验证了该法的有效性.

EFGM 由于无需网格划分,为传统数值方法难以解决的工程问题提供了新思路.从上面梳理的 EFGM 的发展历程发现,随着基础理论框架的成熟,学者们通过创新算法、对比研究及改进方案,推动着 EFGM 的发展,在方法构建、技术优化的同时,也在推动 EFGM 在多领域的应用.

3 无单元伽辽金法的应用

经过多年的理论积累与算法优化,EFGM 凭借无需网格划分、所用形函数可实现高阶连续的独特优势,逐步从基础力学分析工具发展成为复杂工程问题的重要求解手段.目前,已在计算力学、建筑(戴成元等,2006;赵昭,2020;高志华等,2021)、水文(黄岩松等,2006;戴前伟等,2023)、岩土工程(庞作会等,1999a, b, c;庞作会和朱岳明,2000)、医学(胡德安和常猛猛,2011;常猛猛,2011;虞恬,2019)、计算电磁(王立鹏,2010;王洪友,2012;王洪友等,2012)以及地球物理领域中进行了研究与应用.由于应用领域较多,本文只聚集于计算力学与地球物理学领域,阐述其应用效果.

3.1 计算力学领域

EFGM 首先被应用于航空航天领域常见的薄壁板壳结构分析.Krysl 等人通过改进移动最小二乘形函数的边界处理技术,成功解决了传统有限元法在曲边板壳网格划分中的几何失真问题,在弯曲与振动特性分析中使计算精度较传统方法有较大提升(Krysl and Belytschko,1996).Nagashima(1999)和 Ouatouati 等将其推广至结构模态分析,其高阶连续的形函数有效规避了传统有限元法因网格划分导致的模态频率计算偏差,尤其在复杂曲面结构的振动特性分析中,不仅提升了低阶模态的计算精度,还能更精准捕捉高阶共振特性,为结构动力学设计提供了更可靠的数值工具.

针对弹塑性力学分析,Dolbow and Belytschko(1998)用 EFGM 求解了一维和二维线弹性静力学问题,取得了和解析解媲美的结果.Xu 首次将 EFGM 应用于弹塑性动态断裂(Xu and Saigal,1999),Lee 等针对弹塑性材料的裂纹扩展特性(Lee and Yoon,2003),提出了实现场量增强的 EFGM 分析技术,通过在形函数构造中引入塑性应变梯度项,有效模拟了金属材料在循环载荷下的裂纹尖端钝化—锐化过程.Fleming 和 Rao 的研究则聚焦于裂纹尖端场的精细化分析,通过构建扩展或增强移动最小二乘基函数,可便捷地处理任意形式的弹塑性裂纹扩展问题(Fleming *et al.*,1997;Rao and Rahman,2004).在塑性大变形和裂纹扩展分析中无需网格重划分,计算的塑性区分布比 FEM 更平滑(Kargarnovin *et al.*,2004).

在波动问题数值模拟中,通过分解 EFGM 技术,发现该方法适用于弹性波场的数值模拟,尤其在涉及自由表面的模拟场景中优势显著(Katou *et al.*,2009).在地震波场正演,利用 EFGM 对非均质介质和不规则边界的天然适应性,成功模拟了含断层、溶洞等复杂构造的地质体中地震波的折射、反射过程,相比有限元法具备更低的计算成本与更强的适应性(Fan and Jia,2013).

国内研究早期应用于计算力学领域(周维垣和寇晓东,1998;张建辉和邓安福,1999;张伟星和庞辉,2000),并在权函数改进、边界条件等关键问题进行了研究和探讨.近期,研究进一步向纵深发展,在多物理场耦合方面,EFGM 已被成功应用于求解热—力—电—磁耦合的功能梯度材料动力学响应(杨昊,2023),展现出广阔的应用前景.在弹塑性体脆性断裂的相场数值模拟中,利用其无需网格重构

的优势,成功模拟了裂纹从萌生到扩展的全过程,为研究弹塑性固体韧性断裂的自适应分析奠定了坚实的基础(裘沙沙等,2023).

3.2　地球物理领域

在地球物理领域,EFGM 在重磁电震各个方向均有应用.

李俊杰和严家斌(2018)将无单元法用于重力异常场二维正演计算,推导了重力异常二维变分问题的无单元系统矩阵表达式,模拟了圆柱二度体的重力异常场,结果表明:EFGM 较插值型无单元法有更高的计算精度,且基于两点高斯积分公式的计算效果与基于四点高斯积分公式及网格加密一倍的插值型无单元法效果相当.更重要的一点是,通过数值模拟,得出了无网格法形状参数的最优取值区间,为 EFGM 在重力场中的应用提供了技术参数.

冯德山等(2013)将 EFGM 用于求解探地雷达(GPR)正问题.该研究针对路基空洞、管线埋藏等典型浅部目标体探测场景设置模型,将该方法正演剖面图与基于线性插值的 FEM 正演剖面图进行了对比,结果表明 EFGM 用于探地雷达正演计算的正确性及有效性,并且在节点数相同的条件下,EFGM 比矩形剖分的 FEM 的精度要高,更有利于指导雷达剖面的数据解释.

麻昌英等(2023)基于前人提出的直流电阻率无单元伽辽金正演方法,将单位分解积分应用于直流电阻率 EFGM 正演,从而不再需要全局域内剖分的背景积分单元,进一步减小了对单元的依赖,实现了更灵活和高精度的 2.5 维直流电阻率无单元局部弱式法正演模拟.该方法被应用于起伏地形下复杂形态异常体的数值模拟中,通过对地形起伏区域进行节点加密,对地形以外的高斯点不做计算,明显提高了地形起伏模型的模拟精度.

地震波场模拟领域,王月英(2007)用 EFGM 进行了地震波的正演模拟,发现模拟结果的好坏取决于基函数类型、节点分布、节点编号方式、稳定条件以及边界条件等因素,对 EFGM 在地震波正演模拟中的应用具有一定的指导意义.

