



## 三轴地球椭球模型的坐标逆变换

张捍卫, 徐鹏飞, 王珂

引用本文:

张捍卫, 徐鹏飞, 王珂. 三轴地球椭球模型的坐标逆变换[J]. 大地测量与地球动力学, 2026, 46(6): 662–667,717.

Zhang Hanwei, Xu Pengfei, Wang Ke. Coordinate Inverse Transformation for the Triaxial Geoid Model[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2026, 46(6): 662–667,717.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.14075/j.jgg.2025.12.421>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 基于PSO-BP神经网络的中国区域大气加权平均温度模型

An Atmospheric Weighted Mean Temperature Model of China Region Based on PSO-BP Neural Network

大地测量与地球动力学. 2023, 43(12): 1300–1306 <https://doi.org/10.14075/j.jgg.2023.12.016>

#### 2017-09-07~08磁暴期间全球尺度电离层扰动

Global Scale Ionospheric Disturbance during the September 7—8, 2017 Geomagnetic Storm

大地测量与地球动力学. 2023, 43(12): 1261–1268 <https://doi.org/10.14075/j.jgg.2023.12.010>

#### SWARM卫星时变重力场反演及其精度

Inversion and Accuracy of the SWARM Time-Variable Gravity by SWARM Satellites

大地测量与地球动力学. 2023, 43(12): 1240–1245 <https://doi.org/10.14075/j.jgg.2023.03.120>

#### 基于KF-LSTM组合模型的短期电离层TEC预测

Short-Term Ionospheric TEC Prediction Based on KF-LSTM Combination Model

大地测量与地球动力学. 2023, 43(10): 1020–1025 <https://doi.org/10.14075/j.jgg.2023.10.006>

#### 基于几何分析法的低轨星座设计

LEO Constellation Design Based on Geometric Analysis Method

大地测量与地球动力学. 2023, 43(10): 1003–1007 <https://doi.org/10.14075/j.jgg.2023.10.003>

# 三轴地球椭球模型的坐标逆变换

张捍卫<sup>1</sup> 徐鹏飞<sup>1</sup> 王 珂<sup>1</sup>

1 山东理工大学建筑工程与空间信息学院, 淄博, 255000

**摘 要:**借助曲线曲面论的基本方法,提出了三轴椭球曲面上任意点不同经纬度(归化经纬度、几何经纬度和大地经纬度)的概念,建立了椭球面内外空间任意一点的笛卡尔坐标(空间直角坐标)与大地坐标(大地经纬度和大地高),以及笛卡尔坐标与几何坐标(几何经纬度和几何高)之间的理论关系模型。根据不同经纬度之间的理论关系,给出了研究点对应的大地坐标近似值。以此近似值为基础,采用牛顿迭代方法,给出了坐标逆变换的一个新方法。大量数值计算表明,对于空间任意点,利用新方法可以基本瞬时完成由笛卡尔坐标到大地坐标的计算,即使是地面附近的点也只需迭代 3 次即可完成。

**关键词:**地球椭球;归化经纬度;几何经纬度;大地经纬度;大地坐标

**中图分类号:**P226

**文献标识码:**A

最接近于大地体(大地水准面闭合形体)的椭球称为平均椭球。平均椭球曲面不但是大地测量计算的基准面,而且也是确定大地水准面形状和地图投影的参考面<sup>[1]</sup>。在大地测量计算中,经常涉及空间任意点的大地坐标与笛卡尔坐标之间的转换。其中,由大地坐标(大地经纬度和大地高)计算笛卡尔坐标(空间直角坐标)称为正变换,由笛卡尔坐标求解大地坐标称为逆变换。Featherstone 等<sup>[2]</sup>和 Panou<sup>[3]</sup>系统性地总结了近年来有关逆变换的理论和方法。Fok 等<sup>[4]</sup>依据逆变换计算过程的稳定性、准确性和速度等指标,对不同逆变换方法进行了比较。逆变换方法主要分为 2 类:一是解析方法<sup>[5]</sup>;二是数值方法<sup>[3,6]</sup>。Seemkoeei<sup>[7]</sup>指出,解析方法不如数值方法准确,而且运算速度也比较慢。如果平均椭球是非旋转对称的,那么坐标逆变换过程会变得更加困难。近年来,很多学者针对三轴椭球模型,研究由笛卡尔坐标求解大地坐标的新理论和新方法<sup>[8-10]</sup>。Kopeilin<sup>[11]</sup>研究在相对论框架下三轴参考椭球体和正常重力场表述方法。可确信未来的椭球大地测量学应该是三轴椭球大地测量学。

在三轴椭球情况下,大地坐标与笛卡尔坐标之间的理论关系是什么?如何进行逆变换?是亟待研究的问题。假设椭球中心到椭球面上任意点的向径为  $r$ ,椭球体的短轴方向为  $e_3$ ,椭球面

