文章编号:1674-7607(2026)02-0164-10 DOI:10.19805/j.cnki.jcspe.2026.240759

基于改进传递矩阵法的次同步振荡轴系扭振分析

刘昊煜[1,2]， 顾煜炯[1,2]， 宋光雄[1,2]
(1. 华北电力大学 能源动力与机械工程学院,北京 102206;
2. 华北电力大学 国家火力发电工程技术研究中心,北京 102206)

摘 要: 传统 Riccati 传递矩阵法难以准确反映发生故障时汽轮机转子的动态特性,同时危险截面的判定主要基于交变应力幅,而忽略非零平均应力的影响可能导致疲劳损伤估算产生偏差,本文提出一种改进的评价方法,以故障前稳态运动参数为初始值,通过三点插值法实时计算各轴段非稳态下的运动状态,获得故障被检测时的真实响应,同时基于 Goodman 理论,在考虑平均应力的影响下,对疲劳损伤进行修正,以某 600 MW 汽轮发电机组的轴系为例,分析次同步频段内 2 种共振引起的疲劳损伤。结果表明:改进的响应计算方法显著降低了非稳态因素导致的误差;针对危险截面的判定需综合考虑次同步振荡激励的成分和强度。

关键词: 轴系扭振; 次同步振荡; 传递矩阵; 动态响应; 危险截面
中图分类号: TK267 **文献标志码:** A **学科分类号:** 470.30

Torsional Vibration Analysis of Shaft Systems in SSO Based on Improved Transfer Matrix Method

LIU Haoyu[1,2], *GU Yujiong*[1,2], *SONG Guangxiong*[1,2]
(1. School of Energy Power and Mechanical Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206, China; 2. National Thermal Power Engineering & Technology Research Center, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

Abstract: The traditional Riccati transfer matrix method exhitibs significant limitations in accurately reflecting the dynamic characteristics of steam turbine rotors under fault scenarios. Additionally, the identification of critical sections primarily relies on alternating stress amplitude, while neglecting the impact of non-zero mean stress, which may lead to deviations in fatigue damage estimation. An improved method was proposed, in which the steady-state motion parameters before the fault was taken as initial values. A three-point interpolation method was then employed to calculate the motion state of each shaft segment during the non-steady interval in real time, thereby capturing the true response when the fault was detected. Meanwhile, the fatigue damage was refined by incorporating the mean-stress effect based on Goodman's theory. A 600 MW steam turbine generator shafting was analyzed as an example to evaluate the fatigue damage caused by two types of resonance in the subsynchronous frequency range. Results show that the improved response calculation method significantly reduces errors caused by unsteady factors, and the identification of critical sections requires comprehensive consideration of the components and intensity of SSO excitation.

Key words: torsional vibration of shaft system; SSO; transfer matrix; dynamic response; critical section

收稿日期: 2024-12-06 **修订日期:** 2025-01-08

作者简介: 刘昊煜(2000—),男,河南郑州人,硕士研究生,研究方向为旋转机械故障诊断。
顾煜炯(通信作者),男,教授,博士,E-mail:gyj@ncepu.edu.cn。

近年来，随着电力系统规模的扩大和新能源渗透率的提升，次同步振荡的发生频率显著上升[1]。2012 年，河北省沽源地区某风电厂发生了频率范围为 3～10 Hz 的次同步振荡，导致大量双馈风机因过多的谐波影响切机[2]。2015 年，新疆哈密北部风电接入区电网多次发生频率为 20～35 Hz 的次同步振荡，振荡通过输电线路传播至其他区域，导致约 300 km外的花园电厂汽轮机组发生严重的轴系扭振损伤，触发汽轮机组的保护动作并停机[3]。综上，研究次同步振荡引发的扭振现象，准确识别危险截面和预测轴系的疲劳寿命是电力生产高效稳定的必要条件[4]。

次同步振荡引发的轴系扭振与两相短路、甩负荷等故障不同，一般振幅较小，不会直接导致轴系的失效与破坏，但是长期的交变应力作用会逐渐积累疲劳损伤，特别是在应力集中区域，裂纹可能逐步萌生并扩展，进一步增加疲劳损伤的程度，其具有隐蔽性和长期性，因此通过应力谱量化疲劳损伤并识别危险截面对于保证轴系的可靠性至关重要[5]。疲劳损伤计算的关键在于准确获得轴系的动态响应，目前主要方法包括有限元法、模态叠加法和传递矩阵法。其中，传递矩阵法无需建立复杂模态矩阵，同时与有限元法相比，其计算效率更高[6]，不会随着自由度的增加出现数值不稳定或收敛问题[7-8]；文献[9]、文献[10]中结果表明，在计算速度和准确性要求较高的响应分析中，传递矩阵法相比于有限元法更具优势。

传递矩阵法被广泛应用于动力学分析，Horner 等[11]首先将 Riccati 变化引入传递矩阵，提高了结果的稳定性与精度。文献[12]在传统 Riccati 传递矩阵法中引入刚度修正系数，计算了转子的临界转速、模态振型和不平衡响应等动态特性。文献[13]采用改进的 Riccati 传递矩阵结合 Newmark-β 方法，通过仿真短路和异步并置等典型电网扰动，研究了非线性轴系的扭振响应。杨昆等[14]采用 Riccati 传递矩阵法与 Newmark-β 法相结合的方法得到了轴系扭振故障时叶片的位移响应曲线，并基于此计算叶片应力谱，确定叶片振动时的危险截面。

此外，非零平均应力会显著影响疲劳裂纹的萌生与扩展，是工程设计中必须考虑的重要因素。通过引入修正模型（如 Goodman 理论、Gerber 公式等），可以有效评估非零平均应力对疲劳损伤的影响，确保结构的安全性和可靠性。如文献[15]中通过对风力涡轮机主轴承的应力和疲劳寿命分析发现，在内圈滚子接触区域由于正平均应力的存在，裂纹萌生和扩展的驱动力增大，未考虑平均应力的寿命预测值更高，表明忽略平均应力会高估疲劳寿命。翁建明等[16]选用 Gerber 公式对汽轮发电机组转子进行寿命评估，发现随着平均应力的增加，相同应力幅值下试件的循环次数减小，寿命损伤增大。