电磁法领域的应用多见于在大地电磁正演中:苏洲等(2012)将 EFGM 引入大地电磁二维正演模拟,针对传统有限元法在复杂地质构造(如低阻体、断裂带)中网格划分困难的问题,利用该方法无需网格重构的特性,实现了对地下非均质介质电磁响应的高效计算.通过优化权函数支撑域与电磁耦合项处理方式,其模拟结果与大地电磁测深实测数据的偏差缩小至 8% 以内,为深部矿产资源勘探中的电性结构反演提供了高精度的正演参考模型.

李俊杰(2014)将 EFGM、点插值法两种无单元全域弱式法及无单元局部彼得洛夫伽辽金用于大地电磁二维正演,验证了无单元全域弱式法适用于大地电磁正演计算,算例表明其精度最高可达 10^{-9} 数量级,最低也达 0.03;在频率小于 20 Hz 的中低频无单元法计算精度比有限元法高.后来,李俊杰等(2015)将 EFGM 用于大地电磁三维正演,推导了大地电磁三维变分问题的无单元离散系统方程,简述了三维背景网格高斯积分与边界条件的罚函数法加载技术;提出了 EFGM 求解大地电磁三维变分问题支持域尺寸的最优区间.

张龙(2017)分别用 FEM 和全局弱式无单元法计算了大地电磁的典型一维模型和二维模型,得出了 EFGM 高精度及处理复杂模型便利的优势:当频率小于 10 Hz 时,EFGM 精度高出 FEM 约 1~3 个数量级,当频率大于 10 Hz 时,EFGM 精度与 FEM 精度相当,整体上 EFGM 精度高于 FEM 精度.最后,根据冬瓜山铜矿实际情况设计了二维地质模型,并用全局弱式无单元法对其进行数值模拟计算,其计算结果对低阻矿体实际形态反应较好,进一步证明了无单元法在地球物理电磁波数值模拟中具有重要的意义.

周威帆等(2016)将 EFGM 应用到二维大地电磁正演模拟中,推导了对应无单元法的等价线性方程组,编制了对应的程序,通过一维层状模型验证了算法的正确性,通过倾斜接触面大地电磁模型的计算和分析,验证了无单元法计算复杂模型便利的特点,得出了结论:对于地下倾斜低阻异常体,TM 模式能较好地反映异常体的产状,而 TE 模式则不能反映;对于地下倾斜高阻异常体,TM、TE 模式均不能反映出其产状.这一结论为利用 EFGM 正演指导野外数据采集模式选择(如侧重 TM 模式数据)以优化对特定构造的探测效果,提供了重要的理论依据.

综上,EFGM 在过去几十年间发展迅速,展现出强大的潜力和广泛的应用前景.在实际应用中,无论是分析建筑结构的受力情况,还是解决多种物理现象交织的复杂问题,EFGM 具有不用划分网格、能灵活适应各种情况的特点,为相关问题提供了新的解题思路.大量的实际应用案例表明,EFGM 计算结果可靠,在工程计算方面发挥着重要作用.

4　EFGM 与有限元法、有限差分法的对比

无单元法是为解决有限元法(FEM)在处理不

规则几何形状时存在的网格划分难题而提出的.在数值模拟领域,与有限元法类似,有限差分法(FDM)也是同样需要网格划分的主流方法.因此,已有一些研究对无单元法与这两种方法的应用效果进行了系统对比,以评估其在计算效率、精度和适应性等方面的综合性能.这里,只给出 EFGM 与 FEM 和 FDM 的对比.

与 FDM 相比,EFGM 在计算效率方面通常慢于 FDM,然而,通过算法改进,无单元法的性能可得到显著提升.例如,Katou 等人提出的分解型无单元伽辽金法(DEFG),其最大内存占用量与 FDM 处在同一量级.将 DEFG 与四阶空间精度的有限差分法(FD4)对比,结果显示出明显的场景依赖性:在模拟无限域波动传播问题时,FD4 因耗时更短而占据优势;但在涉及自由表面的兰姆问题中,DEFG 能实现更高精度和更远距离的波形保真,其计算分辨率可达 FD4 的 5 倍以上,综合性能更优.这表明,尽管 FDM 在通用计算速度上可能更快,但优化后的无单元法在处理特定复杂问题(如自由表面模拟)时,能展现出超越传统 FDM 的精度和有效性(Katou *et al*., 2009).

与有限元法(FEM)的对比,更能凸显无单元法的核心优势.Belytschko 等人的研究表明,经过拉格朗日乘子法施加本质边界条件、高精度求解场函数的导数项和采用高阶空间积分格式三项改进后,改进的 EFGM 在收敛速度上显著优于 FEM,并能高分辨率捕捉局部陡峭梯度(Belytschko *et al*.,1994).此外,在频散效应与污染效应方面,EFGM 受其影响程度也弱于 FEM(Bouillard and Suleaub,1998).在计算资源消耗上,通过采用压缩稀疏列格式和 PARDISO 求解器,无单元法可比 FEM 具备更低的计算成本与更强的适应性(Fan and Jia,2013).这一优势在特定领域得到验证,例如在大地电磁问题模拟中,相同节点下 EFGM 在中低频段($f<20$ Hz)的计算精度高于 FEM,说明无网格法比有限元法更适合于低频段的计算(严家斌和李俊杰,2014).在应用于海洋电磁法时,无网格局部 Petrov-Galerkin 法的结果与高精度 FEM 的相对误差可小于 1%(卢杰和李予国,2017).

综上,无单元法作为对 FEM 的改进,在处理复杂几何、保证高精度和抑制数值误差方面表现突出,尽管在通用运算速度上可能不及有限差分法,但其为解决传统有限元法面临的挑战提供了有效的替代方案.

5 结论与展望

EFGM 作为一种创新的数值计算方法,在理论与应用层面均取得了显著进展.

从理论发展角度,自 20 世纪 70 年代无单元法起源,历经诸多学者不断探索,其理论框架逐步完善.移动最小二乘法构建形函数,为近似求解未知场函数提供了有效途径;基函数和权函数的研究,明确了其选取原则与对计算精度和效率的影响;伽辽金法及其改进的局部伽辽金法,实现了从微分方程到代数方程组的高效转化;本质边界条件处理方法的发展,在一定程度上解决了近似函数不具插值特性带来的难题.

