

文章编号: 1007-7294(2025)03-0497-09

改进的均匀等效理论在声学覆盖层吸声系数快速预报中的应用研究

胡昊灏^{1a}, 黄一帆^{1b}, 李东升², 胡东森²

(1. 江苏科技大学 a. 海洋学院; b. 船舶与海洋工程学院, 江苏 镇江 212100; 2. 中国船舶科学研究中心, 江苏 无锡 214082)

摘要: 本文提出一种改进的声学覆盖层均匀等效理论, 将含周期空腔的声学覆盖层等效为均匀层以提高声吸收计算效率。在传统均匀化理论的基础上, 综合考虑势流理论、Minnaert 共振散射理论推导含周期球形空腔声学覆盖层的等效密度、等效模量以及等效厚度三个关键参数, 通过解析计算获取覆盖层吸声系数。探讨了该算法的有效性、高效性以及适应性, 可为实现声学覆盖层中低频吸声系数快速预报提供技术支撑。

关键词: 声学覆盖层; 共振散射; 均匀化; 吸声系数

中图分类号: TB535 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.1007-7294.2025.03.014

Application of improved homogenization theory in fast prediction of acoustic coating absorption coefficient

HU Hao-hao^{1a}, HUANG Yi-fan^{1b}, LI Dong-sheng², HU Dong-sen²

(1a. School of Oceanology; b. School of Naval Architecture and Ocean Engineering, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212100, China; 2. China Ship Scientific Research Center, Wuxi 214082, China)

Abstract: This paper aims to propose an improved theory of homogenization for acoustic coatings, the acoustic coating with periodic cavities can be considered equivalent to a uniform layer, thus improving the computational efficiency of sound absorption. Based on the traditional homogenization theory, parameters of equivalent density, modulus, and thickness for the acoustic coating by are derived incorporating the potential flow theory and the Minnaert resonance scattering theory. The sound absorption coefficient of the coating is then obtained through analytical calculation. This paper specifically addresses the effectiveness, efficiency, and adaptability of the proposed algorithm, thus offering technical support for accurately predicting the sound absorption coefficient of acoustic coatings within the middle and low-frequency range.

Key words: acoustic coating; resonance scattering; homogenization; sound absorption coefficient

0 引言

潜艇作为水下航行器的代表, 具有强大的威慑作用, 是各国军事硬实力的体现。对于潜艇来说, 声

收稿日期: 2024-09-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52201366)

作者简介: 胡昊灏(1983-), 男, 博士, 高级工程师, 通讯作者, E-mail: 18751589046@163.com;

黄一帆(2000-), 女, 硕士研究生。

隐身性能至关重要,它是衡量潜艇结构生存能力和战斗能力的重要指标^[1]。在潜艇表面敷设声学覆盖层,既可以降低潜艇结构的目标强度,又可以抑制潜艇内部的振动和噪声,是一种提高潜艇声隐身性能的有效方法。

为了提高降噪性能,近些年科研人员开发了多种类型的声学覆盖层周期单元,且取得了较好的吸声效果^[2-4]。但周期单元内部结构复杂,机理获得不易^[5-6],在进行参数化分析时要进行多次重复的数值计算,耗时较长^[7]。针对以上问题,科研人员提出了以守恒理论为基础的周期结构均匀化技术^[8],其关键在于获取均匀化后的等效密度、等效模量、等效厚度等参数。李爽^[9]利用优化算法对消声瓦进行的参数反演,具有一定的工程指导意义。张嘉伟等^[10]以声管测试技术为基础,利用有限元法建立覆盖层均匀化传递矩阵,能提高参数分析时的计算效率。但以上方法存在计算时间长、物理机制不甚清晰等问题。Khelif等^[11]提出了基于准静态极限的均匀化理论,以弹性波动理论为基础,给出了低频时周期单元均匀化参数,然而该理论忽略了弹性波在周期结构内的多重散射,当周期单元尺寸相对波长较大时失效。

本文提出一种基于改进的多重散射理论的覆盖层声学参数均匀等效方法,并应用于计算覆盖层的吸声系数。该方法基于管路势流阻塞系数理论计算覆盖层的等效厚度,结合弹性波在覆盖层中的Minnaert共振散射理论和守恒原理来获得等效模量,并利用多层介质传递矩阵模型获得吸声系数。在验证算法的准确性之后,分析算法的几何适用性和影响预报精度的关键因素。本文研究工作可为潜艇的减振降噪提供相关方法指导和技术支持。

1 周期空腔覆盖层声吸收计算理论

1.1 均匀等效理论

根据 Bloch 定理可知,晶胞间的波幅变化仅取决于传播向量,而不依赖于晶胞在周期系统中的位置,因此只需选取周期结构中的一个单元晶胞进行研究即可。图 1 给出了周期单元均匀化示意图,图 1(a)中的含周期空腔声学覆盖层在 x, y 方向同时具有周期性,图 1(b)选取含球形空腔(半径为 a)的单个晶胞模型代替整个覆盖层,并将其等效为图 1(c)中的均匀层,本文旨在通过理论推导获取均匀层的等效厚度 l_e 、等效密度 ρ_e 和等效体积模量 K_e 。

