

文章编号: 1007-7294(2025)08-1330-13

## 水下阵列方位估计技术发展综述

马超<sup>1,2</sup>, 刘磊<sup>1,2</sup>, 刘凯<sup>1,2</sup>, 陈奕宏<sup>1,2</sup>, 李志超<sup>1</sup>

(1. 中国船舶科学研究中心, 江苏 无锡 214082; 2. 深海技术科学太湖实验室, 江苏 无锡 214082)

**摘要:** 水下阵列方位估计在军事、海洋资源开发及环境监测等领域具有广泛应用, 是阵列信号处理中的关键技术。本文综述了当前水下阵列方位估计方法的发展现状, 首先介绍了基于均匀分布声压线阵的声学数学模型, 随后对方位估计方法进行了分类, 涵盖了经典波束形成方法、统计类方法、子空间类方法以及基于人工智能的到达方向(DOA)估计方法。分析了影响方位估计精度的关键因素, 包括阵列校准误差、阵列几何结构、信号处理技术及水声信道特性等。最后, 总结了当前方位估计技术的局限性, 并提出了未来的研究方向, 包括多模态数据融合、深度学习与物理模型结合、新型阵列结构等, 以期提升水下方位估计的精度和鲁棒性。

**关键词:** 水下方位估计; 阵列信号处理; 波束形成

中图分类号: TB566 文献标识码: A doi: 10.3969/j.issn.1007-7294.2025.08.015

## A review of the development of underwater target azimuth estimation technology

MA Chao<sup>1,2</sup>, LIU Lei<sup>1,2</sup>, LIU Kai<sup>1,2</sup>, CHEN Yi-hong<sup>1,2</sup>, LI Zhi-chao<sup>1</sup>

(1. China Ship Scientific Research Center, Wuxi 214082, China; 2. Taihu Laboratory of Deepsea and Technological Science, Wuxi 214082, China)

**Abstract:** Underwater target azimuth estimation is a critical technology in array signal processing, with wide applications in military operations, marine resource development, and environmental monitoring. A comprehensive review of the current development status of underwater target azimuth estimation methods is provided in this paper. Firstly, an introduction to the acoustic mathematical model based on an uniformly distributed sound pressure line array was given. Next, azimuth estimation methods are classified into four categories: classical beamforming, statistical, subspace, and AI-based Direction of Arrival (DOA) estimation methods. Key factors affecting azimuth estimation accuracy, such as array calibration errors, array geometry, signal processing techniques, and underwater acoustic channel characteristics, were also analyzed. Finally, the paper discussed the limitations of current azimuth estimation technologies and proposed future research directions, including multimodal data fusion, integration of deep learning with physical models, and the development of new array structures etc, to enhance the accuracy and robustness of underwater azimuth estimation.

**Key words:** underwater target azimuth estimation; array signal processing; beamforming

收稿日期: 2025-02-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (92252205)

作者简介: 马超(1993-), 女, 博士, 高级工程师, 通讯作者, E-mail: machao702@163.com;

刘磊(1992-), 男, 博士, 高级工程师; 刘凯(1996-), 男, 硕士, 工程师;

陈奕宏(1980-), 男, 硕士, 研究员; 李志超(1996-), 男, 硕士, 工程师。

## 0 引 言

水下阵列方位估计是阵列信号处理领域的热点问题,通过对目标信号进行多个传感器采集,计算阵列信号之间的相关性,进而估计出目标信号的来波方位等信息,在海洋领域中作用重大,特别是在军事应用、海洋资源开发、环境监测等方面发挥了十分重要的作用<sup>[1-3]</sup>。在军事应用方面,方位估计是实施潜艇探测、敌方舰艇追踪以及水雷规避的关键技术,通过精确的目标方位估计,可以提高水下战场的态势感知能力,确保海上军事行动的安全和成功;在海洋油气资源开发过程中,准确的方位估计有助于定位水下基础设施和设备,确保操作安全,减少潜在的环境影响;在环境监测方面,水下方位估计技术可用于监测和定位海洋动物、污染源或其他环境要素,帮助科学家更好地理解海洋生态系统,支持环境保护工作。总之,水下阵列方位估计是提升水下作业安全性、有效性和精度的关键技术,在多个领域的应用中具有重要意义。

水下阵列方位估计对水下目标检测与估计具有关键作用,直接影响检测的精度、效率和系统的可靠性。水下方位估计能够精确确定目标的角度和方向,当多个水下目标同时存在时,精确的方位估计可以帮助系统区分不同目标的方位,提升多目标分辨能力,从而提升多目标检测与识别能力,避免混淆。结合目标的方位信息,可以进行更复杂的运动轨迹预测和目标分类等任务,为后续的数据融合提供基础数据。因此,水下阵列方位估计在水下目标检测与估计中起着核心作用,是提升检测系统精度、效率和抗干扰能力的关键因素。

本文首先以均匀分布的声压线阵为例,介绍阵列接收信号的声学数学模型。其次,分别对波束形成类方法、统计类方法、子空间类方法、基于人工智能的 DOA 估计方法等四大类方位估计方法进行综述。然后,从阵列校准误差、阵列几何结构、信号处理技术、水声信道特性和水声信号特性五个方面分析影响方位估计精度的因素。最后,从技术现状概述、当前技术的局限性和未来发展方向三个方面对全文进行总结。

## 1 方位估计的声学数学模型

设在二维平面内,一个以等间距 $d$ 分布的 $N$ 元线阵,信号从阵列的远场入射,整个基阵接收信号如图 1 所示<sup>[1-3]</sup>。

文中各种模型均在以下假设成立的条件下建立:

- (1)阵列处于信号的远场中,在该条件下接收到的信号可近似为平面波;
- (2)阵元间距比较小,不同阵元接收到信号的幅值相同;
- (3)传播介质均匀且各向同性;
- (4)各阵元接收灵敏度相同;
- (5)忽略阵元间互耦。

$K$ 个目标信号可表示为 $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T$ ,所对应的目标与直线阵列所形成的夹角分别为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$ ,在 $t$ 时刻的接收信号 $X(t)$ 为

$$\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T \quad (1)$$

对于宽带数据,可以通过傅里叶变换得到频域窄带数据,然后进行窄带波束形成,于是,在考虑波束形成问题时,我们通常以窄带模型作为标准。对于窄带信号,假设 $K$ 个目标的频率分别为 $f_1, f_2, \dots, f_K$ ,阵列的输出可以表示为