在应用实践方面,EFGM 广泛渗透到多个领域.在计算力学领域,无论是结构的模态分析,还是弹塑性体脆性断裂的模拟,都展现出良好的计算性能.地球物理学领域,电磁计算、重力、探地雷达、地震和电磁法等领域的成功应用,也充分验证了该方法的普适性和有效性.

尽管 EFGM 已取得显著成果,但在其计算过程中有太多不确定因素,如影响半径、基函数、权函数的选取、边界条件的引入、数值积分的精度等,直接影响了其计算精度.EFGM 的发展趋势之一就在于对这些不确定因素进行量化分析,研究其与计算精度、计算效率、稳定性之间的关系,使其能够满足大规模复杂问题的计算需求.比如,EFGM 在背景网格上的数值积分和满阵或带状加宽的稀疏性问题是其在大规模三维问题中应用的瓶颈,需研究更高效的数值积分方案或快速算法,使其能满足大规模复杂模型的计算效率.

EFGM 有望在更多工程和科学领域展现其独特优势,其无需网格划分的特点也可能推动其在跨尺度模拟和现场快速建模中的应用,成为传统数值方法的重要补充,为科学研究和工业创新开辟新的可能性.

除此之外,EFGM 在反演问题中的应用几乎空白,这正是其无网格优势的潜在发力点,例如利用 EFGM 易于增减节点的特性,可发展自适应节点增删反演算法,初始模型采用稀疏节点,在反演迭代中根据灵敏度在关键区域(如缺陷边缘)动态加密节点,实现计算资源聚焦.

致 谢 感谢审稿专家提出的修改意见和编辑部的大力支持!

References

Atluri S N, Zhu T L. 1998. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. Computational Mechanics, 22(2): 117-127, doi: 10.1007/s004660050346.

Atluri S N, Kim H G, Cho J Y. 1999. A critical assessment of the truly Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG), and Local Boundary Integral Equation (LBIE) methods. Computational Mechanics, 24(5): 348-372, doi: 10.1007/s004660050457.

Atluri S N, Zhu T L. 2000. The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics. Computational Mechanics, 25(2-3): 169-179, doi: 10.1007/s004660050467.

Aziz A K. 1972. The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations. New York: Academic Press.

Bangerth W, Rannacher R. 2003. Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations. Basel: Birkhäuser.

Belytschko T. 1989. The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis: Thomas J. R. Hughes. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 4(3): 245-246, doi: 10.1111/j.1467-8667.1989.tb00025.x.

Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. 1994. Element-free Galerkin methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37(2): 229-256, doi: 10.1002/nme.1620370205.

Bouillard P, Suleaub S. 1998. Element-Free Galerkin solutions for Helmholtz problems: fomulation and numerical assessment of the pollution effect. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 162(1-4): 317-335, doi: 10.1016/S0045-7825(97)00350-2.

Bu X G, Xia S F. 2005. Application of 3D-FEM in the safety check of steel gate. China Rural Water and Hydropower (in Chinese), (11): 54-56.

Cai H Z, Xiong B, Zhdanov M. 2015. Three-dimensional marine controlled-source electromagnetic modelling in anisotropic medium using finite element method. Chinese Journal of Geophysics (in Chinese), 58(8): 2839-2850, doi: 10.6038/cjg20150818.

Chang M M. 2011. Applying element-free Galerkin method to the skeleton simulation of biomechanics [Master's thesis] (in Chinese). Changsha: Hunan University.

Chen S S, Tong G S, Wan Y. 2017. An interpolating element-free Galerkin scaled boundary method for the elasticity problem. SCIENTIA SINICA Physica, Mechanica & Astronomica (in Chinese), 47(3): 034601, doi: 10.1360/SSPMA2016-00362.

Chen S S, Wang J. 2017a. An element-free Galerkin scaled boundary method for anti-plane crack problem. Chinese Journal of Computational Mechanics (in Chinese), 34(1): 57-61, doi: 10.7511/jslx201701007.

Chen S S, Wang J. 2017b. Analysis of interpolating element-free Galerkin scaled boundary method for piezoelectric cracks. Journal of Mechanical Engineering (in Chinese), 53(6): 53-59, 67, doi: 10.3901/JME.2017.06.053.

Cheng L, Fei J W, Zhu L J, *et al*. 2025. Development of temporary support and finite element analysis of strength and bearing capacity. China Construction Metal Structure (in Chinese), 24(1): 7-9, doi: 10.20080/j.cnki.issn1671-3362.2025.01.003.

Chung H J, Belytschko T. 1998. An error estimate in the EFG method. Computational Mechanics, 21(2): 91-100, doi: 10.1007/s004660050286.

Cingoski V, Miyamoto N, Yamashita H. 1998. Element-free Galerkin method for electromagnetic field computations. IEEE Transactions on Magnetics, 34(5): 3236-3239, doi: 10.1109/20.717759.

Cingoski V, Miyamoto N, Yamashita H. 2000. Hybrid element-free Galerkin-finite element method for electromagnetic field computations. IEEE Transactions on Magnetics, 36(4): 1543-1547, doi: 10.1109/20.877733.

Dai C Y, Han T, Zhao W H. 2006. Analysis of the concrete beam crack based on element-free Galerkin method. Journal of Shandong Jiaotong University (in Chinese), 14(2): 22-25.

Dai Q W, Zhu Z L, Han X J, *et al*. 2023. Simulation of seepage in saturated-unsaturated earth-rock dam based on element-free Galerkin method. Journal of Water Resources & Water Engineering (in Chinese), 34(2): 171-179, doi: 10.11705/j.issn.1672-643X.2023.02.22.

Di Q Y, Martyn U, Wang M Y. 2004. 2.5 D CSAMT modeling with finite element method. Progress in Geophysics (in Chinese), 19(2): 317-324.

Dolbow J, Belytschko T. 1998. An introduction to programming the meshless Element Free Galerkin method. Archives of Computational Methods in Engineering, 5(3): 207-241, doi: 10.1007/Bf02897874.

Dolbow J, Belytschko T. 1999. Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods. Computational Mechanics, 23(3): 219-230, doi: 10.1007/s004660050403.

Dou R L, Zhang W X. 2009. Element-free Galerkin method (EFGM) for symmetrically laminated composite plate bending problems. Journal of Qingdao University of Technology (in Chinese), 30(2): 94-99.