传统观念认为，危险截面是指汽轮机组发生某类扭振故障时，轴系上出现最大幅度交变应力的部位[16-18]，然而相关计算表明，交变应力幅与疲劳损伤并非呈现线性关系[19-20]。同时，由于 Newmark-β 方法的局限性，启动传递矩阵的计算需要所有轴段的运动参数。本文基于三点插值法提出一种改进的计算方法，有效改善了非稳态因素引起的初始运动参数误差问题，并基于 Goodman 理论考虑平均应力的影响，最后基于疲劳损伤，判断发生不同阶数的次同步振荡时轴系的危险截面。

1　计算流程

对于一般采用的 Riccati 传递矩阵法，当监测到故障时会将各个轴段的稳态速度设定为初始扭角速度，然后启动传递矩阵计算响应。然而，从电力系统对发电机转子产生影响到故障被监测的过程中，轴系各个轴段的扭振速度已完全脱离稳态（如图 1 所示），又因轴系本身为非线性系统，其动态响应对初始值的精度表现出较高敏感性，初值误差会显著影响计算结果的准确性，因此本文在监测到故障前计算各个轴段的扭角速度并储存在数据库，而在监测到故障时直接调用数据库中的数据作为传递矩阵的初始值进行计算，这可以大幅提高动态响应的计算精度。

由于高参数机组的轴系长期处于高温、高载荷

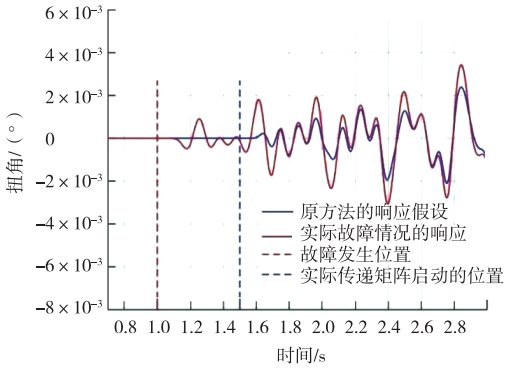


图 1　由不同初始运动参数计算的响应谱

Fig. 1　Response spectrum calculated by different initial motion parameters

及频繁振动等恶劣的工作环境，应力状态复杂且平均应力不容忽视。在根据应力谱计算疲劳损伤时，平均应力会显著影响疲劳寿命和危险截面的判定。为此，本文采用 Goodman 理论计算平均应力引起的疲劳损伤增幅比，修正应力-循环次数(*S-N*)曲线计算的疲劳损伤，获得更为保守且更贴近实际工况的疲劳损伤，准确识别出真正的危险截面，从而有效提高故障诊断的可靠性。整体计算流程如图 2 所示。

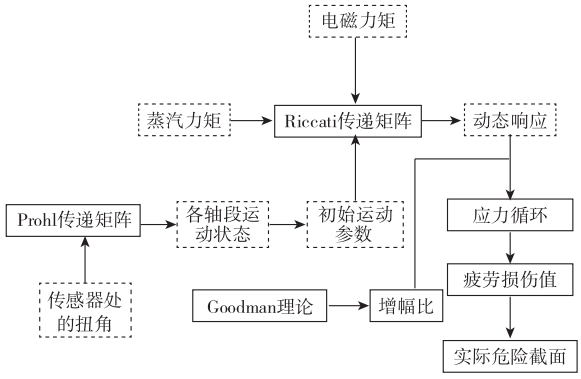


图 2 整体计算流程

Fig. 2 Overall calculation process

2 轴系的动态响应分析

2.1 建立多段集中质量模型

本文建立的传递矩阵模型由 299 个轴段组成，图 3 为单个轴段受力示意图，轴段 P 包含一个刚性薄圆盘 P_1 和一个无质量等截面轴 P_2，T_L 和 T_R 分别为左、右相邻轴段对 P 施加的扭矩，T_P 为施加在 P 上的外力矩，i 代表 P 中的截面位置，刚性薄圆盘负责传递扭矩，无质量等截面轴负责传递扭转角。为保证计算精度，将其详细分段，尤其是截面积变化的轴颈和承受蒸汽力矩的转子部分。根据截面的参数将其模化为等截面阶梯轴，同时采用附加转动惯量的形式将叶片增加到刚性薄圆盘上。

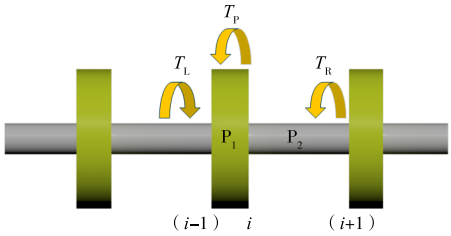


图 3 多段集中质量模型的某一轴段

Fig. 3 An individual shaft segment of the multi-segment lumped mass model

2.2 建立轴单元的传递矩阵

2.2.1 刚性薄圆盘的运动方程

简化的刚性薄圆盘主要受惯性力矩、切应力产生的扭矩、阻尼产生的阻力矩、左右截面的扭矩以及施加在其上外力矩的作用，运动方程为

$$T_R = C_P\dot{\varphi}_P + J_P\ddot{\varphi}_P - T_P + T_L \tag{1}$$

式中：C_P、J_P、φ_P 分别为轴段 P 的阻尼系数、转动惯量和扭角。

将式(1)改写为增量形式：

$$\Delta T_i^{j-1,j} = C_P\Delta\dot{\varphi}_P^{j-1,j} + J_P\Delta\ddot{\varphi}_P^{j-1,j} + \Delta T_{i-1}^{j-1,j} - \Delta T_P^{j-1,j} \tag{2}$$

式中：$\Delta T_i^{j-1,j}$ 和 $\Delta T_{i-1}^{j-1,j}$ 为 $j-1$ 时刻到 j 时刻 P 两侧轴段对其施加的扭矩变化值；$\Delta\varphi_P^{j-1,j}$ 为 $j-1$ 时刻到 j 时刻 P 的扭角变化值；$\Delta T_P^{j-1,j}$ 为 $j-1$ 时刻到 j 时刻 P 的外力矩变化值。