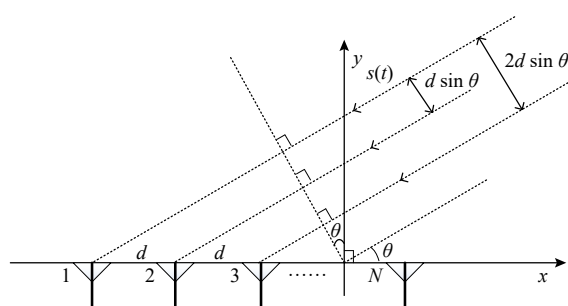


图 1 基阵接收信号示意图

Fig.1 Schematic diagram of the array for signal reception

$$\mathbf{X}(t) = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_K)] \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ \vdots \\ n_N(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{N}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t)]^T$  为阵列接收到的噪声,  $a(\theta_k)$  为入射角度为  $\theta_k$  的信号的阵列流形向量:

$$\mathbf{a}(\theta_k) = [a_1(\theta_k), a_2(\theta_k), \dots, a_k(\theta_k)]^T = [e^{j2\pi f_k \tau_1(\theta_k)}, e^{j2\pi f_k \tau_2(\theta_k)}, \dots, e^{j2\pi f_k \tau_N(\theta_k)}]^T \quad (3)$$

式中,  $c$  是声传播速度,  $\tau_n$  表示相对于参考阵元而言, 信号到达第  $n$  个阵元的时延,  $\tau_n = (n-1)d \sin \theta / c$ 。

那么, 均匀线列阵的接收信号可以写为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{A}(\theta)$  为阵列流形向量矩阵,  $\mathbf{A}(\theta) = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_K)]$ ,  $\mathbf{S}(t)$  为信源矩阵,  $\mathbf{N}(t)$  为噪声矩阵。

## 2 方位估计方法分类

### 2.1 波束形成类方法

#### 2.1.1 传统波束形成方法

最经典的波束形成算法是常规波束形成方法 (conventional beamforming, CBF)。波束形成技术通过对空间分布的多元阵列各阵元信号进行时域或空域补偿, 使信号在特定方向上产生相干叠加以实现指向性。常规时域波束形成的过程是对阵列各阵元的输出信号  $x_m(t)$  施加加权向量  $w_m$  以调整幅度和相位延迟, 然后将延迟处理后的相干信号进行叠加, 从而生成波束输出:

$$y(t) = \sum_{m=1}^M w_m x_m(t) = \mathbf{W}^H \mathbf{X}(t) \quad (5)$$

常规波束形成又叫 Bartlett 波束形成, 其权矢量和方位谱分别为

$$\mathbf{W}_{\text{CBF}}(\theta) = \mathbf{a}(\theta) / \sqrt{M} \quad (6)$$

$$P_{\text{CBF}}(\theta) = \mathbf{w}^H(\theta) \mathbf{R}_x \mathbf{w}(\theta) \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{a}(\theta)$  为信号方向的导向矢量,  $M$  为阵元数,  $\mathbf{R}_x$  为信号协方差矩阵。CBF 算法本质上是一种将时域傅里叶谱估计方法扩展到空域的简单实现。该方法计算简单, 适用于实时性要求高、计算资源有限的环境。该方法的缺点是分辨率受限于傅里叶变换的瑞利极限, 无法分辨邻近目标。

#### 2.1.2 Capon 算法

常规波束形成算法的角度分辨能力受限于空域傅里叶变换的瑞利分辨极限, 因此提升分辨率成为国内外研究的重点问题。20 世纪 70 年代, Capon<sup>[4]</sup> 提出最小方差无畸变响应 (MVDR) 波束形成器, 开创了高分辨空间谱估计方法的研究方向。Capon 算法具有出色的旁瓣抑制能力, 分辨率优于传统波束形成器, 并可突破瑞利分辨极限。2003 年, Stoica<sup>[5]</sup> 等人提出稳健 Capon (Robust Capon Beamforming, RCB) 算法, 通过约束导向矢量在不确定球域内, 并借助拉格朗日乘子求解优化问题, 提高了 Capon 算法在系统误差条件下的性能。文献[6] 将鲁棒波束形成算法推广至宽带信号领域, 利用导向协方差矩阵对单频点进行自适应权值计算, 在降低计算复杂度的同时保证了算法性能, 并通过海洋实验数据验证其有效性。文献[7] 提出了非相干宽带 Capon 算法, 同时引入波束域进行 DOA 估计。

MVDR 波束形成器的基本原理是最小化噪声输出方差, 同时保证信号输出无失真, 使输出信噪比增益达到最大值。因此, 该波束形成器能够有效抑制噪声和干扰, 并具有较高的方位分辨能力。

MVDR 波束形成加权向量的约束的数学表达式为<sup>[4]</sup>

$$\begin{cases} \min_w \mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} \\ \text{s. t. } \mathbf{w}^H \mathbf{a}_s = 1 \end{cases} \quad (8)$$

上式中  $R_n$  为噪声协方差矩阵,  $\mathbf{a}_s$  为信号方向的导向矢量。公式(5)~(8)描述了一个带约束的优化问题,其解可通过拉格朗日乘子法获得,从而计算出 MVDR 波束形成器的加权向量:

$$w_{\text{MVDR}} = \frac{R_n^{-1} \mathbf{a}_s}{\mathbf{a}_s^H R_n^{-1} \mathbf{a}_s} \quad (9)$$

在主动声纳中,由于发射信号的波形和时间信息已知,可以在发射信号的间隙利用背景噪声的协方差矩阵  $R_n$  计算权矢量  $w$ ,并在后续的信号检测中保持该权矢量不变。

基于此, MVDR 波束形成器的输出功率为

$$P_{\text{MVDR主}} = w^H R_x w = \frac{\mathbf{a}_s^H R_n^{-1} R_x R_n^{-1} \mathbf{a}_s}{\mathbf{a}_s^H R_x^{-1} \mathbf{a}_s} \quad (10)$$

而在被动声纳系统中,接收到的信号通常包括目标的辐射噪声、舰船机械噪声等信号,既包含“信号”又包含噪声,因此无法直接提取纯噪声的协方差矩阵来计算权矢量。此时,需要用接收信号的协方差矩阵  $R_x$  代替噪声协方差矩阵,得到权向量约束的数学表达式为

$$\begin{cases} \min_w w^H R_x w \\ \text{s. t. } w^H \mathbf{a}_s = 1 \end{cases} \quad (11)$$

求得被动声纳系统中 MVDR 波束形成的权矢量为<sup>[4]</sup>

$$w_{\text{MVDR}} = \frac{R_x^{-1} \mathbf{a}_s}{\mathbf{a}_s^H R_x^{-1} \mathbf{a}_s} \quad (12)$$

MVDR 波束输出的功率谱为

$$P_{\text{MVDR被}} = w^H R_x w = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) R_x^{-1} \mathbf{a}(\theta)} \quad (13)$$

尽管波束形成类方法已在理论和实践中得到了验证与应用,其性能仍受限于阵列孔径、信噪比以及快拍数等因素,在不理想条件下,其测向效果可能难以达到预期水平。而 MVDR 方法的分辨率高于 CBF,可抑制旁瓣干扰,适用于中等信噪比,需要自适应抗干扰的场景,但对阵列校准误差敏感,且稳健性差。