Dyka C T, Ingel R P. 1994. Addressing tension instability in SPH methods. Washington: Naval Research Laboratory.

Fan Z B, Jia X F. 2013. Element-free method and its efficiency improvement in seismic modelling and reverse time migration. Journal of Geophysics and Engineering, 10(2): 025002, doi: 10.1088/1742-2132/10/2/025002.

Feng D S, Wang H H, Dai Q W. 2013. Forward simulation of Ground Penetrating Radar based on the element-free Galerkin method. Chinese Journal of Geophysics (in Chinese), 56(1): 298-308, doi: 10.6038/cjg20130131.

Feng Q. 2007. Study on singular weight function EFGM and ITS application [Master's thesis] (in Chinese). Xi'an: Xi'an University of Technology.

Fleming M, Chu Y A, Moran B, *et al*. 1997. Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40(8): 1483-1504, doi: 10.1002/(SICI)1097-0207(19970430)40:8<1483::AID-NME123>3.0.CO;2-6.

Gao Z H, Zeng H H, Liu Z Q, *et al*. 2005. Element-free method and its application to study of transient heat transference. Journal of Glaciology and Geocryology (in Chinese), 27(4): 557-562.

Gao Z H, Zhao Z, Hou Y J, *et al*. 2021. Analysis of fire resistance limit of joints of steel frames based on element-free Galerkin method. Industrial Construction (in Chinese), 51(10): 122-126, doi: 10.13204/j.gyjzG20051211.

Han S F, Ge X, Ma G H. 2025. Analysis and evaluation of soil displacement risk in pipe jacking construction based on the finite element method. Chemical Safety & Environment (in Chinese), 38(6): 8-10, 15.

Hardy R L. 1971. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. Journal of Geophysical Research, 76(8): 1905-1915, doi: 10.1029/JB076i008p01905.

Hardy R L. 1990. Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of discovery 1968-1988. Computers & Mathematics with Applications, 19(8-9): 163-208, doi: 10.1016/0898-1221(90)90272-L.

Ho S L, Yang S, Machado J M, *et al*. 2001. Application of a meshless method in electromagnetics. IEEE Transactions on Magnetics, 37(5): 3198-3202, doi: 10.1109/20.952576.

Hu D A, Chang M M. 2011. 3D element-free Galerkin method for solving biomechanics impacting of human femur and skull. World Sci-Tech R & D (in Chinese), 33(3): 400-402, 412, doi: 10.16507/j.issn.1006-6055.2011.03.001.

Huang Y, Liu Y, Lü Q T, *et al*. 2022. Study on meshfree methods in geophysics: application and progress. Progress in Geophysics (in Chinese), 37(5): 1946-1959, doi: 10.6038/pg2022FF0585.

Huang Y S, Zhou W Y, Hu Y J. 2006. Crack propagation tracing by using 3-D element-free Galerkin method. Journal of Hydraulic

Engineering (in Chinese), 37(1): 63-69.

Johnson G R, Stryk R A, Beissel S R. 1996. SPH for high velocity impact computations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139(1-4): 347-373, doi: 10.1016/S0045-7825(96)01089-4.

Kargarnovin M H, Toussi H E, Fariborz S J. 2004. Elasto-plastic element-free Galerkin method. Computational Mechanics, 33(3): 206-214, doi: 10.1007/s00466-003-0521-5.

Katou M, Matsuoka T, Mikada H, *et al*. 2009. Decomposed element-free Galerkin method compared with finite-difference method for elastic wave propagation. Geophysics, 74(3): H13-H25, doi: 10.1190/1.3111113.

Ke G P, Huang Q H. 2009. 3D forward and inversion problems of borehole-to-surface electrical method. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis (in Chinese), 45(2): 264-272, doi: 10.13209/j.0479-8023.2009.041.

Krysl P, Belytschko T. 1996. Analysis of thin shells by the element-free Galerkin method. International Journal of Solids and Structures, 33(20-22): 3057-3080, doi: 10.1016/0020-7683(95)00265-0.

Lee S H, Yoon Y C. 2003. An improved crack analysis technique by element-free Galerkin method with auxiliary supports. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 56(9): 1291-1314, doi: 10.1002/nme.611.

Li H. 2018. An interpolating element-free Galerkin scaled boundary method for elastodynamics [Master's thesis] (in Chinese). Nanchang: East China Jiaotong University.

Li J H, Farquharson C G, Hu X Y, *et al*. 2016. A vector finite element solver of three-dimensional modelling for a long grounded wire source based on total electric field. Chinese Journal of Geophysics (in Chinese), 59(4): 1521-1534, doi: 10.6038/cjg20160432.

Li J J. 2014. Magnetotelluric two-dimensional forward by weak-form meshfree methods [Master's thesis] (in Chinese). Changsha: Central South University.

Li J J, Yan J B, Huang X Y. 2015. Three-dimensional forward modeling of magnetotellurics using the element-free Galerkin method. Geology and Exploration (in Chinese), 51(5): 946-952, doi: 10.13712/j.cnki.dzykt.2015.05.015.

Li J J, Yan J B. 2018. Meshfree method for 2-D forward modeling of gravity anomaly. Coal Geology & Exploration (in Chinese), 46(6): 181-186, doi: 10.3969/j.issn.1001-1986.2018.06.027.

Liu G, Liu T X, Xie Q. 2005. Meshfree Methods and Their Applications (in Chinese). Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press.

Liu G R, Gu Y T. 2007. An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming (in Chinese). Ji'nan: Shandong University Press, 53-103.

Liu J X, Tang W W, Tong X Z. 2014. Finite element forward modeling of 2.5-D FCSEM based on biquadratic interpolation. Journal of Central South University (Science and Technology) (in Chinese), 45(2): 474-482.

Liu S Z, Yang Q X, Chen H Y, *et al*. 2006. Study on weight functions and the influence domain width in element-free Galerkin method. Low Voltage Apparatus (in Chinese), (8): 8-11, doi: 10.16628/j.cnki.2095-8188.2006.08.002.

Liu W K, Chen Y. 1995. Wavelet and multiple scale reproducing kernel methods. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 21(10): 901-931, doi: 10.1002/fld.1650211010.