上任意点切平面的法线方向由单位向量  $n$  表示。对于双轴椭球体而言, $n$  始终位于向径  $r$  和短轴  $e_3$  所决定的平面内;而对于三轴椭球体, $n$  则不再处于该平面内。这就是三轴椭球与双轴椭球的本质差别,也是用三轴椭球表示大地体给测量计算带来不便的原因。利用微分几何学中的曲线和曲面描述方法,能够给出三轴椭球模型的大地坐标与笛卡尔坐标之间的理论关系;通过引入归化经纬度、几何经纬度和大地经纬度的概念,可给出三轴椭球模型坐标逆变换的一个新方法。

## 1 地球平均椭球模型

以椭球几何中心为坐标原点,3 个坐标轴分别与椭球的长轴、中轴和短轴重合的直角坐标系称为几何主轴直角坐标系。在此坐标系下,三轴椭球的曲面方程可表述为<sup>[1]</sup>:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

式中, $a$ 、 $b$ 、 $c$  分别称为三轴椭球体的长半轴、中半轴和短半轴,且  $a \geq b \geq c > 0$ 。

定义极扁率  $e$  和赤道扁率  $f$  分别为:

$$e = \frac{a-c}{a}, f = \frac{a-b}{a} \quad (2)$$

关于双轴地球椭球的几何参数见表 1。表 1 给出的是地球椭球的平均赤道半径,并不是地球

收稿日期: 2025-12-02

项目来源:国家自然科学基金(12473068, 42074002)。

第一作者简介:张捍卫,博士,教授,博士生导师,主要从事大地测量学教学与研究,E-mail: zhanwei800@163.com。

通讯作者简介:徐鹏飞,博士,讲师,主要从事大地测量学教学与研究,E-mail: xupengfei@sdut.edu.cn。

椭球的长半轴,它们之间有严格的转换关系<sup>[12]</sup>。潮汐约定,但是仍然假设平均椭球的短轴与国际  
自从 IERS1996 规范发布以来,虽然考虑了不同地球参考系(ITRS)第三轴重合。

表 1 地球平均椭球(双轴椭球)参数  
Tab.1 Parameters of the Earth's mean ellipsoid (biaxial ellipsoid)

| 双轴椭球名称                             | 平均赤道半径/m      | 极扁率 $e$      |
|------------------------------------|---------------|--------------|
| 1841 贝塞尔椭球                         | 6 377 397     | 1/299.152    |
| 1866 克拉克椭球                         | 6 378 206     | 1/294.978    |
| 1910 海福特椭球                         | 6 378 388     | 1/297.000    |
| 1940 克拉索夫斯基椭球                      | 6 378 245     | 1/298.300    |
| 1967 鲁塞恩椭球(14 届 IAG 推荐值)           | 6 378 160     | 1/298.247    |
| 1975 格勒诺布尔椭球(16 届 IAG 推荐值)         | 6 378 140     | 1/298.257    |
| 1979 堪培拉椭球(17 届 IAG 推荐值)           | 6 378 137     | 1/298.257    |
| 1983 汉堡椭球(18 届 IAG 和 IERS1989 推荐值) | 6 378 136     | 1/298.257    |
| IERS1992 推荐值                       | 6 378 136.3   | 1/298.257    |
| IERS1996 推荐值                       | 6 378 136.49  | 1/298.256 45 |
| IERS2003 和 IERS2010 推荐值            | 6 378 136.6   | 1/298.256 42 |
| Hadi Amin 椭球 <sup>[13]</sup>       | 6 378 137.678 | 1/298.256 86 |

通过卫星轨道动力学得到的赤道扁率约为 1/90 000。此数值大约为卫星出现前计算的数值的 1/3(表 2)。Burša<sup>[14]</sup>解释了出现这种差异的具体原因。表 2 列举了几个主要的三轴地球椭

球模型的几何参数。其中,Burša 等<sup>[12]</sup>给出的地球、月球和火星形状的几何参数被第十八届国际大地测量协会(IAG)采纳。关于潮汐和时间系统的约定请参阅 IERS 规范和文献[15]。

表 2 地球平均椭球(三轴椭球)参数  
Tab.2 Parameters of the Earth's mean ellipsoid (triaxial ellipsoid)

| 三轴椭球名称                       | 长半轴/m         | 长半轴方向        | 赤道扁率 $f$ | 极扁率 $e$     |
|------------------------------|---------------|--------------|----------|-------------|
| Schliephake1955 模型           | 6 378 245     | 15°E         | 1/30 001 | 1/298.299 7 |
| Eitschberger1978 模型          | 6 378 173.435 | 14°53′42″W   | 1/91 726 | 1/297.780 6 |
| 第 18 届 IAG 推荐值               | 6 378 172     | 14°54′W      | 1/92 000 | 1/297.776 0 |
| GEM-T3 引力场模型采用值              | 6 378 171.55  | 14°55′42.6″W | 1/91 035 | 1/297.766 2 |
| JGM-3 引力场模型采用值               | 6 378 171.55  | 14°55′44.8″W | 1/91 026 | 1/297.766 1 |
| Ligas2012 模型 <sup>[16]</sup> | 6 378 172     |              | 1/92 437 | 1/297.781 0 |