### 2.1.3 反卷积类方法

反卷积波束形成是一种高分辨率波束形成方法,能够同时实现窄波束和低旁瓣效果。该方法结合了 MVDR 的窄主瓣、低旁瓣特点,同时又具备 CBF 的稳健性。Yang 将反卷积技术应用于水下均匀声压阵<sup>[8]</sup>和圆阵信号处理<sup>[9]</sup>中,并通过海试数据验证了其稳健性、分辨率及增益性能,其结果表明,与常规波束形成相比,反卷积波束形成具备更窄的主瓣、更低的旁瓣以及更高的增益,效果显著提升。针对反卷积波束形成方法在移变点扩散函数(PSF)阵列中的应用问题,孙大军等<sup>[10]</sup>提出了一种基于非负最小二乘法(NNLS)求解矢量阵移变模型的反卷积方法,随后又进一步研究了矢量阵 PSF 的移变特性,并将 NNLS 和 DAMAS 两种适用于移变模型的反卷积算法应用于矢量阵中,提出了一种改进的 RL 算法<sup>[11]</sup>,实验表明该扩展 RL 算法在低信噪比条件下,主瓣更窄、旁瓣更低且稳健性更强,同时适用于其他具有移变 PSF 的阵列。

在阵列信号处理中,阵列的常规波束形成的空间谱输出可以看作是,指向每一个角度的指向性函数(即方向图)和该角度的信源强度分布函数两者乘积之和,在数学上可以用一个叠加积分来表示<sup>[12-13]</sup>:

$$P(\theta) = \int R(\theta|\vartheta) S(\vartheta) d\vartheta \quad (14)$$

式中,  $\vartheta$  表示目标方位;  $S(\vartheta)$  表示源的方位分布函数,代表目标方位和强度信息,理想情况下是  $\delta$  函数,这里等效为时域系统的输入信号  $x(t)$ ;  $R(\theta|\vartheta)$  是目标指向  $\vartheta$  方位的阵列指向性函数,等效于时域中的系统单位脉冲响应  $h(t)$ ,也被称作反卷积中的点扩散函数(PSF);  $P(\theta)$  为常规波束形成的空间谱输出,等效为系统的输出  $y(t)$ ,其值可等效于各个目标方向的阵列指向性函数经过目标强度加权后的叠加积分。假设阵列的指向性函数  $R(\theta|\vartheta)$  具有移不变性,则有  $R(\theta|\vartheta) = R(\theta - \vartheta)$ ,此时叠加积分可以被表示为如下卷积过程:

$$P(\theta) = \int R(\theta|\vartheta)S(\vartheta)d\vartheta = R(\theta) * S(\theta) \quad (15)$$

因此,对常规波束输出空间谱 $P(\theta)$ 和自然指向性函数 $R(\theta)$ 反卷积能估计出源的方位分布函数 $S(\theta)$ ,其理想情况下是 $\delta$ 函数,必然是对目标方位的高分辨估计结果。

此处重点解释一下移变和移不变两个物理概念,在时域系统中,若 $\tau$ 时刻的脉冲响应函数 $h(t|\tau)$ 是单位脉冲响应 $h(t)$ 在时间上 $\tau$ 个延迟,即 $h(t|\tau) = h(t - \tau)$ ,则称这个系统为时不变系统,否则,该系统为时变系统。相似的,在空域系统中,若指向某个角度 $\vartheta$ 的阵列的指向性函数即点扩散函数 $R(\theta|\vartheta)$ 是自然指向性函数 $R(\theta)$ 的移位,即 $R(\theta|\vartheta) = R(\theta - \vartheta)$ ,则称该阵列的点扩散函数具有移不变特性,简称该阵列为移不变阵列,否则该阵列的点扩散函数具有移变特性,简称该阵列为移变阵列。

反卷积类方法通过反卷积处理进一步提升分辨率,可处理相干源,定位精度高。海试数据的结果表明,采用反卷积类方法可以降低空间谱的背景噪声级,有良好的方位估计性能<sup>[14]</sup>,但计算复杂度高,迭代收敛速度慢,实时性差。

## 2.2 统计类方法

### 2.2.1 最大似然估计方法

该方法假设各阵元接收到的噪声为加性的高斯白噪声,且彼此相互独立。噪声均值为0,方差为 $\sigma_n^2$ 。那么,对于 $N$ 次采样数据的联合概率密度函数为

$$f(X_1, \dots, X_N) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\det(\pi\sigma_n^2 I_M)} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_n^2} \|X_i - A(\theta)S\|^2\right\} \quad (16)$$

式中, $\|\cdot\|$ 表示 Euclidean 范数,对上式两边取负对数可得

$$-\ln(f) = -MN \ln(\pi\sigma_n^2) - \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N \|X_i - A(\theta)S\|^2 \quad (17)$$

首先,求取未知参数 $\sigma_n^2$ 和 $S$ 的确定性最大似然估计,分别为

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{M} \text{tr}\{P_A^+ \hat{R}\}, \quad \hat{S} = A^+ X \quad (18)$$

式中, $\text{tr}\{\cdot\}$ 表示矩阵的迹; $P_A^+$ 表示矩阵 $A$ 的正交投影补矩阵; $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$ , $\hat{R}$ 为协方差矩阵。因此,可得参数 $\theta$ 的确定似然估计为<sup>[15-16]</sup>

$$\hat{\theta} = \arg \min \{\text{tr}\{P_A^+ \hat{R}\}\} = \arg \max_{\theta} \{\text{tr}\{P_A \hat{R}\}\} \quad (19)$$

式中, $\hat{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p]^T$ , $P_A = A(A^H A)^{-1} A^H$ , $P_A^+ = I - A(A^H A)^{-1} A^H$ 。

最大似然类方法基于统计最优性,是渐进无偏估计解,分辨率高,但计算量大,易陷入局部最优解,依赖于初始值。

### 2.2.2 稀疏贝叶斯估计方法

稀疏贝叶斯学习方法的基本思想是,待估计参数 $\theta$ 是随机的,和一般随机变量没有本质区别,因此只能根据观测样本估计参数 $\theta$ 的分布。

稀疏贝叶斯学习(Sparse Bayesian Learning, SBL)是求解稀疏重构的一种算法,因此也是求解压缩感知问题的一种解决途径,由 Tipping 在 2001 年提出<sup>[17-19]</sup>。该方法以贝叶斯定理为研究基础,其基本思想是把待估计的未知超参数向量视为符合特定先验分布的随机向量,引入目标的先验分布;再依据似然函数和先验概率,通过贝叶斯定理计算后验概率分布;最后,综合考虑先验信息和后验概率,估计未知参数。由于 SBL 算法充分利用接收数据和噪声参数的先验信息,因此有更高的角度估计精度和空间分辨率。

假设式(1)~(15)中的加性噪声服从复高斯分布,单频观测向量 $Y$ 的似然函数可以表示为

$$p(Y|X; \sigma^2) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \|Y - AX\|_F^2\right)}{(\pi\sigma^2)^{NL}} \quad (20)$$