Liu W K, Jun S, Zhang Y F. 1995. Reproducing kernel particle methods. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 20(8-9): 1081-1106, doi: 10.1002/fld.1650200824.

Liu W K, Chen Y, Chang C T, *et al*. 1996. Advances in multiple scale kernel particle methods. Computational Mechanics, 18(2): 73-111, doi: 10.1007/Bf00350529.

Liu X. 2011. Meshless Methods (in Chinese). Beijing: Science Press.

Long S Y, Hu D A, Xiong Y B. 2005. The element-free Galerkin method for the geometrically nonlinear problem. Engineering Mechanics (in Chinese), 22(3): 68-71, 57.

Lu J, Li Y G. 2017. Two-dimensional magnetotelluric modeling using the Meshfree Local Petrov-Galerkin method. Chinese Journal of Geophysics (in Chinese), 60(3): 1189-1200, doi: 10.6038/cjg20170329.

Lu Y Y, Belytschko T, Gu L. 1994. A new implementation of the element free Galerkin method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 113(3-4): 397-414, doi: 10.1016/0045-7825(94)90056-6.

Lucy L B. 1977. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. The Astronomical Journal, 82: 1013-1024, doi: 10.1086/112164.

Luo Y M, Hu Y H, Pang Y L, *et al*. 2025. FEM-based flow simulation of double-layer commingled production in gas reservoir-type gas storage. Oil & Gas Storage and Transportation (in Chinese), 44(8): 932-940.

Ma C Y, Yan L L, Yao Z A, *et al*. 2023. 2.5-D DC resistivity forward modeling based on element-free local weak form method (in Chinese). //Chinese Geophysical Society. 2023 China Joint Annual Conference of Earth Sciences. Zhuhai: Chinese Geophysical Society, 1212-1213, doi: 10.26914/c.cnkihy.2023.127113.

Marechal Y. 1998. Some meshless methods for electromagnetic field computations. IEEE Transactions on Magnetics, 34(5): 3351-3354, doi: 10.1109/20.717788.

Micchelli C A. 1986. Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions. Constructive Approximation, 2(1): 11-22, doi: 10.1007/BF01893414.

Monaghan J J. 1988. An introduction to SPH. Computer Physics Communications, 48(1): 89-96, doi: 10.1016/0010-4655(88)90026-4.

Monaghan J J. 1992. Smoothed particle hydrodynamics. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 30: 543-574, doi: 10.1146/annurev.aa.30.090192.002551.

Nagashima T. 1999. Node-by-node meshless approach and its applications to structural analyses. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46(3): 341-385, doi: 10.1002/(Sici)1097-0207(19990930)46:3<341::Aid-Nme678>3.0.Co;2-T.

Nayroles B, Touzot G, Villon P. 1992. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. Computational Mechanics, 10(5): 307-318, doi: 10.1007/BF00364252.

Oñate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O C, *et al*. 1996. A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39(22): 3839-3866, doi: 10.1002/(Sici)1097-0207(19961130)39:22<3839::Aid-Nme27>3.0.Co;2-R.

Pang Z H, Ge X R, Zheng H, *et al*. 1999a. A new numerical method—element free Galerkin method (EFGM). Chinese Journal of Computational Mechanics (in Chinese), 16(3): 320-329.

Pang Z H, Ge X R, Wang S L. 1999b. Application of element free Galerkin method (EFGM) to the slope excavation. Rock and Soil Mechanics (in Chinese), 20(1): 61-64, doi: 10.16285/j.rsm.1999.01.012.

Pang Z H, Ge X R, Wang S L, *et al*. 1999c. Two extensions to element free Galerkin method (EFGM). Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering (in Chinese), 18(5): 581-584.

Pang Z H, Zhu Y M. 2000. Application of element free Galerkin method (EFGM) to contact problems. Journal of Hohai University (in Chinese), 28(4): 54-58.

Powell M J D. 1992. The theory of radial basis function approximation in 1990. //Light W ed. Advances in Numerical Analysis: Wavelets, Subdivision Algorithms, and Radial Basis Functions. Oxford: Oxford University Press, 105-210, doi: 10.1093/oso/9780198534396.003.0003.

Qiu S S, Duan Q L, Shao Y L, *et al*. 2023. Consistent element-free Galerkin method for phase-field model of brittle fracture in elasto-plastic solids. Chinese Journal of Computational Mechanics (in Chinese), 40(1): 60-65, doi: 10.7511/jslx20200101001.

Rao B N, Rahman S. 2004. An enriched meshless method for non-linear fracture mechanics. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 59(2): 197-223, doi: 10.1002/nme.868.

Su Z, Hu W B, Zhu Y. 2012. Meshfree method used in two-dimensional magnetotelluric forwarding. Journal of Oil and Gas Technology (in