Bektas<sup>[17]</sup>指出,在计算大地高时,双轴椭球和三轴椭球模型的差异是:赤道处是 70 m,在纬度 45°处是 35 m;大地纬度差异是 2.267″。Husár 等<sup>[18]</sup>指出,赤道扁率可导致经纬线偏离正交性几个毫秒秒;三轴椭球比双轴椭球更接近于大地体,接近程度提高了 26%以上。因此,建议在未来的大地测量计算中,采用三轴椭球面或更高级的曲面。

2 各种经纬度的定义

假设  $\hat{e}_1$ 、 $\hat{e}_2$  和  $\hat{e}_3$  分别是几何主轴直角坐标系的单位坐标基,且在此坐标系中,椭球曲面方程通过式(1)表示。本节给出各种经纬度的定义。

2.1 归化经纬度

根据式(1),可设椭球面上任意点  $P$  的向径为:

$$\boldsymbol{r}=(a \sin u \cos v) \hat{\boldsymbol{e}}_1+(b \sin u \sin v) \hat{\boldsymbol{e}}_2+(c \cos u) \hat{\boldsymbol{e}}_3=x \hat{\boldsymbol{e}}_1+y \hat{\boldsymbol{e}}_2+z \hat{\boldsymbol{e}}_3=\rho \hat{\boldsymbol{r}} \quad (3)$$

式中, $u \in[0, \pi]$ 称为归化余纬度; $v \in[0, 2 \pi]$ 称为归化经度。 $\rho$  和  $\hat{\boldsymbol{r}}$  分别是椭球面上任意点  $P$  的向径长度和单位向量。其中:

$$\rho^2=(a \sin u \cos v)^2+(b \sin u \sin v)^2+(c \cos u)^2 \quad (4)$$

而单位向量  $\hat{\boldsymbol{r}}$  为:

$$\hat{\boldsymbol{r}}=\rho^{-1}[(a \sin u \cos v) \hat{\boldsymbol{e}}_1+(b \sin u \sin v) \hat{\boldsymbol{e}}_2+(c \cos u) \hat{\boldsymbol{e}}_3] \quad (5)$$

可见,利用归化经纬度描述曲面是最方便的,但不具有直观的几何意义。

2.2 几何经纬度

如果将椭球面上任意点  $P$  的单位向量写为:

$$\hat{\boldsymbol{r}}=(\sin \theta \cos \lambda) \hat{\boldsymbol{e}}_1+(\sin \theta \sin \lambda) \hat{\boldsymbol{e}}_2+(\cos \theta) \hat{\boldsymbol{e}}_3 \quad (6)$$

那么, $\theta \in[0, \pi]$ 称为几何余纬度; $\lambda \in[0, 2 \pi]$ 称为几何经度。

根据式(6)可得:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_3 \times \hat{\boldsymbol{r}}=-(\sin \theta \sin \lambda) \hat{\boldsymbol{e}}_1+(\sin \theta \cos \lambda) \hat{\boldsymbol{e}}_2=[-(\sin \lambda) \hat{\boldsymbol{e}}_1+(\cos \lambda) \hat{\boldsymbol{e}}_2] \sin \theta=\hat{\boldsymbol{k}} \sin \theta \quad (7)$$

式中,单位向量  $\hat{k}$  称为点  $P$  几何子午面的法线向量。

根据式(6)和式(7)可得:

$$\begin{cases} \hat{e}_3 \cdot \hat{r} = \cos\theta \\ \hat{e}_3 \times \hat{r} = \hat{k} \sin\theta \\ \hat{e}_2 \cdot \hat{k} = \cos\lambda \\ \hat{e}_2 \times \hat{k} = \hat{e}_3 \sin\lambda \end{cases} \quad (8)$$

式(8)也可以理解为关于几何经纬度的定义式。

如果令某空间点沿着椭球面上点的径向方向高出椭球面  $h$  (几何高),那么就有:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + h\hat{r}. \quad (9)$$

利用式(3)和式(6),可将式(9)表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= X\hat{e}_1 + Y\hat{e}_2 + Z\hat{e}_3 = (\rho + h)\hat{r} = \\ &(\rho + h)[(\sin\theta\cos\lambda)\hat{e}_1 + (\sin\theta\sin\lambda)\hat{e}_2 + (\cos\theta)\hat{e}_3] \end{aligned} \quad (10)$$

这就是用几何经纬度表示的椭球面外某点的直角坐标。

### 2.3 大地经纬度

令椭球曲面上任意点  $P$  的切平面的法线向量为  $\hat{n}$ ,其表达式为:

$$\hat{n} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \quad (11)$$

将式(3)代入式(11)可得:

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \frac{1}{\eta} [(bc \sin u \cos v)\hat{e}_1 + \\ &(ac \sin u \sin v)\hat{e}_2 + (ab \cos u)\hat{e}_3] \end{aligned} \quad (12)$$