式中,  $N$  为阵元数,  $L$  为快拍数。

假设复信号的幅度  $x_{ml}$  是关于快拍数和不同源之间相互独立的, 先验概率服从均值为 0、方差为  $\gamma_m \in \gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_M]^T$  的复高斯分布:

$$p(X; \gamma) = \prod_{l=1}^L \prod_{m=1}^M p_m(x_{ml}; \gamma_m) = \prod_{l=1}^L CN(0, \Gamma) \quad (21)$$

即每一个快拍的源向量是具有潜在奇异协方差矩阵的多元高斯分布函数, 其中  $M$  是扫描角度的总点数。

$$\Gamma = \text{diag}(\gamma) = E[x_l x_l^H; \gamma] \quad (22)$$

式中,  $\gamma$  是待估计的超参数, 代表信号的功率。

根据贝叶斯准则, 和信号幅度有关的后验概率密度可以用先验概率密度和似然函数表达:

$$p(X|Y; \gamma, \sigma^2) = \frac{p(Y|X; \sigma^2)p(X; \gamma)}{p(Y; \gamma, \sigma^2)} \quad (23)$$

给定  $\gamma$  和  $\sigma^2$ , 上式分母  $p(Y; \gamma, \sigma^2)$  是一个常数, 对后验概率起到归一化的作用, 忽略分母时,

$$p(X|Y; \gamma, \sigma^2) \propto p(Y|X; \sigma^2)p(X; \gamma) \propto \frac{e^{-\text{tr}\left((X-\mu_X)^H \sum_x^{-1} (X-\mu_X)\right)}}{\left(\pi^N \det \sum_x\right)^L} = CN\left(\mu_X, \sum_x\right) \quad (24)$$

其中,

$$\mu_X = E\{X|Y; \gamma, \sigma^2\} = \Gamma A^H \sum_y^{-1} Y \quad (25)$$

$$\sum_y = E\{y_l y_l^H\} = \sigma^2 I_N + A \Gamma A^H \quad (26)$$

观测向量  $Y$  的边缘概率可通过对似然函数和先验概率的乘积的积分得到:

$$p(Y; X, \sigma^2) = \int p(Y|X; \sigma^2)p(X; \sigma^2)dX = \frac{e^{-\text{tr}(Y^H \sum_y^{-1} Y)}}{\left(\pi^M \det \sum_y\right)^L} \quad (27)$$

超参数  $\gamma$  则通过最大化边缘概率密度得到, 通过推导, 得到迭代估计超参数的 SBL1 算法为<sup>[19]</sup>

$$\gamma_m^{\text{new}} = \frac{\gamma_m^{\text{old}}}{\sqrt{L}} \left\| Y^H \sum_y^{-1} a_m \right\|_2 / \sqrt{a_m \sum_y^{-1} a_m} \quad (28)$$

在迭代求得的超参数  $\gamma_m^{\text{new}}$  中选取信源个数  $K$  个最大值, 作为估计的信号功率, 根据  $K$  个信号的导向矢量  $A_M = (a_{m1}, \dots, a_{mK})$  估计超参数噪声功率  $\sigma^2$ :

$$\sigma^2 \approx \frac{\text{tr}[(I_N - P)S_y]}{N - K} \quad (29)$$

SBL 算法把待估计的未知超参数向量  $\gamma$  视为符合某种先验分布的随机向量, 确定先验分布; 再依据观测向量, 通过贝叶斯定理计算后验概率分布; 最后, 综合考虑先验信息和后验概率, 通过不断迭代, 更换超参数, 直至满足收敛条件, 停止迭代, 判断出未知参数。因此基于贝叶斯稀疏估计的 DOA 方法具有以下优点: 利用先验信息高效调参, 加速寻找最优参数, 在声源分布函数未知的情况下运算速度快<sup>[20]</sup>。该方法的缺点就是计算复杂度高, 收敛速度慢, 对参数敏感。

## 2.3 子空间类方法

### 2.3.1 MUSIC 算法

多重信号分类算法 (multiple signal classification, MUSIC) 由 Schmidt<sup>[21]</sup> 提出, 该算法通过对接收信

号的协方差矩阵进行特征分解,分离噪声子空间与信号子空间,利用二者的空间正交性,进行谱峰搜索和 DOA 估计,计算出信号的入射方向和强度。MUSIC 具有普遍适用性,只要已知阵型,不管是否是线阵,是否是等间隔分布,都可以使用。

数据协方差矩阵可以表示为

$$R_x = E\{xx^H\} = A(\theta)R_sA^H(\theta) + R_n \quad (30)$$

式中,  $R_s$ 、 $R_n$  分别为信号协方差矩阵和噪声协方差矩阵。对协方差矩阵  $R_x$  进行分解,  $R_x = E\Lambda E^H$ , 式中  $\Lambda$  是降序排列的特征值构成的对角矩阵,特征值大的特征向量对应信号子空间,特征值小的特征向量对应噪声子空间。 $E = [E_s, E_n]$  是特征值对应的特征向量组成的信号子空间与噪声子空间。

由于信号子空间和噪声子空间具有正交性,可以通过下式表征的谱峰搜索极大值的位置,由此得到信号的方位信息<sup>[21]</sup>。

$$P_{E-MUSIC} = \frac{1}{a(\theta)^H E_n E_n^H a(\theta)} \quad (31)$$

### 2.3.2 ESPRIT 算法

另一种典型的 DOA 估计方法是由 Roy<sup>[22]</sup>、Rao<sup>[23]</sup> 提出的旋转不变子空间算法 (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques, ESPRIT), 能够利用信号子空间的旋转不变性直接求解信源信号的 DOA。它首先将阵列分为两个相同的子阵列,且每个子阵的阵元数和间距都是已知的。2 个子阵接收的数据分别为  $X_1(t)$  和  $X_2(t)$ :

$$X_1(t) = A_1(\theta)S(t) + N_1(t) \quad (32)$$

$$X_2(t) = A_2(\theta)S(t) + N_2(t) = A_1(\theta)\psi S(t) + N_2(t) \quad (33)$$

式中,  $A_1(\theta)$  和  $A_2(\theta)$  是子阵 1 和子阵 2 的导向矢量矩阵,  $\psi = \text{diag}[\exp(j\psi_1), \dots, \exp(j\psi_N)]$ 。且有:

$$\psi_i = \frac{2\pi d \sin \theta_i}{\lambda} \quad (34)$$

因此,计算两个子阵列输出信号之间的相位差,通过分析相位差,估计信号的角度或者方向。在求解时,可以利用最小二乘(LS)或者总体最小二乘(TLS)等方法求解。LS-ESPRIT 的求解过程如下:

- (1) 得到阵列接收协方差矩阵:  $R = XX^T = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} [X_1(t) X_2(t)]$ ;
- (2) 对  $R$  进行特征值分解,由较大的  $K$  个特征值对应的特征向量构建信号子空间  $E_z = [E_x E_y]^T$ ;
- (3) 计算  $[E_x^H E_y]^T E_x^H E_y$  的特征值,  $\psi_i = \lambda_i ([E_x^H E_y]^T E_x^H E_y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$  代表信号的个数;
- (4) 根据式(34),计算波达方位估计角  $\theta_i$ 。