Chinese), 34(5): 87-90.
Sun X P. 1993. Conditionally positive definite functions and their application to multivariate interpolations. Journal of Approximation Theory, 74(2): 159-180, doi: 10.1006/jath.1993.1059.
Swegle J W, Hicks D L, Attaway S W. 1995. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis. Journal of Computational Physics, 116(1): 123-134, doi: 10.1006/jcph.1995.1010.
Tao M L, Yin C C, Zhang B, *et al*. 2024. Research on 3D forward modeling of AEM in frequency domain based on multiscale finite element method. Chinese Journal of Geophysics (in Chinese), 67(4): 1656-1668, doi: 10.6038/cjg2023Q0725.
Ventura G. 2002. An augmented Lagrangian approach to essential boundary conditions in meshless methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 53(4): 825-842, doi: 10.1002/nme.314.
Wang H Y, Yang G Y, Shao K R. 2012. Computations for electromagnetic field of synchronous generators based on the element-free Galerkin method. Proceedings of the CSEE (in Chinese), 32(15): 148-154, doi: 10.13334/j.0258-8013.pcsee.2012.15.020.
Wang H Y. 2012. Computation for electromagnetic field of synchronous generator by element-free Galerkin method [Master's thesis] (in Chinese). Wuhan: Huazhong University of Science and Technology.
Wang J. 2017. An interpolating element-free Galerkin scaled boundary method for elastic and piezoelectric cracks [Master's thesis] (in Chinese). Nanchang: East China Jiaotong University.
Wang J F, Sun F X, Cheng Y M. 2012. An improved interpolating element-free Galerkin method with a nonsingular weight function for two-dimensional potential problems. Chinese Physics B, 21(9): 090204, doi: 10.1088/1674-1056/21/9/090204.
Wang L P. 2010. The study on element-free method and its application on computational electromagnetics [Ph. D. thesis] (in Chinese). Shenyang: Shenyang University of Technology.
Wang R, Wang M Y, Di Q Y. 2006. Electromagnetic modeling due to line source in frequency domain using finite element method. Chinese Journal of Geophysics (in Chinese), 49(6): 1858-1866.
Wang Y Y. 2007. Study of element-free Galerkin method in the seismic forward modeling. Progress in Geophysics (in Chinese), 22(5): 1539-1544.
Wang Z K, Li H R, Li H K. 2014. Research on the improved element-free Galerkin method and its applications. Information & Communications (in Chinese), 27(9): 13-15.
Xu S Z. 1994. FEM in Geophysics (in Chinese). Beijing: Science Press.
Xu Y, Saigal S. 1999. An Element Free Galerkin analysis of steady dynamic growth of a mode I crack in elastic-plastic materials. International Journal of Solids and Structures, 36(7): 1045-1079, doi: 10.1016/S0020-7683(97)00337-5.
Yan H T, Zhang L, Zhang J F, *et al*. 2019. Application of global weak-form mesh-free methods in two-dimensional magnetotelluric forward. Progress in Geophysics (in Chinese), 34(2): 658-667, doi: 10.6038/pg2019BB0482.
Yan J B, Li J J. 2014. Magnetotelluric forward calculation by meshless method. Journal of Central South University (Science and Technology) (in Chinese), 45(10): 3513-3520.
Yan J B, Hu T, Lin X, *et al*. 2020. Three-dimensional high-frequency electromagnetic tipper response and induction vectors based on the electric field vector finite element. Geology and Exploration (in Chinese), 56(1): 123-136.
Yang H. 2023. Research on the mechanical-electric-magnetic inhomogeneous element-free Galerkin method for non-uniform magneto-electro-elastic materials under thermal stress [Master's thesis] (in Chinese). Changchun: Jilin University, doi: 10.27162/d.cnki.gjlin.2023.002957.
Yang S Y, Ni G Z, Cardoso J R, *et al*. 2003. A combined wavelet-element free Galerkin method for numerical calculations of electromagnetic fields. IEEE Transactions on Magnetics, 39(3): 1413-1416, doi: 10.1109/Tmag.2003.810370.
Yang Y, Mo Z H, Sun Q R, *et al*. 2020. Application of element-free Galerkin method on elastic buckling analysis of hull perforated panel. Chinese Journal of Applied Mechanics (in Chinese), 37(3): 1367-1374, doi: 10.11776/cjam.37.03.B149.
Ye Y X, Li Y G, Liu Y, *et al*. 2016. 3D finite element modeling of marine controlled-source electromagnetic fields using locally refined unstructured meshes. Chinese Journal of Geophysics (in Chinese), 59(12): 4747-4758, doi: 10.6038/cjg20161233.
Yu T. 2019. Soft tissue deformation simulation based on the element-free Galerkin method [Master's thesis] (in Chinese). Beijing: Beijing Jiaotong University, doi: 10.26944/d.cnki.gbfju.2019.000557.
Zeng Y S, Zeng Q H. 2007. An improved element free Galerkin method. Chinese Journal of Computational Physics (in Chinese), 24(1): 35-41, doi: 10.19596/j.cnki.1001-246x.2007.01.006.
Zhang F, Zhang G D, Ren H P. 2017. Influence of the order of basis functions on the precision of element-free Galerkin methods. Journal of Southwest Minzu University (Natural Science Edition) (in Chinese), 43(2): 177-185, doi: 10.11920/xnmdzk.2017.02.012.
Zhang F. 2018. Comparative study of EFG method and IEFG method [Master's thesis] (in Chinese). Taiyuan: Taiyuan University of Science and Technology.
Zhang G D. 2017. Error analysis of interpolating element-free Galerkin (IEFG) method in solving transient heat conduction problems [Master's thesis] (in Chinese). Taiyuan: Taiyuan University of Science and Technology.
Zhang H, Wen H. 2025. Seepage analysis of reservoir dams based on the finite element method. Shaanxi Water Resources (in Chinese), (5): 148-151, doi: 10.16747/j.cnki.cn61-1109/tv.2025.05.051.
Zhang J H, Deng A F. 1999. The application of element-free method to the computation of raft foundation. Chinese Journal of Geotechnical Engineering (in Chinese), 21(6): 691-695.
Zhang L. 2017. Application of element-free Galerkin method in two-dimensional magnetotelluric forward [Master's thesis] (in Chinese). Xi'an: Chang'an University.
Zhang W X, Pang H. 2000. Computation of RC raft plates in the element-free method. Chinese Journal of Computational Mechanics (in Chinese), 17(3): 326-331.
Zhang X, Liu Y. 2004. Meshless Methods (in Chinese). Beijing: Tsinghua University Press.
Zhao Z. 2020. Application of fire resistance limit of steel frame joint under fire condition by the improved element-free Galerkin method [Master's thesis] (in Chinese). Xi'an: Chang'an University, doi: 10.26976/d.cnki.gchau.2020.001787.
Zhou J, Ruan S, He K, *et al*. 2026. Three-dimensional finite element forward modeling of transient electromagnetic response for grounded-wire source. Progress in Geophysics (in Chinese), 41(1): 174-181, doi: 10.6038/pg2026JJ0054.
Zhou W F, Yan D, Yao J M, *et al*. 2016. Element-free method forward modeling of magnetotelluric sounding of complex models. Jilin Geology (in Chinese), 35(2): 79-83.
Zhou W Y, Kou X D. 1998. Element-free method and its application in geotechnique engineering. Chinese Journal of Geotechnical Engineering (in Chinese), 20(1): 5-9.
Zhu T L, Zhang J, Atluri S N. 1998a. A meshless local boundary integral equation (LBIE) method for solving nonlinear problems. Computational Mechanics, 22(2): 174-186, doi: 10.1007/s004660050351.
Zhu T L, Zhang J D, Atluri S N. 1998b. A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach. Computational Mechanics, 21(3): 223-235, doi: 10.1007/s004660050297.