其中,

$$\eta = [(bc \sin u \cos v)^2 + (ac \sin u \sin v)^2 + (ab \cos u)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

根据式(12),可令:

$$\begin{cases} \hat{e}_3 \cdot \hat{n} = \cos B \\ \hat{e}_3 \times \hat{n} = \hat{l} \sin B \\ \hat{e}_2 \cdot \hat{l} = \cos L \\ \hat{e}_2 \times \hat{l} = \hat{e}_3 \sin L \end{cases} \quad (14)$$

式中,  $B \in [0, \pi]$  称为大地余纬度;  $L \in [0, 2\pi)$  称为大地经度。单位向量  $\hat{l}$  称为点  $P$  的大地子午面的法线向量。

如果空间点  $Q$  沿着椭球面上某点的法线方向高出椭球面  $H$  (大地高),那么就有:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + H\hat{n} \quad (15)$$

根据式(3)和式(12),式(15)可表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= X\hat{e}_1 + Y\hat{e}_2 + Z\hat{e}_3 = \left[ \left( \frac{H}{\eta} bc + a \right) \sin u \cos v \right] \hat{e}_1 + \\ &\left[ \left( \frac{H}{\eta} ac + b \right) \sin u \sin v \right] \hat{e}_2 + \left[ \left( \frac{H}{\eta} ab + c \right) \cos u \right] \hat{e}_3 \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)即为用归化经纬度表示的空间点  $Q$  的直角坐标。

## 3 大地经纬度和归化经纬度之间的理论关系

基于式(12)和式(13),利用式(14)可得:

$$\begin{cases} \cos B = \frac{ab \cos u}{\sqrt{(bc \sin u \cos v)^2 + (ac \sin u \sin v)^2 + (ab \cos u)^2}} \\ \sin B = \frac{\sqrt{(bc \sin u \cos v)^2 + (ac \sin u \sin v)^2}}{\sqrt{(bc \sin u \cos v)^2 + (ac \sin u \sin v)^2 + (ab \cos u)^2}} \end{cases} \quad (17)$$

以及,

$$\begin{cases} \cos L = \frac{b \cos v}{[(b \cos v)^2 + (a \sin v)^2]^{\frac{1}{2}}} \\ \sin L = \frac{a \sin v}{[(b \cos v)^2 + (a \sin v)^2]^{\frac{1}{2}}} \end{cases} \quad (18)$$

以上两式即为利用归化经纬度计算大地经纬度的理论公式。

式(17)的反变换为:

$$\begin{cases} \cos v = \frac{a \cos L}{[(a \cos L)^2 + (b \sin L)^2]^{\frac{1}{2}}} \\ \sin v = \frac{b \sin L}{[(a \cos L)^2 + (b \sin L)^2]^{\frac{1}{2}}} \end{cases} \quad (19)$$

利用式(17),并考虑到式(19),可得:

$$\begin{cases} \cos u = \frac{c \cos B}{\sqrt{(a \sin B \cos L)^2 + (b \sin B \sin L)^2 + (c \cos B)^2}} \\ \sin u = \frac{\sqrt{(a \sin B \cos L)^2 + (b \sin B \sin L)^2}}{\sqrt{(a \sin B \cos L)^2 + (b \sin B \sin L)^2 + (c \cos B)^2}} \end{cases} \quad (20)$$

以上两式即为利用大地经纬度计算归化经纬度的理论公式。

## 4 三轴椭球下的笛卡尔坐标与大地坐标

将式(19)和式(20)代入式(13)可得:

$$\eta^2 = \frac{(abc)^2}{(a \sin B \cos L)^2 + (b \sin B \sin L)^2 + (c \cos B)^2} \quad (21)$$

将式(21)、式(19)和式(20)代入式(16)可得:

$$\begin{cases} X = \left[ \frac{a^2}{\sqrt{[(a \sin B \cos L)^2 + (b \sin B \sin L)^2] + (c \cos B)^2}} + H \right] \sin B \cos L \\ Y = \left[ \frac{b^2}{\sqrt{[(a \sin B \cos L)^2 + (b \sin B \sin L)^2] + (c \cos B)^2}} + H \right] \sin B \sin L \\ Z = \left[ \frac{c^2}{\sqrt{[(a \sin B \cos L)^2 + (b \sin B \sin L)^2] + (c \cos B)^2}} + H \right] \cos B \end{cases} \quad (22)$$

上式即为在三轴椭球模型情况下,空间点  $Q$  的大地坐标与笛卡尔坐标之间的关系。值得注意的是,大地经度  $L$  指的是椭球面上任意点大地子午面与  $xz$  平面(椭球半长轴和半短轴)的二面角,而非与格林尼治大地子午面的二面角。大地高的取值范围为:  $H \in [-c, +\infty)$ 。