MUSIC 以及 ESPRIT 这类子空间类的高分辨算法利用阵列流形向量与接收数据协方差矩阵的噪声子空间之间的正交性对入射信号进行 DOA 估计,在已知信号个数、适度的信噪比、充足的快拍数条件下具有近似最优的估计性能。此类方法虽然有较高的角度分辨率,但需要求解信号的协方差矩阵,当直达波存在相干相扰时,阵列的协方差矩阵出现秩亏损,使特征分解到的信号子空间处理方法无法分辨相干源,因此之后又出现了一系列的针对这些方法的解相干处理方法。Evans 等<sup>[24-26]</sup> 于 1981 年提出空间平滑技术,根据均匀线阵的平移不变性,将整个阵列看作是多个重叠的子阵列,并求出子阵列的协方差矩阵均值用于解相干。

子空间类 DOA 估计方法虽然在实际水声数据使用中得到了验证和应用,但此类算法的缺点在于当信噪比较低或快拍数较少时,无法完全区分信号子空间和噪声子空间,导致其估计性能显著下降<sup>[27]</sup>,另外,这类算法需要已知信号个数,信号个数估计的不准确也会导致性能的下降。

## 2.4 基于人工智能的 DOA 估计方法

近年来,伴随人工智能技术的兴起,群智能算法和神经网络得到了快速发展,出现了很多基于机器学习模型的 DOA 估计算法<sup>[28-32]</sup>。机器学习模型已被证明在处理模式识别问题上极具优势,通过将 DOA 估计视作一个分类问题,即将机器学习模型应用在该领域,实现复杂环境下的鲁棒 DOA 估

计。在此基础上,深度学习模型展示出比机器学习更强的估计性能,基于深度学习的 DOA 估计算法通过对阵列信号进行简单的特征提取处理,并训练深度神经网络,以构建信号特征与 DOA 标签之间的映射关系,从而实现 DOA 估计目的。本文简单介绍一下卷积神经网络的支持向量机模型。

#### 2.4.1 卷积神经网络

卷积神经网络(CNN)是一种典型的深度学习网络模型,在模式识别、视频图像分析、语音信号处理等领域中被广泛应用<sup>[33]</sup>。CNN 仿照生物神经元,设计了一种能够实现权值共享的网络结构,有效减少网络中的权值参数量,合理地实现网络结构的简化。对于多维的输入特征,CNN 通过特征提取等方式完成数据重构,利用卷积、滑动等方式,使得 CNN 对于特征的形变情况(平移、缩放等)具有高度不变性。

卷积神经网络经典模型如图 2 所示。卷积层的核心是利用卷积核(filter)对输入特征进行局部感知,从而提取出局部特征。以扫描窗的形式,对矩阵做卷积,每层包含多个卷积核,每个核对应一个输出通道。池化层又称为降采样层,池化层用于对卷积后的特征进行降维,同时保留最重要的信息,减小过拟合,简化了网络模型。SoftMax 层能够将全连接层的神经元输出,整合映射到(0,1)区间内,将多分类问题,转化成概率问题,以此实现分类输出的目的。SoftMax 层也可以替换成 Regression 层用来处理回归问题,丰富 CNN 的应用领域。

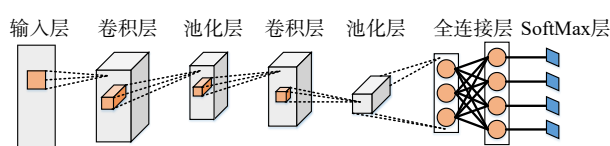


图 2 卷积神经网络模型

Fig.2 Model of convolutional neural network

利用卷积神经网络(CNN)进行 DOA(Direction of Arrival, 到达方向)估计的方法,主要是利用 CNN 对水下阵列信号数据进行特征提取,从中捕捉阵列数据中的空间特征和时频信息,从而实现了对声源方位的估计。输入特征是由阵列信号协方差矩阵的虚部矩阵和实部矩阵组成的双通道输入特征,以 DOA 角度作为分类标签,使用如图 2 的经典卷积神经网络结构,包括卷积层、池化层、全连接层和 SoftMax 层,激活函数使用 ReLU 函数。当输入数据是多通道信号的协方差矩阵时,卷积核可以从中提取出阵列中各通道之间的相位关系和能量分布,这些信息与声源的方位密切相关。将 DOA 估计问题转换为分类问题,即将方位角度离散化为若干个角度区间(类别),通过全连接层进行分类预测,输出每个角度区间的概率分布。

#### 2.4.2 支持向量机模型

支持向量机(SVM)是一种强大的监督式机器学习算法,常被用于解决分类和回归分析的问题,它的核心思想就是将训练集在一个高维的样本空间中寻找一个最佳的分隔超平面,将不同类别的样本进行区分。

如图 3 所示,在高维  $x_1, x_2$  空间存在一个数据集,存在 a 和 b 两个超平面,对于样本  $\square$ , 两个超平面 a 和 b 判定结果存在误差, a 判定为  $\square$  而 b 判定为  $\triangle$ 。显然, a 的泛化能力优于 b。如图 3 所示, a 在划分两个样本时,明显避免了  $\triangle$  和  $\square$  的噪声干扰和局部扰动。一般用线性方程来表示超平面,表达式如下<sup>[34]</sup>:

$$w^T x + l = 0 \quad (35)$$

式中,  $w$  代表法向量,  $l$  代表位移, 一个线性方程中这两个参数就决定一个超平面,此超平面可以表示为  $(w, l)$ 。

利用 SVM 进行 DOA 估计,是将声源的到达角度作为一个分类或回归问题来处理,通过 SVM 的分类或回归能力,从阵列接收到的信号中提取特征并进行训练,从而预测声源的方位。SVM 作为一种有监督的机器学习方法,在 DOA 估计中具有良好的泛化能力和处理高维数据的优势。通常使用多通道的水下声学阵列接收的信号,输入到 SVM 模

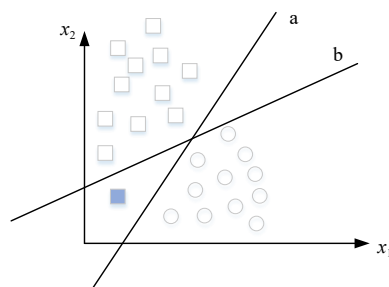


图 3 支持向量机算法中分隔超平面示意图

Fig.3 Schematic diagram of the separation hyperplane in the support vector machine algorithm

型中,可以是时域信号,也可以是频域数据。为了让 SVM 能够有效地进行训练,通常需要对原始信号进行特征提取。常用的特征包括相位差特征、功率谱特征和协方差矩阵特征等。将 DOA 估计问题视作分类任务,可以将角度范围离散化为多个区间,每个区间代表一个类别, SVM 通过学习这些类别标签来进行分类。将经过特征提取的信号数据及其对应的真实 DOA 作为训练集,输入 SVM 模型中进行训练。在训练过程中, SVM 会寻找一个最优的超平面,使得不同类别(或不同角度范围)之间的间隔最大化。训练完成后, SVM 能够将新的阵列信号样本分类到某个角度区间。