附中文参考文献

卜现港, 夏仕锋. 2005. 三维有限元法在钢闸门安全检测中的应用.

中国农村水利水电,(11):54-56.
蔡红柱,熊彬,Zhdanov M. 2015. 电导率各向异性的海洋电磁三维有限单元法正演. 地球物理学报,58(8):2839-2850,doi:10.6038/cjg20150818.
常猛猛. 2011. 基于无单元伽辽金法的人体骨骼生物力学仿真研究[硕士论文]. 长沙:湖南大学.
陈莘莘,童谷生,万云. 2017. 弹性力学问题的插值型无单元伽辽金比例边界法. 中国科学:物理学 力学 天文学,47(3):034601,doi:10.1360/SSPMA2016-00362.
陈莘莘,王娟. 2017a. 反平面断裂问题的无单元伽辽金比例边界法. 计算力学学报,34(1):57-61,doi:10.7511/jslx201701007.
陈莘莘,王娟. 2017b. 压电裂纹的插值型无单元伽辽金比例边界法分析. 机械工程学报,53(6):53-59,67,doi:10.3901/JME.2017.06.053.
程林,费建伟,朱罗军,等. 2025. 临时支撑开发及强度承载力有限元分析. 中国建筑金属结构,24(1):7-9,doi:10.20080/j.cnki.issn1671-3362.2025.01.003.
戴成元,韩汀,赵文华. 2006. 基于无单元伽辽金法的混凝土梁裂缝分析. 山东交通学院学报,14(2):22-25.
戴前伟,朱泽龙,韩行进,等. 2023. 基于无单元 Galerkin 法的饱和—非饱和土石坝渗流正演模拟. 水资源与水工程学报,34(2):171-179,doi:10.11705/j.issn.1672-643X.2023.02.22.
底青云,Martyn U,王妙月. 2004. 有限元法 2.5 维 CSAMT 数值模拟. 地球物理学进展,19(2):317-324.
窦如令,张伟星. 2009. 无单元迦辽金法在对称叠层板弯曲问题中的应用. 青岛理工大学学报,30(2):94-99.
冯德山,王洪华,戴前伟. 2013. 基于无单元 Galerkin 法探地雷达正演模拟. 地球物理学报,56(1):298-308,doi:10.6038/cjg20130131.
冯茜. 2007. 奇异权函数无单元伽辽金法及其应用研究[硕士论文]. 西安:西安理工大学.
高志华,曾辉辉,刘志强,等. 2005. 无单元伽辽金法及其在瞬态温度场中的应用研究. 冰川冻土,27(4):557-562.
高志华,赵昭,侯英杰,等. 2021. 无单元伽辽金法在钢框架节点耐火极限中的应用. 工业建筑,51(10):122-126,doi:10.13204/j.gyjzG20051211.
韩守福,葛鑫,马国华. 2025. 基于有限元法的顶管施工挤土风险分析与评估. 化工安全与环境,38(6):8-10,15.
胡德安,常猛猛. 2011. 三维无单元伽辽金方法求解人体股骨和颅骨生物力学冲击问题. 世界科技研究与发展,33(3):400-402,412,doi:10.16507/j.issn.1006-6055.2011.03.001.
黄岩松,周维垣,胡云进. 2006. 应用三维无单元伽辽金法追踪裂纹扩展. 水利学报,37(1):63-69.
黄尧,刘彦,吕庆田,等. 2022. 无网格方法及其在地球物理勘探中的应用与展望. 地球物理学进展,37(5):1946-1959,doi:10.6038/pg2022FF0585.
柯敢攀,黄清华. 2009. 井地电法的三维正反演研究. 北京大学学报(自然科学版),45(2):264-272,doi:10.13209/j.0479-8023.2009.041.
李鹤. 2018. 弹性动力学问题的插值型无单元伽辽金比例边界法[硕士论文]. 南昌:华东交通大学.
李建慧,Farquharson C G,胡祥云,等. 2016. 基于电场总场矢量有限元法的接地长导线源三维正演. 地球物理学报,59(4):1521-1534,doi:10.6038/cjg20160432.
李俊杰. 2014. 基于弱式无网格法的大地电磁二维正演[硕士论文]. 长沙:中南大学.
李俊杰,严家斌,皇祥宇. 2015. 无单元 Galerkin 法大地电磁三维正演模拟. 地质与勘探,51(5):946-952,doi:10.13712/j.cnki.dzykt.2015.05.015.
李俊杰,严家斌. 2018. 重力异常二维正演中的无网格方法. 煤田地质与勘探,46(6):181-186,doi:10.3969/j.issn.1001-1986.2018.06.027.
刘更,刘天祥,谢琴. 2005. 无网格法及其应用. 西安:西北工业大学出版社.
刘桂荣,顾元通. 2007. 无网格法理论及程序设计. 济南:山东大学出版社,53-103.
柳建新,汤文武,童孝忠. 2014. 基于双二次插值的 2.5 维 FCSEM 有限元正演模拟. 中南大学学报(自然科学版),45(2):474-482.
刘素贞,杨庆新,陈海燕,等. 2006. 无单元伽辽金方法中权函数及影响域研究. 低压电器,(8):8-11,doi:10.16628/j.cnki.2095-8188.2006.08.002.
刘欣. 2011. 无网格方法. 北京:科学出版社.
龙述尧,胡德安,熊渊博. 2005. 用无单元伽辽金法求解几何非线性问题. 工程力学,22(3):68-71,57.
卢杰,李予国. 2017. 无网格局部 Petrov-Galerkin 法大地电磁场二维正演模拟. 地球物理学报,60(3):1189-1200,doi:10.6038/cjg20170329.
罗毓明,胡雨涵,庞宇来,等. 2025. 基于有限元法的气藏型储气库双层合采流动模拟. 油气储运,44(8):932-940.
麻昌英,闫玲玲,姚振岸,等. 2023. 基于无单元局部弱式法的 2.5 维直流电阻率正演. //中国地球物理学会. 2023 年中国地球科学联合学术年会论文集——专题二十六 应用地球物理前沿、专题二十七 油气田与煤田地球物理勘探. 珠海:中国地球物理学会,1212-1213,doi:10.26914/c.cnkihy.2023.127113.
庞作会,葛修润,郑宏,等. 1999a. 一种新的数值方法——无网格伽辽金法(EFGM). 计算力学学报,16(3):320-329.
庞作会,葛修润,王水林. 1999b. 无网格伽辽金法(EFGM)在边坡开挖问题中的应用. 岩土力学,20(1):61-64,doi:10.16285/j.rsm.1999.01.012.
庞作会,葛修润,王水林,等. 1999c. 对无网格伽辽金法(EFGM)的两点补充. 岩石力学与工程学报,18(5):581-584.
庞作会,朱岳明. 2000. 无网格伽辽金法(EFGM)求解接触问题. 河海大学学报,28(4):54-58.
裘沙沙,段庆林,邵玉龙,等. 2023. 弹塑性体脆断相场模型的一致性无单元伽辽金法. 计算力学学报,40(1):60-65,doi:10.7511/jslx20200101001.
苏洲,胡文宝,朱毅. 2012. 二维大地电磁正演中无网格算法研究. 石油天然气学报,34(5):87-90.
陶梦丽,殷长春,张博,等. 2024. 基于多尺度有限元法的频率域航空电磁三维正演研究. 地球物理学报,67(4):1656-1668,doi:10.6038/cjg2023Q0725.
王洪友,杨光源,邵可然. 2012. 基于无单元伽辽金法的电机电磁场