在双轴椭球情况下( $a = b > c$ ),根据式(22),有:

$$\begin{cases} X = \left( \frac{a^2}{\sqrt{(a \sin B)^2 + (c \cos B)^2}} + H \right) \sin B \cos L \\ Y = \left( \frac{b^2}{\sqrt{(a \sin B)^2 + (c \cos B)^2}} + H \right) \sin B \sin L \\ Z = \left( \frac{c^2}{\sqrt{(a \sin B)^2 + (c \cos B)^2}} + H \right) \cos B \end{cases} \quad (23)$$

由于旋转对称,可设置格林尼治子午面作为经度起算面。

大地坐标与笛卡尔直角坐标之间的逆变换主要有解析方法<sup>[5]</sup>、数值方法<sup>[3,6]</sup>和三轴椭球的逆变换方法<sup>[10-11]</sup>等。本文通过引入归化经纬度、几何经纬度和大地经纬度概念,基于不同经纬度之间的理论关系,利用迭代方法进行逆变换。

## 5 由笛卡尔坐标求解大地坐标的新方法

假设空间任意点  $Q$  在几何主轴直角坐标系下的直角坐标是已知的,且直线  $OQ$  与椭球曲面的交点是  $G$ (图1)。

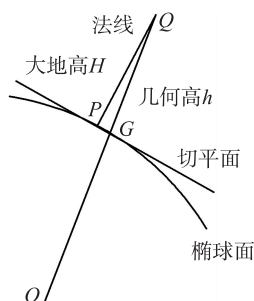


图1 大地坐标和几何坐标

Fig.1 Geodetic coordinates and geometric coordinates

第一步,利用式(10)计算点  $Q$ (或点  $G$ )的几何经纬度:

$$\begin{cases} \cos^2 \theta = \frac{Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ \cos^2 \lambda = \frac{X^2}{X^2 + Y^2} \end{cases} \quad (24)$$

在此基础上,再利用式(10)和式(4)计算  $Q$  点的几何高:

$$h = \left[ \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\left[ \left( \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] (X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

值得注意的是,在此用到几何经纬度和归化经纬度之间的关系,即:

$$\begin{cases} \cos^2 v = \frac{(b \cos \lambda)^2}{(a \sin \lambda)^2 + (b \cos \lambda)^2} \\ \cos^2 u = \frac{(ab \cos \theta)^2}{(ab \cos \theta)^2 + ((a \sin \lambda)^2 + (b \cos \lambda)^2)(c \sin \theta)^2} \end{cases} \quad (26)$$

上式类似于本文第3节中式(17)~(20)的推导,具体过程略。

第二步,基于式(24),计算  $G$  点的归化经纬度:

$$\begin{cases} \cos^2 u_G = \left[ \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} \right]^{-1} \frac{Z^2}{c^2} \\ \cos^2 v_G = \left[ \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} \right]^{-1} \frac{X^2}{a^2} \end{cases} \quad (27)$$

值得注意的是,在此用到几何经纬度和归化经纬度之间的关系,即式(26)。

第三步,基于式(27),利用式(17)和式(18)计算  $G$  点的大地经纬度:

$$\begin{cases} \cos^2 B_G = \left[ \left( \frac{bcX}{a} \right)^2 + \left( \frac{acY}{b} \right)^2 + \left( \frac{abZ}{c} \right)^2 \right]^{-1} \left( \frac{abZ}{c} \right)^2 \\ \cos^2 L_G = \left[ \left( \frac{bX}{a} \right)^2 + \left( \frac{aY}{b} \right)^2 \right]^{-1} \left( \frac{bX}{a} \right)^2 \end{cases} \quad (28)$$

至此,根据空间点  $Q$  的直角坐标( $X, Y, Z$ ),得到了椭球面上  $G$  点的大地坐标( $B_G, L_G$ )。在以上计算过程中,需要根据点  $Q$  的直角坐标判断式(24)中的几何经纬度的象限。由于不同经纬度永远在同一个象限内,因此可得出椭球面上点  $G$  的大地经纬度所在象限。



实际上,我们需要求出椭球面上点  $P$  的大地经纬度( $B_P, L_P$ )和大地高  $H$ 。由于地球几何扁率的微小性,点  $P$  和点  $G$  的大地经纬度差别很小。因此,以  $Q$  点的几何高  $h = \overline{GP}$  作为  $Q$  点大地高  $H$  的近似值,以点  $G$  的( $B_G, L_G$ )作为点  $P$  的( $B_P, L_P$ )的近似值,代入式(22)求解空间直角坐标的变化量,然后采用牛顿迭代方法求解大地坐标的变化量。直到计算的大地坐标在亚毫米量级上满足式(22)即可。

## 6 数值计算

利用符号  $gBP$ 、 $gLP$  和  $gHP$  分别表示式(22)中的  $B$ 、 $L$  和  $H$ 。这样,利用式(22)计算空间点  $Q$  的直角坐标,记为  $X_Q$ 、 $Y_Q$  和  $Z_Q$ 。然后,根据