基于人工智能的方法可以自适应学习复杂环境特征,适用于阵列误差较大或未知干扰较多的场景,但需依赖大量标注数据进行训练,模型泛化能力较差。

### 3 影响方位估计精度的因素

#### 3.1 阵列校准误差

阵列校准误差主要包括阵元位置误差、阵元增益和相位差异等。阵元位置误差是由于实际阵列几何结构与理论模型存在偏差,导致接收信号的时延和相位信息出现误差,从而引起方位估计偏差。阵元之间的增益和相位差异会导致信号幅度和相位失真,使得接收到的波束形成结果偏离实际目标方向。校准误差在高精度方位估计中尤为重要,特别是对于高分辨率算法而言,其对小尺度的误差非常敏感。未校准或校准不当的阵列不仅会降低方位估计的精度,还可能引入伪峰,产生虚假目标。因此,阵列校准是确保水声方位估计精度的关键步骤,尤其在复杂的水下环境中,合理的校准方法可以显著提升方位估计性能。阵列误差校正的方法主要分为需要辅助信源的有源校正和不需要辅助信源的自校正方法<sup>[35-37]</sup>。

#### 3.2 阵列几何结构

阵列的形状和间距对水下阵列方位估计的精度有显著影响。首先,阵列的几何形状决定了接收信号的空间采样特性,不同的阵列形状(如线阵、圆阵、平面阵等)具有不同的方位分辨能力。线阵通常用于一维方位估计,具有较好的方位分辨率,但在二维空间中无法直接估计俯仰角;而圆阵和平面阵能够在二维或三维空间中同时估计方位和俯仰角,适用于复杂的水下环境<sup>[38]</sup>。除了以上常用的阵列外,2010年 Adhikari 等<sup>[39-40]</sup>提出互质线阵的概念,通过阵元数为  $M+N-1$  的互质阵可以获得  $O(MN)$  的自由度,在阵元数固定的情况下,获得更大的阵列孔径。其次,阵元间距的设计对于方位估计精度尤为重要。过大的阵元间距会导致空间模糊或引起栅瓣效应,使多个目标无法有效区分;过小的间距则会降低阵列的空间分辨能力,增加硬件和处理成本。因此,合理的阵元间距设计不仅要避免空间模糊,还要兼顾信号的带宽和阵列的物理尺寸。此外,阵元数量的增加通常可以提高方位估计的精度和分辨率,尤其是在低信噪比或多路径环境下。然而,阵列形状和间距的选择,需要综合考虑实际应用需求和工程实现的限制,以在方位估计精度、计算复杂度和系统成本之间取得平衡。

#### 3.3 信号处理技术

##### 3.3.1 去噪技术

在水下阵列方位估计中,去噪技术是信号处理的关键环节之一,直接影响估计精度。水下环境中广泛存在各种噪声源,如背景噪声、海洋生物噪声以及人为噪声(如船只的机械噪声),这些噪声会干扰接收阵列对目标信号的精确捕捉。去噪技术旨在从噪声中提取目标信号,降低信噪比对方位估计的负面影响。常用的去噪方法包括波束形成、时频分析<sup>[41]</sup>、小波变换<sup>[42]</sup>以及自适应滤波<sup>[43]</sup>等。波束形成技术能够通过空间滤波来抑制非目标方向的噪声,提高目标方向的信噪比,从而提高方位估计的精度。自适应滤波和小波去噪等技术则能够更有效地处理复杂噪声背景,通过多尺度分析或频域滤波分离噪声与信号。去噪效果的优劣直接关系到信号的质量,进而影响后续的方位估计算法的准确性。去噪不充分可能导致信号失真或目标方位模糊,而过度去噪则可能损失有效信号成分。因此,合理的去噪策略可以显著提升水声方位估计的精度,尤其在低信噪比和多路径干扰显著的环境中,去噪技术的重要性尤为突出。

### 3.3.2 方位估计算法

在水下阵列方位估计中,信号处理技术中的方位估计算法选择对估计精度有重要影响。不同算法在处理噪声、多路径效应和信号复杂性等方面的性能各异。如第2章所示,常用的方位估计算法包括经典的延迟和求和波束形成算法、统计类方法、子空间类高分辨率算法,以及基于深度学习的现代方法。波束形成算法通过对接收信号进行加权组合,能有效抑制非目标方向的噪声,但其分辨率受到阵列规模和信噪比的限制,在复杂环境下的估计精度有限。相比之下,MUSIC和ESPRIT等高分辨率算法通过构建信号的协方差矩阵,能够实现更高的角度分辨率,尤其在多目标场景下表现出色。然而,这类算法对阵列校准误差和噪声的敏感性较高,容易在低信噪比或强多路径环境中失效。此外,近年来基于机器学习和深度学习的算法引入了更强的噪声鲁棒性和非线性信号处理能力,能够通过大数据训练提高方位估计的精度。然而,这些方法通常需要大量的训练数据和计算资源,实际应用中仍面临挑战。因此,方位估计算法的选择需要根据具体的应用场景进行权衡,既要考虑估计精度,又要综合算法复杂度、实时性和环境适应性。

### 3.4 水声信道特性

水声信道具有复杂的物理特性,包括声速剖面的变化、多路径效应、吸收和散射等。这些特性会改变声波的传播路径和信号特性,从而影响阵列接收到的信号,并进一步影响方位估计<sup>[44-45]</sup>。首先,声速剖面的变化会导致声波传播路径弯曲,特别是在温度、盐度或水深变化显著的情况下,这种折射效应会引起方位估计误差。其次,多路径效应是水声信道中最常见的问题,由于水下声波遇到海底、海面或其他障碍物时产生反射、折射和散射,导致接收阵列获得多个到达路径的信号。这些多路径信号的干扰可能引发阵列误判信号来源方向,进而影响方位估计的精度。此外,信道中的噪声特性(如背景噪声、海浪噪声和生物噪声)也会干扰信号接收,降低信噪比,导致估计误差增大。信号在传播过程中还会受到吸收和散射的影响,特别是高频信号,衰减较快,导致接收信号的强度减弱。因此,水声信道特性的复杂性对方位估计提出了更高的要求,需要采用有效的信号处理技术(如去噪、均衡和多路径抑制)来克服这些不利影响,从而提高方位估计的准确性。

### 3.5 水声信号特性

在水下阵列方位估计中,信号特性对估计精度有着显著影响。首先,信号的频率和带宽直接影响估计的分辨率和精度。高频信号具有较高的空间分辨率,能够实现更精确的方位估计,但由于高频声波在水中衰减较快,适用于较近距离的目标探测;低频信号传播距离较远,适合远距离探测,但其分辨率较低,容易受到环境噪声的干扰。信噪比也是影响方位估计精度的关键因素。较高的信噪比能够增强信号的可检测性,减少估计误差,而低信噪比环境下,噪声可能会淹没目标信号,导致方向估计出现偏差。信号的调制方式和时间特性也对估计精度有影响,宽带信号可以提高时间和频率分辨率,减少多路径效应的影响,从而改善估计精度。因此,信号特性的选择和优化是确保水声方位估计精度的关键之一。