根据 Newmark-β 法可得

$$\ddot{\varphi}_P^j - \ddot{\varphi}_P^{j-1} = \Delta\ddot{\varphi}_P^{j-1,j} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\varphi_P^j - \varphi_P^{j-1}) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\varphi}_P^{j-1} - \frac{1}{2\beta}\ddot{\varphi}_P^{j-1} \tag{3}$$

$$\dot{\varphi}_P^j - \dot{\varphi}_P^{j-1} = \Delta\dot{\varphi}_P^{j-1,j} = \frac{\gamma(\varphi_P^j - \varphi_P^{j-1})}{\beta\Delta t} - \frac{\gamma\dot{\varphi}_P^{j-1}}{\beta} - (\frac{\gamma}{2\beta}-1)\ddot{\varphi}_P^{j-1}\Delta t \tag{4}$$

式中：$\dot{\varphi}_P^j$ 为 j 时刻 P 轴段的扭角；β 和 γ 为调控参数；Δt 为时间步长。

根据 Newmark-β 法中的线性加速度情况，基于权函数 W 计算出 β 和 γ 分别为 6^{-1} 和 0.5。

将式(3)和式(4)代入式(2)并整理可得

$$\Delta T_i^{j-1,j} = \Delta T_{i-1}^{j-1,j} + A_P\Delta\varphi_P^{j-1,j} + B_P^{j-1} \tag{5}$$

$$A_P = \frac{J_P}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma C_P}{\beta\Delta t}$$

$$B_P^{j-1} = -J_P(\frac{\dot{\varphi}_P^{j-1}}{\beta\Delta t} + \frac{\ddot{\varphi}_P^{j-1}}{2\beta}) - C_P\left[\frac{\gamma\dot{\varphi}_P^{j-1}}{\beta} + (\frac{\gamma}{2\beta}-1)\ddot{\varphi}_P^{j-1}\Delta t\right] - \Delta T_P^{j-1,j}$$

2.2.2 无质量等截面弹性轴段

根据材料力学可得

$$\frac{T_i^{j-1}}{GI_R} = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{l_R} \tag{6}$$

式中：G 为材料的切变模量；I_R 为极惯性矩；φ_i 为等截面轴 P_2 一端截面的扭角；l_R 为轴段长度。

同时，令 $K_R = \frac{GI_R}{l_R}$，得到无质量等截面弹性轴

段传递方程的增量形式。

$$\begin{cases}\Delta T_{i+1}^{j-1,j}=\Delta T_{i}^{j-1,j}\\ \Delta\varphi_{i+1}^{j-1,j}=\Delta\varphi_{i}^{j-1,j}+\dfrac{\Delta T_{i}^{j-1,j}}{K_{\mathrm{R}}}\end{cases}\tag{7}$$

式中：$\Delta\varphi_{i}^{j-1,j}$ 为 $j-1$ 时刻到 j 时刻 P_2 两侧扭角的变化量。

2.2.3　建立单元轴段传递矩阵

由刚性薄圆盘和无质量等截面弹性轴段的假设条件可得

$$\Delta T_{i+1}^{j-1,j}=\Delta T_{i}^{j-1,j}=\Delta T_{i-1}^{j-1,j}+A_{\mathrm{P}}\Delta\varphi_{\mathrm{P}}^{j-1,j}+B_{\mathrm{P}}^{j-1}\tag{8}$$

$$\Delta\varphi_{i+1}^{j-1,j}=\frac{\Delta T_{i-1}^{j-1,j}}{K_{\mathrm{R}}}+\left(1+\frac{A_{\mathrm{P}}}{K_{\mathrm{R}}}\right)\Delta\varphi_{i-1}^{j-1,j}+\frac{1}{K_{\mathrm{R}}}B_{\mathrm{P}}^{j-1}\tag{9}$$

注意到 i 角标被消除，方程直接关联轴段两端，因此令轴段起始端为 n，终止端为 $n+1$，可得

$$\begin{cases}\Delta T_{n+1}^{j-1,j}=\Delta T_{n}^{j-1,j}+A_{\mathrm{P}}\Delta\varphi_{n}^{j-1,j}+B_{\mathrm{P}}^{j-1}\\ \Delta\varphi_{n+1}^{j-1,j}=\dfrac{\Delta T_{n}^{j-1,j}}{K_{\mathrm{R}}}+\left(1+\dfrac{A_{\mathrm{P}}}{K_{\mathrm{R}}}\right)\Delta\varphi_{n}^{j-1,j}+\dfrac{B_{\mathrm{P}}^{j-1}}{K_{\mathrm{R}}}\end{cases}\tag{10}$$

将式(10)以传递矩阵的形式表示为

$$\begin{bmatrix}\Delta T\\ \Delta\varphi\end{bmatrix}_{n+1}^{j-1,j}=\begin{bmatrix}U_{11}&U_{12}\\ U_{21}&U_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta T\\ \Delta\varphi\end{bmatrix}_{n}^{j-1,j}+\begin{bmatrix}F_1\\ F_2\end{bmatrix}_{n}^{j-1}\tag{11}$$

式中：$U_{11}=1$；$U_{12}=A_{\mathrm{P}}$；$U_{21}=K_{\mathrm{R}}^{-1}$；$U_{22}=1+\dfrac{A_{\mathrm{P}}}{K_{\mathrm{R}}}$；$F_1=B_{\mathrm{P}}$；$F_2=\dfrac{B_{\mathrm{P}}}{K_{\mathrm{R}}}$。

2.2.4　Riccati 变换

令 $f=\Delta T$，$e=\Delta\varphi$，并引入 Riccati 变换。

$$f_n=S_n e_n+P_n\tag{12}$$

式中：S_n 为 Riccati 变换中的缩放因子；P_n 为偏移项。

将式(12)代入(11)，可得

$$f_{n+1}=e_n(U_{11}S_n+U_{12})+U_{11}P_n+F_{1n}\tag{13}$$

$$e_{n+1}=e_n(U_{21}S_n+U_{22})+U_{21}P_n+F_{2n}\tag{14}$$

进而得到

$$f_{n+1}=\frac{U_{11}S_n+U_{12}}{U_{21}S_n+U_{22}}e_{n+1}-\frac{(U_{21}P_n+F_{2n})(U_{11}S_n+U_{12})}{U_{21}S_n+U_{22}}+U_{11}P_n+F_{1n}\tag{15}$$