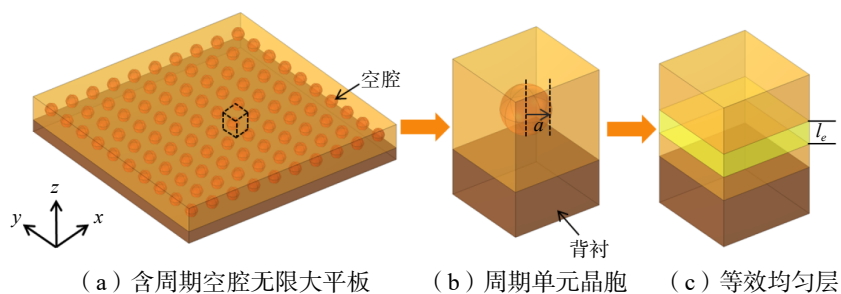


图 1 声学覆盖层三维等效示意图

Fig.1 Schematic diagram of acoustic coating equivalization in 3D case

图 2 为二维等效示意图,图 2(a)为含周期空腔吸声层,单胞晶格常数满足 $d_x = d_y$, d_z 为沿声传播方向的单胞厚度,图 2(b)展示了空腔层等效后的均匀层,其等效厚度为 l_e 。均匀层的等效密度 ρ_e 和等效体积模量 K_e 可以通过以下守恒方程得到:

$$\langle \rho \rangle = \rho_e (l_e / d_z) + \rho [1 - (l_e / d_z)] \quad (1)$$

$$\frac{1}{\langle K \rangle} = \frac{(l_e / d_z)}{K_e} + \frac{1 - (l_e / d_z)}{K} \quad (2)$$

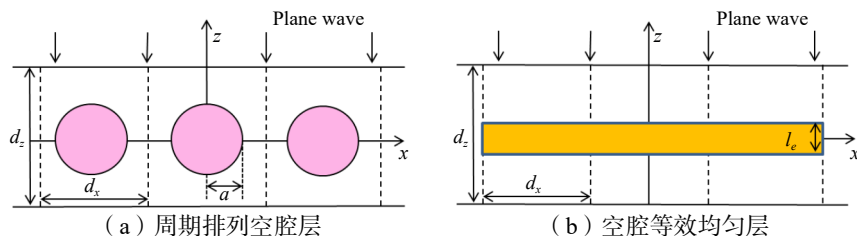


图2 声学覆盖层二维等效示意图

Fig.2 Schematic diagram of acoustic coating equivalization in 2D case

式中, ρ 和 K 分别为橡胶基体的密度和体积模量, $\langle\rho\rangle$ 和 $\langle K\rangle$ 分别为周期单元吸声层的平均密度和平均体积模量。(1)、(2)两式中有三个关键参数, 分别是等效密度 ρ_e 、等效体积模量 K_e 、等效厚度 l_e , 它们也是本文推导的重点。

首先是等效密度 ρ_e 的获取, 由式(1)可知, 只要知道平均密度 $\langle\rho\rangle$ 与均匀层等效厚度 l_e 即可得到等效密度 ρ_e , 其中平均密度 $\langle\rho\rangle$ 可由质量守恒表示为

$$\langle\rho\rangle = \rho(1 - \alpha) \quad (3)$$

式中, $\alpha = 4\pi a^3/3d_z^2d_x$ 为空腔的填充率。

等效厚度 l_e 的获取需借助管路势流理论中的阻塞长度概念^[12], 该理论将粘弹性覆盖层中球形空腔运动特性类比为管中含周期气泡的势流问题, 考虑一种极限情况下, 在管中相距足够远的两点之间插入一个球体, 保证两点上的流动互不干扰, 此时管内的流体势会增加 $\Delta\phi$; 同样, 如果两点之间的距离增加 ΔL , 管中没有插入球体时的流体势也出现 $\Delta\phi$ 的变化, 则此时的 ΔL 被定义为阻塞长度, 即类比本文提出的等效厚度 l_e 概念。阻塞长度的取值与球形空腔的填充率有关, 通过极限理论可知, 势流中球体在低和高填充率两种极限时的阻塞长度(即等效厚度)分别为

$$l_{e,\text{low}} = 2\pi a \left(\frac{a}{d_y} \right)^2 \quad (4)$$

$$l_{e,\text{high}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \frac{a}{\sqrt{(1/\zeta) - 1}} \quad (5)$$

式中, $\zeta = \sqrt{\pi a}/d_y$ 。利用低填充率和高填充率下的极限等效厚度加权, 可以获得一般情况下的等效厚度插值函数, 并引入幂指数 β , 从而得到等效厚度 l_e 表达式为

$$l_e = (1 - \zeta^\beta)l_{e,\text{low}} + \zeta^\beta l_{e,\text{high}} \quad (6)$$