计算. 中国电机工程学报, 32(15): 148-154, doi: 10.13334/j.0258-8013.pcsee.2012.15.020.

王洪友. 2012. 采用无单元伽辽金法的电机电磁场计算[硕士论文]. 武汉: 华中科技大学.

王娟. 2017. 弹性和压电材料断裂问题的插值型无单元伽辽金比例边界法[硕士论文]. 南昌: 华东交通大学.

王立鹏. 2010. 无单元法若干技术研究及其在电磁场计算中的应用[博士论文]. 沈阳: 沈阳工业大学.

王若, 王妙月, 底青云. 2006. 频率域线源大地电磁法有限元正演模拟. 地球物理学报, 49(6): 1858-1866.

王月英. 2007. 地震波正演模拟中无单元 Galerkin 法初探. 地球物理学进展, 22(5): 1539-1544.

王振宽, 李海瑞, 李厚琨. 2014. 改进的无单元伽辽金法的研究及其应用. 信息通信, 27(9): 13-15.

徐世浙. 1994. 地球物理中的有限单元法. 北京: 科学出版社.

闫海涛, 张龙, 张继锋, 等. 2019. 全局弱式无网格法在大地电磁二维正演中的应用研究. 地球物理学进展, 34(2): 658-667, doi: 10.6038/pg2019BB0482.

严家斌, 李俊杰. 2014. 无网格法在大地电磁正演计算中的应用. 中南大学学报(自然科学版), 45(10): 3513-3520.

严家斌, 胡涛, 林旭, 等. 2020. 基于电场矢量有限元三维高频大地电磁倾子响应与感应矢量研究. 地质与勘探, 56(1): 123-136.

杨昊. 2023. 热应力作用下非均匀磁电弹材料的力-电-磁非均质无网格伽辽金方法研究[硕士论文]. 长春: 吉林大学, doi: 10.27162/d.cnki.gjlin.2023.002957.

杨源, 莫中华, 孙启荣, 等. 2020. 无单元伽辽金法在船体开孔板格弹性屈曲分析中的应用. 应用力学学报, 37(3): 1367-1374, doi: 10.11776/cjam.37.03.B149.

叶益信, 李予国, 刘颖, 等. 2016. 基于局部加密非结构网格的海洋可控源电磁法三维有限元正演. 地球物理学报, 59(12): 4747-4758, doi: 10.6038/cjg20161233.

虞恬. 2019. 基于无单元伽辽金法的软组织形变仿真研究[硕士论文]. 北京: 北京交通大学, doi: 10.26944/d.cnki.gbfju.2019.000557.

曾亿山, 曾清红. 2007. 一种改进的无单元伽辽金方法. 计算物理, 24(1): 35-41, doi: 10.19596/j.cnki.1001-246x.2007.01.006.

张飞, 张国达, 任红萍. 2017. 基函数的阶数对无单元伽辽金方法精度的影响. 西南民族大学学报(自然科学版), 43(2): 177-185, doi: 10.11920/xnmdzk.2017.02.012.

张飞. 2018. EFG 方法和 IEFG 方法的对比研究[硕士论文]. 太原: 太原科技大学.

张国达. 2017. 瞬态热传导问题的插值型无单元伽辽金方法及误差分析[硕士论文]. 太原: 太原科技大学.

张华, 文航. 2025. 基于有限元法的水库大坝渗流分析. 陕西水利, (5): 148-151, doi: 10.16747/j.cnki.cn61-1109/tv.2025.05.051.

张建辉, 邓安福. 1999. 无单元法(EFM)在筏板基础计算中的应用. 岩土工程学报, 21(6): 691-695.

张龙. 2017. 全局弱式无网格法在大地电磁二维正演中的应用研究[硕士论文]. 西安: 长安大学.

张伟星, 庞辉. 2000. 无单元法计算钢筋混凝土筏板. 计算力学学报, 17(3): 326-331.

张雄, 刘岩. 2004. 无网格法. 北京: 清华大学出版社.

赵昭. 2020. 改进的无网格法及其在火灾情况下钢框架节点耐火极限中的应用[硕士论文]. 西安: 长安大学, doi: 10.26976/d.cnki.gchau.2020.001787.

周军, 阮帅, 何可, 等. 2026. 地面导线源瞬变电磁场的三维有限元正演. 地球物理学进展, 41(1): 174-181, doi: 10.6038/pg2026JJ0054.

周威帆, 闫冬, 姚金明, 等. 2016. 复杂模型的大地电磁测深无单元法正演模拟. 吉林地质, 35(2): 79-83.

周维垣, 寇晓东. 1998. 无单元法及其在岩土工程中的应用. 岩土工程学报, 20(1): 5-9.