将式(15)与式(12)进行比较。

$$S_{n+1}=\frac{U_{11}S_n+U_{12}}{U_{21}S_n+U_{22}}\tag{16}$$

$$P_{n+1}=-(U_{21}P_n+F_{2n})S_{n+1}+(U_{11}P_n+F_{1n})\tag{17}$$

由边界条件可知 $S_1=0$，$P_1=0$，当已知每个轴段的瞬时速度与加速度时，便可根据 Riccati 传递矩阵依次得到 S_{n+1} 与 P_{n+1}。同时，对于另一端截面 $N_{\mathrm{e}}+1$，由边界条件可计算出 $e_{N_{\mathrm{e}}+1}$，然后根据式(14)可以获得所有轴段的 e_n，从而获得各个轴段的 f_n。

综上所述，Newmark-β 法与 Riccati 传递矩阵法结合求解动态响应的流程为：根据各轴段的瞬时速度与加速度计算其 S_n 和 P_n，然后根据边界条件倒序依次求得各轴段的扭角增量，结合式(12)得到各轴段的扭矩分布。最后，通过 Newmark-β 法计算下一时间的瞬时速度与加速度，重复上述过程获得各轴段随时间变化的扭角与扭矩。

2.3　求解瞬时速度与加速度

由上文可知，要通过 Newmark-β 法与 Riccati 结合的传递矩阵计算当前轴段下一段时间的 $\Delta\varphi_{i+1}^{j,j+1}$，需要已知各轴段当前时刻 j 的瞬时速度与加速度，然而假设上一时刻$(j-1)$数据完备，根据传递矩阵只能求得 $\Delta\varphi_{i+1}^{j-1,j}$，无法直接获得速度与加速度，且只有安装电涡流传感器的轴段才能测得瞬时速度与加速度。因此，对由一般传递矩阵获得的下一轴段扭角增量进行三点插值法处理，每一轴段的瞬时速度 $\dot{\varphi}_n^j$ 与加速度 $\ddot{\varphi}_n^j$ 分别为

$$\dot{\varphi}_n^j=\frac{1}{2\Delta t}(\Delta\varphi_i^{j,j+1}+\Delta\varphi_i^{j-1,j})\tag{18}$$

$$\ddot{\varphi}_n^j=\frac{1}{\Delta t^2}(\Delta\varphi_i^{j,j+1}-\Delta\varphi_i^{j-1,j})\tag{19}$$

三点插值法计算动态响应的流程为：首先根据传感器处的运动状态计算相邻轴段的扭角变化量，获得 2 组数据后根据三点插值法计算此轴段的瞬时速度与加速度；再通过传递矩阵计算下一个轴段的扭角变化量，获取 2 组数据后再计算瞬时速度与加速度；然后依次进行该过程，即可获得所有轴段的瞬时速度与加速度。将稳态情况下各时刻、各轴段的运动状态记录在数据库，当检测到故障发生时，即可调用瞬时参数启动传递矩阵，以计算动态响应。图 4 为详细的计算流程。

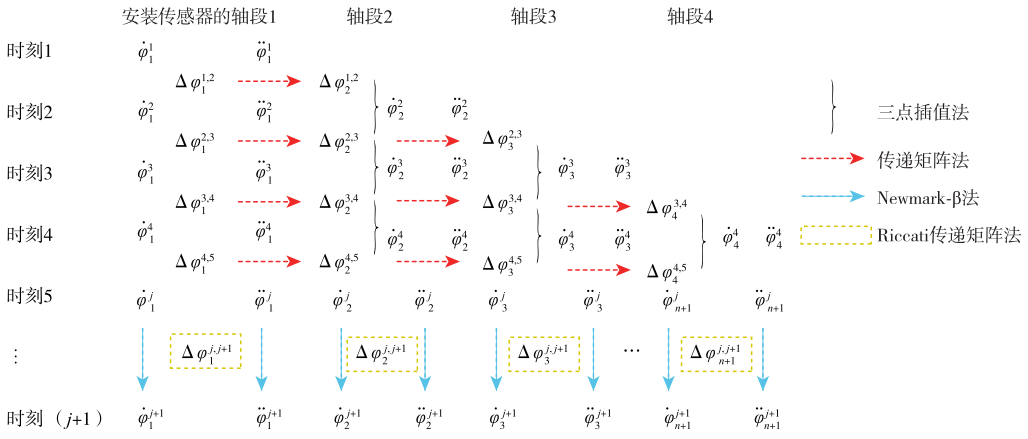


图 4 求解瞬时速度与加速度的计算过程

Fig. 4 Calculation process for instantaneous velocity and acceleration solving

2.4 轴上的载荷分布

所分析的 600 MW 汽轮机组轴系主要由 5 部分承受扭矩，根据各个轴段承受的功率百分比计算其扭矩。

表 1 各轴段转子功率

Tab. 1 Rotor power of each shaft segment

项目	功率百分比/%	扭矩/(N·m)
高压转子	28.13	537 227
中压转子	31.92	609 608
低压转子 A	20.98	400 676
低压转子 B	18.97	362 289
发电机转子	100	−1 909 800

3 轴系的疲劳损伤

3.1 分析对象

本文分析的汽轮机组为西北地区某电厂的 600 MW 汽轮发电机组，其运行方式为超临界蒸汽参数、一次中间再热、单轴三缸四排汽，双背压抽汽凝汽式；其中高中压缸部分的转子钢材料为 30Cr1Mo1V、低压缸为 30Cr2Ni4MoV、发电机部分为 25Cr2Ni4MoV。设备简图如图 5 所示，其固有频率与归一化模态振型分别如表 2 与图 6 所示。由表 2 可知，轴系在次同步频段内有 2 种共振情况，第 3 阶的固有频率远高于 50 Hz 的转频，不易被激发。

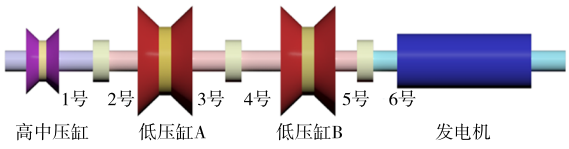


图 5 轴系简图

Fig. 5 Schematic diagram of the shaft system

表 2 固有频率计算值

Tab. 2 Calculated values of natural frequency

模态阶数	有限元计算值/Hz	本模型计算值/Hz	偏差/%
1	19.791	19.856	0.33
2	35.629	35.705	0.21
3	84.408	84.15	−0.31
4	175.736	176.09	0.2