## 4 总 结

### 4.1 技术现状

当前的水下阵列方位估计技术已经取得了显著进展,涵盖了从传统的波束形成方法到高分辨率算法和基于人工智能等多种技术手段。这些方法在理想条件下能够实现较高的定位精度,广泛应用于军事、海洋探测和环境监测等领域,这些实际应用展示了方位估计技术在多样化水下环境中的适用性和重要性。在实际应用时,我们可以根据场景需求及方位估计方法的优缺点进行权衡,选择适用的方位估计方法。

### 4.2 当前技术的局限性

当前的水下阵列方位估计方法在复杂环境下面临诸多局限,如多目标干扰和多路径效应等。在多

目标干扰的情况下,水下阵列方位估计方法面临显著的局限性。现有的估计算法在面对多个目标时,容易受到信号相互干扰的影响,导致估计精度下降。空间分辨率不足时,多个目标的信号可能无法有效区分,特别是在目标彼此接近或信号强度相似的情况下,阵列接收到的信号会产生重叠或混叠,致使方位估计失效。此外,多目标条件下的栅瓣效应和伪峰出现也会干扰算法的正常运行,导致虚假目标或位置错误。这些问题在复杂海洋环境中尤为突出,现有方法尚缺乏足够的鲁棒性和适应性,难以在多目标环境中维持高精度的方位估计。多路径效应是水声传播中的难题之一,信号在海底、海面以及水下物体的反射会干扰原始信号,导致方位估计出现偏差。环境噪声和人为噪声带来的噪声干扰,也会影响低信噪比条件下的信号检测,增加估计误差。此外,现有的高分辨率算法(如 MUSIC、ESPRIT)虽然在理想条件下能提供较高精度,但在实际应用中往往对阵列校准误差和水声信道变化非常敏感,尤其是在动态、复杂环境中表现不佳。现有技术还难以兼顾复杂环境下的鲁棒性与实时性,限制了其在实际海洋探测和监控中的广泛应用。

### 4.3 未来研究方向

#### 4.3.1 多模态传感器融合

单一声呐阵列在复杂环境下的精度受限,而通过融合不同类型的传感器(如光学、磁性、和惯性传感器等),可以增强对目标的感知能力。多模态融合技术能够综合多种信号源的信息,提升方位估计的准确性和鲁棒性,尤其在信号质量较差或噪声干扰严重的情况下,能够弥补单一传感器的局限性,实现更全面的环境感知和目标定位。

#### 4.3.2 深度学习与 AI 技术的融合

深度学习和人工智能(AI)技术的融合也将在方位估计中发挥越来越重要的作用。传统方位估计算法对噪声、多路径效应和环境变化敏感,而深度学习方法能够通过海量数据训练构建复杂的非线性模型,提升在多目标、噪声环境下的鲁棒性。AI 技术还可以自动适应不同的水下环境,实时优化估计算法,解决动态变化和复杂条件下的方位估计问题。此外,AI 技术与自动化系统的结合可以实现智能化的水下探测和目标识别。

#### 4.3.3 新型阵列结构

在新型阵列结构的研究中,未来可能会看到更多创新阵列设计,如三维阵列、分布式阵列和变形阵列。这些结构能够提供更高的空间分辨率和更广的探测范围,特别是在多目标和多路径干扰下的应用中表现更佳。分布式阵列通过多个分散节点协同工作,不仅提高了信号覆盖面,还增强了系统的抗故障能力;而变形阵列能够根据实际环境进行动态调整,提升对复杂水声信道的适应性和方位估计的灵活性。

### 参 考 文 献:

- [1] 曾耀平. 被动多目标分辨与方位估计技术研究[D]. 西安:西北工业大学, 2016.  
Zeng Y P. Studies on the passive multi-target resolving and DOA estimation techniques[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2016. (in Chinese)
- [2] 杨 龙. 水下目标方位估计与稳健自适应波束形成方法研究[D]. 西安:西北工业大学, 2017.  
Yang L. Studies on direction of arrival estimation of underwater targets and robust adaptive beamforming method[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2017. (in Chinese)
- [3] 张 涵. 多目标条件下 DOA 估计方法研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学, 2023.  
Zhang H. Research on DOA estimation algorithm for multi-objective[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2023. (in Chinese)
- [4] Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis[C]//Proc. IEEE, 1969.
- [5] Stoica P, Wang Z, Li J. Robust Capon beamforming[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2003, 10(6): 172-175.
- [6] Somasundaram S D. Wideband robust Capon beamforming for passive sonar[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2013, 38(2): 308-322.

- [7] Azimi-Sadjadi M R, Pezeshki A, Roseveare N. Wideband DOA estimation algorithms for multiple moving sources using unattended acoustic sensors[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, 44(4): 1585–1599.
- [8] Yang T C. Deconvolved conventional beamforming for a horizontal line array[J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2017, 99: 1–13.
- [9] Yang T C. Performance analysis of superdirectivity of circular arrays and implications for sonar systems[J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2018, 99: 1–11.
- [10] 孙大军, 马 超, 梅继丹, 等. 基于非负最小二乘的矢量阵反卷积波束形成方法[J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2019, 40(7): 1217–1223.  
Sun D J, Ma C, Mei J D, et al. Deconvolved conventional beamforming of a vector-sensor array based on non-negative least squares[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2019, 40(7): 1217–1223. (in Chinese)
- [11] Sun D J, Ma C, Yang T C, et al. Improving the performance of a vector sensor line array by deconvolution[J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2019, 99: 1–15.
- [12] 马 超. 空域移变反卷积波束形成方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2021.  
Ma C. Research on spatial shift variant deconvolved beamforming[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2021. (in Chinese)
- [13] 孙大军, 马 超, 梅继丹, 等. 反卷积波束形成技术在水声阵列中的应用[J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2020, 41(6): 860–869.  
Sun D J, Ma C, Mei J D, et al. Application of deconvolved beamforming technology in underwater acoustic array signal processing[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2020, 41(6): 860–869. (in Chinese)
- [14] 杨泽慧, 聂炜航, 程高峰, 等. 全变分约束的解卷积常规波束形成方位谱估计算法[J]. *声学学报*, 2025, 50(1): 68.  
Yang Z H, Nie W H, Cheng G F, et al. Total variation constrained deconvolved conventional beamforming algorithm for azimuthal spectral estimation[J]. *Acta Acoustica*, 2025, 50(1): 68–76. (in Chinese)
- [15] 王辉辉, 陈玉凤. 一种基于连续蚁群算法的快速最大似然 DOA 估计[J]. *火控雷达技术*, 2014, 43(2).  
Wang H H, Chen Y F. Fast estimation of maximum likelihood DOA based on continuous ant colony algorithm[J]. *Fire Control Radar Technology*, 2014, 43(2). (in Chinese)
- [16] Hu Y, Lu J, Qiu X. A maximum likelihood direction of arrival estimation method for open-sphere microphone arrays in the spherical harmonic domain[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2015, 138: 791–794.
- [17] Tipping M E. Sparse Bayesian learning and the relevance vector machine[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2001, 1: 211–244.
- [18] Gerstoft P, Mecklenbrucker C F. Multisnapshot sparse bayesian learning for DOA[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2016.
- [19] 刘天娇. 稀疏贝叶斯学习理论及其在水声阵列信号处理中的应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2019.  
Liu T J. Sparse Bayesian learning theory and its application in underwater acoustic array signal processing [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2019. (in Chinese)
- [20] 赵 磊. 基于稀疏贝叶斯学习的水下机动小平台被动声呐方位估计技术研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学. 2024.  
Zhao L. Research on passive sonar direction of arrival estimation technology for underwater small mobile platforms based on sparse bayesian learning [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2024. (in Chinese)
- [21] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276–280.
- [22] Roy R, Paulraj A, Kailath T. ESPRIT-Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 1986, 37(7): 984–995.
- [23] Rao D V B, Arun K S, Kung S Y. State-space and singular-value decomposition-based approximation methods for the harmonic retrieval problem[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1983, 73(12): 1799–1811.
- [24] Evans J E, Sun D F, Johnson J R. Application of advanced signal processing techniques to angle of arrival estimation in ATC navigation and surveillance systems[R]. T Lincoln Lab, Lexington, MA Tech Rep, 1982.
- [25] Carlson B D. Covariance matrix estimation errors and diagonal loading in adaptive arrays[J]. *IEEE Transactions on A & E System*, 1988, 24(4): 397–401.
- [26] Dmochowski J, Benesty J, Affes S. Linearly constrained minimum variance source localization and spectral estimation[J]. *IEEE Transactions on Audio Speech & Language Processing*, 2008, 16(8): 1490–1502.