点  $Q$  的直角坐标,利用 § 5 给出的逆变换方法,计算椭球面上点  $P$  的大地坐标(大地余纬度  $GeoB$  和大地经度  $GeoL$ ),以及空间点  $Q$  的大地高  $GeoH$ 。因此,本文将  $gBP$ 、 $gLP$  和  $gHP$  称为理论值或真值;将  $GeoB$ 、 $GeoL$  和  $GeoH$  称为计算值或者观测值。3 个差值( $GeoB - gBP$ ,  $GeoL - gLP$ ,  $GeoH - gHP$ )反映的是式(22)逆变换方法的准确度。

1) 设定  $gLP = 45^\circ$  和  $gHP = 750$  m, 图 2 反映的是 3 个差值随大地余纬度的变化情况。

2) 设定  $gBP$  和  $gLP$  都是  $45^\circ$ , 图 3 反映的是 3 个差值随大地高的变化情况。

3) 设定  $gBP = 15^\circ$  和  $gHP = 700$  m, 图 4 反映的是 3 个差值随大地经度的变化情况。

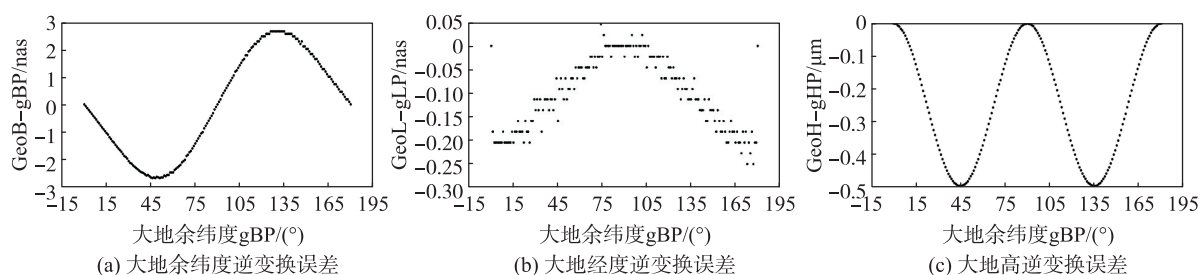


图 2 坐标逆变换误差散点图( $gLP = 45^\circ$ ,  $gHP = 750$  m;  $gBP$  取值范围是  $0^\circ \sim 180^\circ$ )

Fig.2 Scatter plots of coordinate inverse transformation error ( $gLP = 45^\circ$ ,  $gHP = 750$  m;  $gBP$  ranges from  $0^\circ$  to  $180^\circ$ )

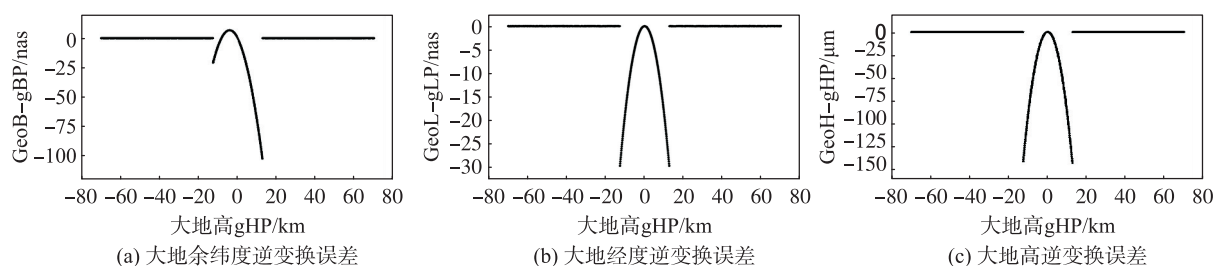


图 3 坐标逆变换误差散点图( $gBP = 45^\circ$ ,  $gLP = 45^\circ$ ;  $gHP$  的取值范围是  $\pm 70$  km)

Fig.3 Scatter plots of coordinate inverse transformation error ( $gBP = 45^\circ$ ,  $gLP = 45^\circ$ ;  $gHP$  ranges from  $-70$  km to  $+70$  km)

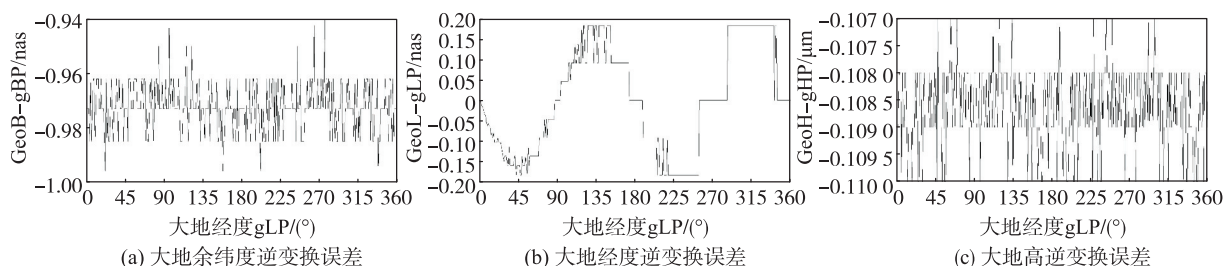


图 4 坐标逆变换误差散点图( $gBP = 15^\circ$ ,  $gHP = 700$  m;  $gLP$  的取值范围是  $0^\circ \sim 360^\circ$ )