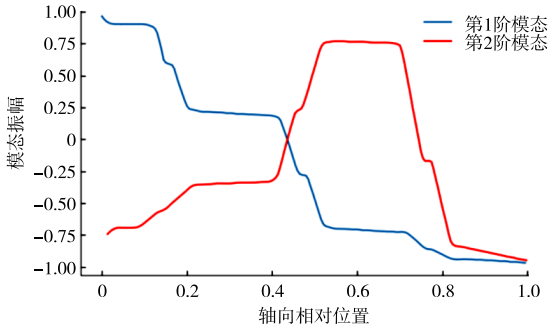


图 6 次同步频段内的模态振型

Fig. 6 Modal shapes within the subsynchronous frequency range

由表 2 可以看出，本文模型契合性良好。根据模态振型可知，在各个联轴器附近的轴颈处振型曲线普遍出现较大变化，1 阶振型的最大斜率出现在 2 个低压转子之间；2 阶振型曲线最大斜率出现在低压缸 B 与发电机转子之间，因此根据次同步振荡的阶数不同，需要重点关注的部位也不同。可能出现最大疲劳损伤的部位也主要位于各轴颈部位，本文将分析各轴颈部位的疲劳损伤。在各轴颈处，由于截面积的变化，需要考虑应力集中系数，本文根据有限元法离线计算各部位的最大应力与名义应力，以求得应力集中系数，结果如表 3 所示。

表 3　各轴颈应力集中系数

Tab. 3　Stress concentration factors of each shaft journal

参数	轴颈编号					
	1	2	3	4	5	6
应力集中系数	1.55	1.57	1.56	1.56	1.65	1.75

3.2　次同步振荡下的电磁力矩

对于轴系中引起扭振的激励，相比于较为稳定的蒸汽力矩，大多数是由电磁力矩的不稳定引起的，而次同步振荡产生的根源主要是串补电容、负载变化等引起的电磁力矩波动，导致在次同步频段内产生与轴系固有频率相近的分量。

根据电气监控系统获取的三相电流电压数据，计算实时的发电机功率 $P_e(t)$。

$$P_e(t)=u_a(t)i_a(t)+u_b(t)i_b(t)+u_c(t)i_c(t) \tag{20}$$

式中：$u_a(t)$、$u_b(t)$和 $u_c(t)$分别为 A、B、C 三相电压；$i_a(t)$、$i_b(t)$和 $i_c(t)$分别为 A、B、C 三相电流。

计算出电磁力矩的瞬时变化量 $T_e(t)$为

$$T_e(t)=\frac{P_e(t)}{w_e(t)} \tag{21}$$

式中：$w_e(t)$为扭角速度。

3.3　各轴颈的应力谱

基于前文方法获得的动态响应，计算各轴颈应力谱 τ。

$$\tau=K\frac{T}{W} \tag{22}$$

式中：T 为作用在其上的扭矩；K 为应力集中系数；W 为抗扭截面系数。

图 7 为监测到第 1 阶次同步振荡发生时各轴颈的应力谱。

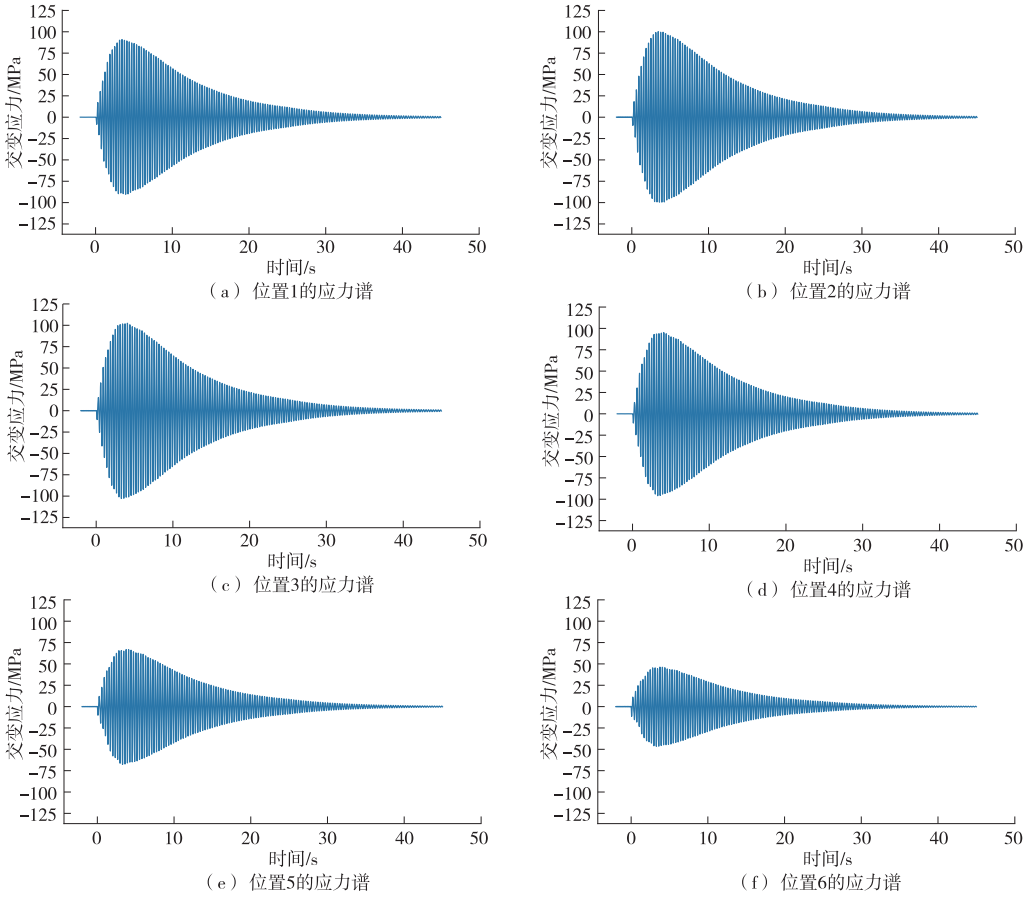


图 7　第 1 阶次同步振荡下各轴颈位置的应力谱

Fig. 7　Stress spectra at different journal positions under the first-order SSO

3.4　疲劳损伤值的修正

当汽轮机组稳定运行时机械力矩与电磁力矩平衡，轴系承受稳定力矩，平均应力为 0 MPa；而发生次同步振荡或机组功率变化时，稳态力矩也随之变化，仅使用零平均应力下的 S-N 曲线来预测寿命无法体现真实情况。Goodman 关系通过考虑交变应力的影响来修正疲劳损伤值，可在 S-N 曲线上更准确地预测材料在不同平均应力条件下的疲劳寿命。对于室温下转子钢材料的 S-N 曲线，本文采用文献[21]和文献[22]中的数据（见表 4），然后基于广义形式 Basquin 方程[23]，将该 S-N 曲线关系拓展至材料的应用温度。