- [27] 刘章孟. 基于信号空域稀疏性的阵列处理理论与方法[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2014.  
Liu Z M. Spatial sparsity-based theory and methods of array signal processing[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2014. (in Chinese)
- [28] Ge Z, Chen Z, Yin F. SVM-based binaural sound source localization[J]. *Journal of Information & Computational Science*, 2015, 12(14): 5459–5467.
- [29] Sun L J, Cheng Q. Indoor sound source localization and number estimation using infinite Gaussian mixture models[C]//2014 48th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Grove, CA, USA, 2014.
- [30] Kwon B, Park Y. Multiple sound sources localization using the spatially mapped GCC functions[C]//2009 ICCAS-SICE, Fukuoka, Japan, 2009.
- [31] Yook D, Lee T, Cho Y. Fast sound source localization using two-level search space clustering[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics.*, 2016, 46(1): 20–26.
- [32] Chung H, Seo H, Joo J, et al. Off-grid DOA estimation via two-stage cascaded neural network[J]. *Energies*, 2021, 14(1): 228.
- [33] 权天祺. 基于深度学习的水声阵列信号波达方位估计[D]. 青岛: 青岛科技大学, 2022.  
Quan T Q. DOA estimation of underwater acoustic array signal based on deep learning [D]. Qingdao: Qingdao University of Science&Technology, 2022. (in Chinese)
- [34] 李鹏飞. 基于深度学习的水声阵列 DOA 估计方法研究[D]. 镇江: 江苏科技大学, 2022.  
Li P F. Research on DOA estimation methods for underwater acoustic array based on deep learning[D]. Zhenjiang: Jiangsu University of Science and Technology, 2022. (in Chinese)
- [35] 于 斌, 宋 铮, 张 军. 阵列天线阵元位置误差的一种有源校正方法[J]. *雷达科学与技术*, 2004(5): 315–320.  
Yu B, Song Z, Zhang J. A new technique for calibrating position uncertainty of sensor array using signal sources[J]. *Radar Science and Technology*, 2004(5): 315–320. (in Chinese)
- [36] Wijnholds S J, Allejan V D V. Multisource self-calibration for sensor arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(9): 3512–3522. (in Chinese)
- [37] 耿盛楠, 金 强. 基于阵元位置误差自校正的 DOA 估计算法[J]. *科技创新与应用*, 2018(10): 18–21.  
Geng S N, Jin Q. DOA estimation algorithm based on self correction of array element position error[J]. *Technology Innovation and Application*, 2018(10): 18–21. (in Chinese)
- [38] 刘 伟, 王昌明, 张自嘉. 水声二维角估计中几种基阵的方向图比较[J]. *舰船科学技术*, 2009, 31(5): 5.  
Liu W, Wang C M, Zhang Z J. Comparison and analysis of several arrays pattern for estimation of underwater acoustic 2-D angle[J]. *Ship Science and Technology*, 2009, 31(5): 5. (in Chinese)
- [39] Adhikari K, Buck J R, Wage K E. Beamforming with extended coprime sensor arrays[C]//2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Vancouver, BC, Canada, 2013.
- [40] 张小飞, 林新平, 郑 旺, 等. 互质阵中空间谱估计研究进展[J]. *南京航空航天大学学报*, 2017, 49(5): 636–644.  
Zhang X F, Lin X P, Zheng W, et al. Research progress on spatial spectrum estimation based on coprime array[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautic & Astronautics*, 2017, 49(5): 636–644. (in Chinese)
- [41] 邹红星, 周小波, 李衍达. 时频分析: 回溯与前瞻[J]. *电子学报*, 2000, 28(8): 78–84.  
Zou H X, Zhou X B, Li Y D. Which time-frequency analysis—A survey[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2000, 28(8): 78–84. (in Chinese)
- [42] 曹 毅, 张榆锋, 毛选珍. 小波分析及其在信号处理中的应用[J]. *现代电子技术*, 2003(15): 3.  
Cao Y, Zhang Y F, Mao X Z. Wavelet transform and application in signal processing[J]. *Modern Electronic Technology*, 2003(15): 3. (in Chinese)
- [43] 陈卫东, 王长焕, 解 静. 基于自适应滤波的宽带阵列信号处理技术[J]. *无线电通信技术*, 2009, 35(5): 3.  
Chen W D, Wang C H, Xie J. Wideband array signal processing technology based on adaptive filtering[J]. *Radio Communication Technology*, 2009, 35(5): 3. (in Chinese)
- [44] 韩 闯, 于树华, 时胜国, 等. 基于水平阵的柱面声源高分辨时反聚焦定位方法[J]. *振动与冲击*, 2015, 34(22): 6.  
Han C, Yu S H, Shi S G, et al. High-resolution time reversal focused localization method for cylindrical noise source with horizontal array[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, 34(22): 6. (in Chinese)
- [45] 于 歌. 水声干扰环境下的移动目标探测与参数估计方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2018.  
Yu G. Detection and parameter estimation of moving target in strong interference underwater environment[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2018. (in Chinese)