Fig.4 Scatter plots of coordinate inverse transformation error ( $gBP = 15^\circ$ ,  $gHP = 700$  m;  $gLP$  ranges from  $0^\circ$  to  $360^\circ$ )

图 2 表示的是:当已知大地经度  $L = 45^\circ$ , 大地高  $H = 750$  m, 以及大地余纬度  $B \in [0^\circ, 180^\circ]$  的情况下, 逆变换误差随大地余纬度的变化情况。由图 2 可见, 大地余纬度的逆变换误差约为

3 nas, 大地经度的逆变换误差约为 0.3 nas, 大地高的逆变换误差约为  $0.5 \mu\text{m}$ 。当大地经度和大地高取其他数值时, 误差随余纬度的变化曲线和误差大小基本相同。

图3表示的是:当已知大地经度  $L = 45^\circ$ , 大地余纬度  $B = 45^\circ$ , 以及大地高  $H \in [-70 \text{ km}, +70 \text{ km}]$  的情况下, 逆变换误差随大地高的变化情况。由图3可见, 大地余纬度的逆变换误差约为 100 nas, 大地经度的逆变换误差约为 30 nas, 大地高的逆变换误差约为  $150 \mu\text{m}$ 。当大地经度和大地余纬度取其他数值时, 误差随大地高的变化曲线和误差大小基本相同。

图4表示的是:当已知大地余纬度  $L = 15^\circ$ , 大地高  $H = 700 \text{ m}$ , 以及大地经度  $L \in [0, 360^\circ]$  的情况下, 逆变换误差随大地经度的变化情况。由图4可见, 大地余纬度的逆变换误差大小约为 1 nas, 大地经度的逆变换误差约为 0.2 nas, 大地高的逆变换误差约为  $0.1 \mu\text{m}$ 。当大地余纬度和大地高取其他数值时, 误差随大地经度的变化曲线和误差大小基本相同。

总之, 无论何种情况(利用已知的大地坐标计算空间直角坐标, 以及利用逆变换方法由这些空间直角坐标反演大地坐标), 逆变换误差的大小均在纳角秒和微米量级上, 远低于当前空间大地测量技术的观测精度。因此, 本文的三轴椭球模型的坐标逆变换方法是可行的。

## 7 结 语

本文建立了三轴椭球大地坐标与笛卡尔坐标之间的理论模型, 引入了归化经纬度、几何经纬度和大地经纬度的概念。其中, 归化经纬度是表示所有规则曲面的 2 个独立变量, 在大地测量学中是联系几何经纬度和大地经纬度的桥梁。本文基于归化经纬度概念并利用牛顿迭代算法, 给出了坐标逆变换的一个新方法。

当给定大地经纬度和大地高后, 可计算此点的笛卡尔坐标。利用坐标逆变换新方法, 可反求大地经纬度和大地高。大量数值计算表明, 对于空间任意点, 大地余纬度的计算值与其真值之差, 以及大地经度的计算值与其真值之差是纳角秒量级; 大地高的计算值与其真值之差是微米量级。针对空间任意点, 利用新方法基本能瞬时完成计算, 最多迭代 3 次。

## 参考文献

- [1] 熊介. 椭球大地测量学[M]. 北京: 解放军出版社, 1988 (Xiong Jie. Ellipsoidal Geodesy[M]. Beijing: PLA Press, 1988)
- [2] Featherstone W E, Claessens S J. Closed-Form Transfor-