广义形式的 Basquin 方程为

$$\sigma_a(N,\theta)=p\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^r N^q \tag{23}$$

式中：$\sigma_a(N,\theta)$为在循环次数 N、温度 θ 时对应的应力幅值；θ_0 为参考温度；p、q、r 为回归参数。

Goodman 关系表达式如下：

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_e}+\frac{\sigma_m}{\sigma_u}=1 \tag{24}$$

式中：σ_a 为交变应力幅值；σ_e 为材料的疲劳极限；σ_m 为平均应力；σ_u 为材料的抗扭强度。

在考虑平均应力的情况下，相同次数的循环对应的可承受应力幅值 σ_a 比不考虑的情况更低。

表 4 室温下转子钢材料参数

Tab. 4 Parameters of rotor steel material at room temperature

转子钢材料	p/MPa	q	σ_u/MPa
30Cr1Mo1V	710.3	−0.046	440.2
30Cr2Ni4MoV	766.2	−0.041	495.7
25Cr2Ni4MoV	742.1	−0.035	503.2

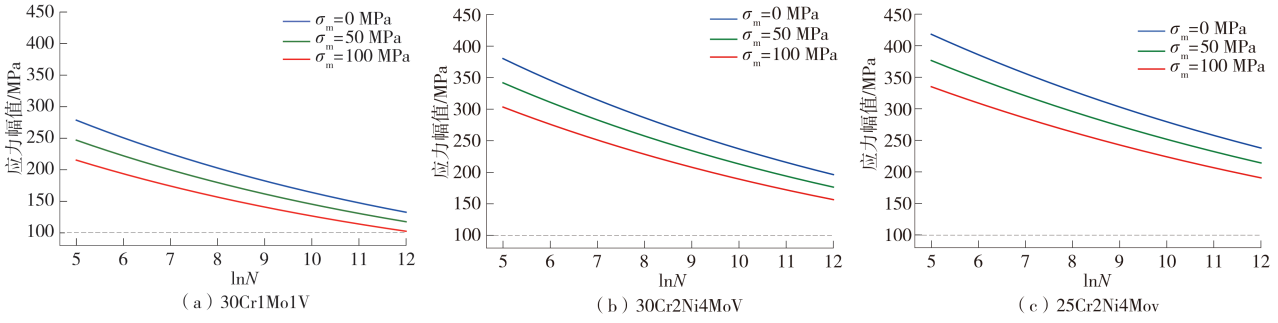
令 $X=\left(1-\frac{\sigma_m}{\sigma_u}\right)$，$A=p\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^r$，一般形式的 S-N 曲线变换为

$$S=XAN^q \tag{25}$$

式中：S 为循环的应力幅值。

则 $\ln N=\frac{\ln S-\ln AX}{q}$（$b<0$），即在相同的应力幅值下，考虑平均应力所导致的 X 变化会导致循环的应力损伤$\frac{1}{N}$增大，与不考虑平均应力时对比，增幅比为$\left(1-\frac{\sigma_m}{\sigma_u}\right)^{\frac{1}{q}}$。

图8 给出了当考虑平均应力时各材料的 S-N 曲线，由于低压缸 A、B 之间温差较小，式(23)中的$\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^\gamma$项差距低于 1%，为便于计算，暂不考虑该温差的影响。图 9 展示了基于 Goodman 理论计算得到的单循环疲劳损伤增幅比随平均应力的变化关系。可见，考虑了平均应力后，材料的疲劳寿命计算更加保守。



(a) 30Cr1Mo1V (b) 30Cr2Ni4MoV (c) 25Cr2Ni4Mov

图 8 各材料的修正 S-N 曲线

Fig. 8 Corrected S-N curves of various materials

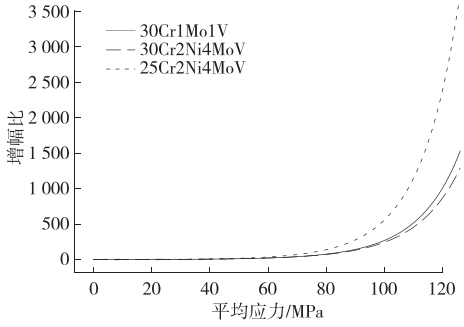


图 9 平均应力与增幅比的关系

Fig. 9 Relationship between mean stress and amplification ratio

4 数据分析

利用上文方法得到各轴颈在发生不同阶数次同步振荡下的应力谱，通过雨流法划分应力循环，使用 S-N 曲线计算各轴颈疲劳损伤，结果如表 5 所示。

在第 1 阶次同步振荡下，轴颈 1 和轴颈 3 的应力幅和疲劳损伤之间并非正相关，通过雨流法划分其雨流矩阵直方图，如图 10 所示，可见轴颈 1 的平均应力更大，因此其疲劳损伤的增幅比大于轴颈 3，同时根据 S-N 曲线可知，30Cr1Mo1V 在相同应力幅

表 5 第 1、2 阶次同步振荡的疲劳损伤

Tab. 5 Fatigue damage caused by the 1st and 2nd order SSO

参数		截面 1	截面 2	截面 3	截面 4	截面 5	截面 6
第 1 阶次同步振荡	应力幅值/MPa	179.23	199.67	205.31	191.01	134.42	92.75
	本文方法计算的疲劳损伤	6.11×10^{-5}	1.44×10^{-7}	2.61×10^{-7}	4.38×10^{-8}	7.93×10^{-12}	7.33×10^{-19}
第 2 阶次同步振荡	应力幅值/MPa	58.16	35.46	63.88	100.54	83.16	109.55
	本文方法计算的疲劳损伤	9.19×10^{-17}	2.39×10^{-27}	5.44×10^{-21}	4.06×10^{-16}	5.57×10^{-18}	2.04×10^{-18}

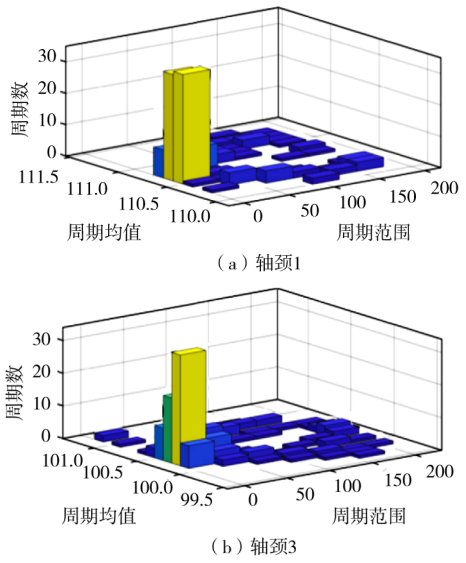


图 10　第 1 阶次同步振荡下的雨流矩阵直方图

Fig. 10　Rainflow matrix histogram under the first-order SSO

值下产生的疲劳损伤大于 25Cr2Ni4MoV，最终导致在轴颈 1 应力幅值低于轴颈 3 的情况下，仍产生了较大的疲劳损伤，成为第 1 阶次同步振荡下较低应力幅值的危险截面。

如图 11 所示，在第 2 阶次同步振荡下，处在最大交变应力的轴颈 4 的疲劳损伤最大。由于轴颈 4 和轴颈 5 的转子钢材料相同，但轴颈 4 的平均应力更大，因此轴颈 4 的疲劳损伤最大。但是，在轴颈 5 的应力幅值与平均值均小于轴颈 6 的情况下，其应力幅值与疲劳损伤仍为非正相关的关系，其原因是轴颈 5 处在较低平均应力的部位，增幅比的影响较小，然而在其 S-N 曲线中，相同应力幅值下 30Cr2Ni4MoV 的疲劳损伤大于 25Cr2Ni4MoV，因此材料本身的特性也对应力幅值与疲劳损伤的关系产生了较大的影响。

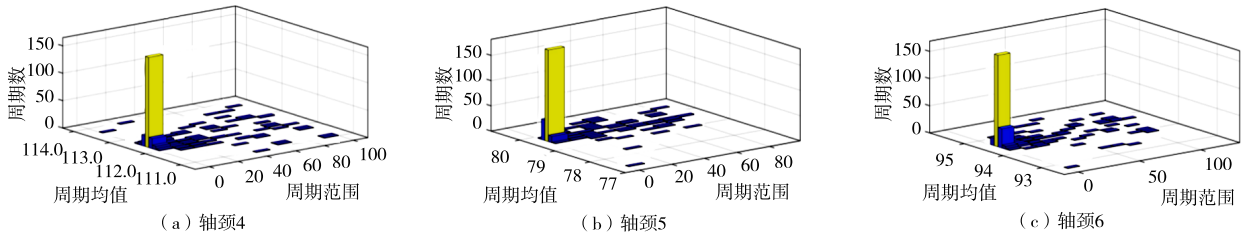


图 11　第 2 阶次同步振荡下的雨流矩阵直方图

Fig. 11　Rainflow matrix histogram under the second-order SSO

同时可以预见到，当第 2 阶次同步振荡的强度较小时，平均应力的主导作用将会增大，截面 6 极有可能成为新的危险截面。同样，在发生次同步振荡的情况下，降低机组的负荷（即降低平均应力）将有助于减小疲劳损伤。

将不同方法计算得到的疲劳损伤与有限元模型的计算结果进行对比，结果如图 12 所示，其中 A 组为根据本文方法计算的结果与有限元结果的相对误差，B 组为根据传统 Riccati 传递矩阵法计算的结果与有限元结果对比的相对误差，可见考虑初始状态的响应计算结果与有限元模型的结果更为接近。

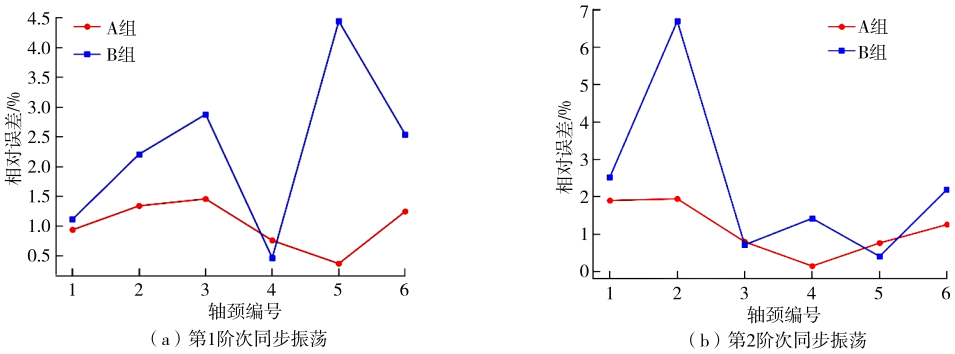


图 12　各轴颈疲劳损伤值的相对误差

Fig. 12　Relative error of fatigue damage values for each shaft journal

5　结论

（1）对于激励频率含有或接近第 1 阶固有频率的次同步振荡，截面 1 更有可能成为疲劳损伤最大的危险截面，虽然截面 2 的应力幅值相对更大，但由于平均应力与处理不同蒸汽参数导致的转子钢材料

特性的影响，最大应力幅值的部位不一定是危险截面。

(2) 对于激励频率含有或接近第 2 阶固有频率的次同步振荡，与截面 6 相比，应力幅值略低的截面 4 为危险截面。同时，材料 25Cr2Ni4MoV 因平均应力导致的实际疲劳损伤远大于 30Cr2Ni4MoV，且截面 4 与截面 6 的幅值差异较小，因此当第 2 阶次同步振荡的振幅较低，即因应力幅值引起的疲劳损伤差距较小时，截面 6 极有可能成为新的危险截面，因此需要结合次同步振荡的激励成分与幅值共同判断危险截面。

参考文献：

[1] GONG Yan, HUANG Qi, CAI Dongsheng, et al. Characteristics of sub-synchronous oscillation in grid-connected wind farm system[J]. Journal of Electronic Science and Technology, 2023, 21(4): 100228.