- ation between Geodetic and Ellipsoidal Coordinates[J]. *Studia Geophysica et Geodetica*, 2008, 52(1): 1-18
- [3] Panou G. Cartesian to Geodetic Coordinates Conversion on an Oblate Spheroid Using the Bisection Method[J]. *Computers & Geosciences*, 2019, 133
- [4] Fok H S, Iz H B. A Comparative Analysis of the Performance of Iterative and Non-Iterative Solutions to the Cartesian to Geodetic Coordinate Transformation [J]. *Journal of Geospatial Engineering*, 2003, 5(2): 61-74
- [5] Zhang C D, Hsu H T, Wu X P, et al. An Alternative Algebraic Algorithm to Transform Cartesian to Geodetic Coordinates[J]. *Journal of Geodesy*, 2005, 79(8): 413-420
- [6] Ligas M. Various Parameterizations of "Latitude" Equation-Cartesian to Geodetic Coordinates Transformation [J]. *Journal of Geodetic Science*, 2013, 3(2): 87-110
- [7] Seemkoeei A A. Comparison of Different Algorithms to Transform Geocentric to Geodetic Coordinates[J]. *Survey Review*, 2002, 36(286): 627-633
- [8] Feltens J. Vector Method to Compute the Cartesian (X, Y, Z) to Geodetic ( $\Phi, \lambda, h$ ) Transformation on a Triaxial Ellipsoid[J]. *Journal of Geodesy*, 2009, 83(2): 129-137
- [9] Florinsky I V. Geomorphometry on the Surface of a Triaxial Ellipsoid: Towards the Solution of the Problem [J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 2018, 32(8): 1558-1571
- [10] Chen C, Bian S F, Li S L. An Optimized Method to Transform the Cartesian to Geodetic Coordinates on a Triaxial Ellipsoid[J]. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 2019, 63(3): 367-389
- [11] Kopeikin S. Reference-Ellipsoid and Normal Gravity Field in Post-Newtonian Geodesy [M]//Puetzfeld D, Lämmerzahl C. *Relativistic Geodesy: Foundations and Applications*. Cham: Springer International Publishing, 2019
- [12] Burša M, Šima Z. Tri-Axiality of the Earth, the Moon and Mars[J]. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 1980, 24(3): 211-217
- [13] Amin H, Sjöberg L E, Bagherbandi M. A Global Vertical Datum Defined by the Conventional Geoid Potential and the Earth Ellipsoid Parameters[J]. *Journal of Geodesy*, 2019, 93(10): 1943-1961
- [14] Burša M. Fundamental Geodetic Parameters of the Earth's Figure and the Structure of the Earth's Gravity Field Derived from Satellite Data[J]. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 1972, 16(1): 10-29
- [15] Burša M. Primary and Derived Parameters of Common Relevance of Astronomy, Geodesy, and Geodynamics [J]. *Earth, Moon, and Planets*, 1995, 69(1): 51-63
- [16] Ligas M. Cartesian to Geodetic Coordinates Conversion on a Triaxial Ellipsoid[J]. *Journal of Geodesy*, 2012, 86(4): 249-256
- [17] Bektas S. Which Reference Surface? Rotational or Triaxial Ellipsoid[J]. *International Multidisciplinary Scientific Geo-Conference: SGEM*, 2015, 2(2): 609-616

(下转第 717 页)

tion research. To explore the spatiotemporal relationship between strong seismic activity in Japan and moderate-to-strong earthquakes in northeast China, this study develops a data-driven prediction model. Based on the USGS earthquake catalog from 1980 to 2024, and using  $M \geq 6.0$  earthquakes in Japan as potential triggers, the model predicts the probability of earthquakes with  $M \geq 4$  occurring in northeast China within the next 60 days. A daily-resolution time series dataset is constructed, incorporating 32-dimensional features covering earthquake statistics, spatial distribution, energy release, and aftershock sequences. Deep learning models including long short-term memory (LSTM) neural networks, attention mechanism-enhanced LSTM (Attention-LSTM), and Transformer are systematically compared against traditional machine learning methods such as logistic regression and random forest. Results indicate that the Attention-LSTM model performs optimally, achieving an F1 score of 0.915 and an AUC value of 0.661, and shows significant advantages in Molchan error diagram analysis, a method specific to earthquake prediction evaluation. The model enables both binary classification prediction and generation of spatial probability distribution maps at  $1^\circ \times 1^\circ$  grid resolution. This study demonstrates the potential of deep learning for revealing cross-regional far-field earthquake triggering mechanisms and provides new insights for short-to-medium-term regional seismic hazard assessment.

**Key words:** deep learning; attention-based long short-term memory network (Attention-LSTM); far-field earthquake triggering; spatiotemporal earthquake forecasting

(上接第 667 页)

[18] Husár L, Švaral P, Janák J. About the Geometry of the Earth Geodetic Reference Surfaces[J]. Journal of Geometry

and Physics, 2017, 120: 192-207

## Coordinate Inverse Transformation for the Triaxial Geoid Model

ZHANG Hanwei<sup>1</sup> XU Pengfei<sup>1</sup> WANG Ke<sup>1</sup>

<sup>1</sup> School of Civil Engineering and Geomatics, Shandong University of Technology, Zibo 255000, China

**Abstract:** By employing fundamental methods from the theory of curves and surfaces, the concepts of different types of latitude and longitude (reduced latitude and longitude, geometric latitude and longitude, and geodetic latitude and longitude) at an arbitrary point on a triaxial ellipsoidal surface are proposed. Theoretical relationship models are established between Cartesian coordinates (spatial rectangular coordinates) and geodetic coordinates (geodetic latitude, longitude, and height), as well as between Cartesian coordinates and geometric coordinates (geometric latitude, longitude, and height), for any point in space both inside and outside the ellipsoid. Based on the theoretical relationships among the different latitude and longitude types, approximate geodetic coordinates of the study point are derived. Using these approximations as initial values, a novel method for the inverse transformation of coordinates is presented via Newton's iterative approach. Extensive numerical calculations demonstrate that, for any arbitrary point in space, the proposed method accomplishes the transformation from Cartesian to geodetic coordinates nearly instantaneously; even for points near the Earth's surface, only three iterations are required to achieve convergence.

**Key words:** Earth ellipsoid; reduced latitude and longitude; geometric latitude and longitude; geodetic latitude and longitude; geodetic coordinates