[2] WANG Liang, XIE Xiaorong, JIANG Qirong, et al. Investigation of SSR in practical DFIG-based wind farms connected to a series-compensated power system[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2015, 30(5): 2772-2779.

[3] LIU Huakun, XIE Xiaorong, LIU Wei. An oscillatory stability criterion based on the unified *dq*-frame impedance network model for power systems with high-penetration renewables[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2018, 33(3): 3472-3485.

[4] 向玲，陈秀娟，唐贵基. 汽轮发电机组轴系扭振响应分析[J]. 动力工程学报，2011，31(1)：27-32.
XIANG Ling, CHEN Xiujuan, TANG Guiji. Analysis on response of shaft torsional vibration in turbine-generator unit[J]. Journal of Chinese Society of Power Engineering, 2011, 31(1): 27-32.

[5] 徐鼎杰，李录平，周子健，等. 减振结构对 600 MW 汽轮发电机组轴系扭振抑制作用的研究[J]. 动力工程学报，2020，40(5)：392-397.
XU Dingjie, LI Luping, ZHOU Zijian, et al. Effects of damping structure on the suppression of torsional vibration in a 600 MW turbo-generator shaft system [J]. Journal of Chinese Society of Power Engineering, 2020, 40(5): 392-397.

[6] 顾煜炯. 汽轮发电机组扭振安全性分析与应用[M]. 北京：科学出版社，2013.

[7] TAN Xing, CHEN Guoping, CHEN Weiting, et al. Analytical approach to the stepped multi-span rotor-bearing system with isotropic elastic boundary conditions[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 100: 394-409.

[8] YANG Mo, HU Haonan, ZHOU Xian, et al. Effects of internal damping on the bending vibration characteristics of composite drive shaft[J]. Steel and Composite Structures, 2024, 52(6): 663-672.

[9] LOŠÁK P, VLACH R. Study of the response of the shaft loaded by unbalanced magnetic pull[C]//Proceedings of the 16th International Conference on Mechatronics - Mechatronika 2014. Brno, Czech Republic: IEEE, 2014: 79-84.

[10] CHASALEVRIS A, LOUIS J C. Evaluation of transient response of turbochargers and turbines using database method for the nonlinear forces of journal bearings[J]. Lubricants, 2019, 7(9): 78.

[11] HORNER G C, PILKEY W D. The Riccati transfer matrix method[J]. Journal of Mechanical Design, 1978, 100(2): 297-302.

[12] MENG Cheng, SU Ming, WANG Shaobo. An investigation on dynamic characteristics of a gas turbine rotor using an improved transfer matrix method[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2013, 135(12): 122505.

[13] XIANG Ling, YANG Shixi, GAN Chunbiao. Torsional vibration of a shafting system under electrical disturbances[J]. Shock and Vibration, 2012, 19(6): 1223-1233.

[14] 杨昆，赵鹏程，顾煜炯，等. 汽轮机扭振作用下叶片响应及应力计算[J]. 动力工程学报，2018，38(3)：193-197.
YANG Kun, ZHAO Pengcheng, GU Yujiong, et al. Response and stress calculation of blades under the action of shaft torsional vibration in turbo-generator sets[J]. Journal of Chinese Society of Power Engineering, 2018, 38(3): 193-197.

[15] LIANG Yong, AN Zongwen, LIU Bo. Fatigue life prediction for wind turbine main shaft bearings[C]// Proceedings of 2013 International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance, and Safety Engineering (QR2MSE). Chengdu, China: IEEE, 2013: 888-893.

[16] 翁建明，徐云柯，赵鹏程，等. 汽轮发电机组扭振引起疲劳损伤评价[J]. 热力发电，2020，49(1)：91-97.
WENG Jianming, XU Yunke, ZHAO Pengcheng, et al. Evaluation of fatigue damage of turbine generator shafting caused by torsional vibration[J]. Thermal Power Generation, 2020, 49(1): 91-97.

[17] GU Yujiong, JIN Tiezheng. Analysis on torsional fatigue life of turbo-generator shafts[C]//Proceedings of 2011 International Conference on Materials,

Mechatronics and Automation (ICMMA 2011). Melbourne, Australia: the Trans Tech Publications Ltd, 2011: 1858-1863.

[18] SHI J, MENG G, MA X, et al. The simulation of vibration mechanism and dynamics analysis of eccentric shaft of billet caster[C]//Proceedings of the 3rd International Conference on Machinery, Materials Science and Engineering Applications (MMSE 2013). Wuhan, China: the Trans Tech Publications Ltd, 2013: 40-43.

[19] BOVSUNOVSKY A. Effect of abnormal operation of turbine generator on the resource of steam turbine shafting[C]//Proceedings of the International Conference on Design, Simulation, Manufacturing: The Innovation Exchange. Sumy, Ukraine: Springer, 2018: 247-254.

[20] HAN Zherui, WANG Kun, LU Luyi, et al. Fatigue damage assessment method of turbine shafts' torsional vibrations under SSO incidents[J]. Engineering Failure Analysis, 2019, 105: 627-637.

[21] WANG Wenke, XU Zhenzhen, ZHU Bo, et al. High cycle fatigue behavior of a dissimilar metal welded joint in ultra-supercritical steam turbine rotor[J]. Materials Research Express, 2020, 7(1): 016565.

[22] 贾朋刚，程广福，文道维，等. 常用大轴材料旋转弯曲疲劳行为研究[J]. 大电机技术，2018(3)：27-32.
JIA Penggang, CHENG Guangfu, WEN Daowei, et al. Study on the fatigue behavior of the rotating bending of the common shaft material[J]. Large Electric Machine and Hydraulic Turbine, 2018(3): 27-32.

[23] KOHOUT J, VECHET S. Low-temperature and high-temperature anomalies in temperature shift of stress-lifetime fatigue curves[C]//Proceedings of the 5th International Conference on Materials Structure and Micromechanics of Fracture. Brno, Czech Republic, 2007.