由(2)式可知, 等效模量 K_e 与等效厚度 l_e 和平均模量 $\langle K\rangle$ 有关, 下面将从 Minnaert 共振散射理论出发^[13], 首先推导含周期球形空腔介质中的平均声速 $c(\mathbf{r})$, 进而得到平均模量。

对于平面波入射情况下的球腔散射问题, 当考虑球腔间的多重散射时, 介质中的平均声速 $c(\mathbf{r})$ 满足:

$$\frac{1}{c(\mathbf{r})^2} = \frac{1}{c_0^2} + \frac{4\pi f_s(\mathbf{r})}{\omega^2} \quad (7)$$

式中, \mathbf{r} 为散射体的位置向量, $f_s(\mathbf{r})$ 是与矢量 \mathbf{r} 相关的散射函数。

对于半径为 a 的球形空腔阵列, 散射函数 f_s 可以定义^[13]为

$$f_s = \frac{a}{(\omega_0/\omega) - I + i\delta} \quad (8)$$

式中, $\delta = 4G''/\rho\omega^2 a^2$ 为阻尼系数, G'' 为橡胶剪切模量 G 的虚部。参数 I 用于表征球腔阵列之间的多重散射效应, 本文称之为耦合散射系数, 当 $I = 1$ 时, f_s 对应单个散射体的散射函数。

将式(8)代入式(7)中, 可得到平均声速 $c(\mathbf{r})$ 的表达式, 利用声速与模量的关系 $c = \sqrt{K/\rho}$ 得到平均模量表达式为

$$\langle K\rangle = \frac{K(1 - \alpha)}{1 + 4\pi K f_s/\rho\omega^2 d_y^2 d_z} \quad (9)$$

式中, K 代表橡胶基体的体积模量。

由(8)式可知耦合散射系数 I 是影响平均模量 $\langle K \rangle$ 计算精度的重要参数, 对于球腔阵列相关文献^[13-15] 给出了不同条件下的 I 表达式, 结合本文具体工况, 通过计算选取 I 的表达式为

$$I = \exp(-2\pi a/d_y) \quad (10)$$

将公式(3)、(6)和(9)代入公式(1)和(2)中, 即可得到等效密度 ρ_e 和等效体积模量 K_e 的表达式:

$$\rho_e = \rho(1 - \alpha d_z/l_e) \quad (11)$$

$$K_e = \frac{K(1 - \alpha)}{\frac{d_z}{l_e} \left(1 + \frac{4\pi K}{\rho \omega^2 d_y^2 d_z} f_s \right) + \left(2 - \alpha - \frac{d_z}{l_e} \right)} \quad (12)$$

1.2 传递矩阵计算吸声系数

在 1.1 节获取均匀层等效参数的基础上, 通过传递矩阵法可得到吸声系数表达式。首先由等效密度 ρ_e 和等效模量 K_e 得到覆盖层中的等效波数 k_i 和等效阻抗 Z_i :

$$k_i = \omega \sqrt{\rho_e/K_e} \quad (13)$$

$$Z_i = \sqrt{\rho_e K_e} \quad (14)$$

最终得到各层的传递矩阵表达式为

$$T_i = \begin{bmatrix} \cos(k_i d_i) & j Z_i \sin(k_i d_i) \\ j \sin(k_i d_i)/Z_i & \cos(k_i d_i) \end{bmatrix} \quad (15)$$

全局传递矩阵为

$$T = \prod_{i=1}^n T_i = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \quad (16)$$

由此可得覆盖层的透射系数 T_r 、反射系数 R_e 和吸声系数 Q 表达式分别为

$$T_r = \left(\frac{1}{2} \left| T_{11} + \frac{T_{21}}{Z_t} + Z_i T_{21} + \frac{Z_i}{Z_t} T_{22} \right| \right)^{-1} \quad (17)$$

$$R_e = \frac{T_{11} + \frac{T_{12}}{Z_t} - Z_i T_{21} - \frac{Z_i}{Z_t} T_{22}}{T_{11} + \frac{T_{12}}{Z_t} + Z_i T_{21} + \frac{Z_i}{Z_t} T_{22}} \quad (18)$$

$$Q = 1 - |T_r|^2 - \frac{Z_t}{Z_i} |R_e|^2 \quad (19)$$

式中, Z_i 、 Z_t 分别为平面波入射端和透射端流体介质的阻抗。

2 算法验证

为了验证本文算法的准确性, 利用有限元法建立含球形空腔声学覆盖层单元, 并将吸声系数计算结果与均匀等效理论进行对比。如图 3(a) 所示, 模型两侧均为半无限水域, 平面波沿 z 轴方向垂直入射, 两端边界采用完美匹配层(PML)。粘弹性橡胶与水域之间设置为声-结构耦合边界, 同时在模型外边界设置 Floquet 周期性边界条件模拟无限大周期结构。材料参数如表 1 所示, 表中 E 代表杨氏模量, ν 代表泊松比, η 代表损耗因子, ρ 代表密度, c 代表声速。

基体橡胶厚度 $d_z = 50$ mm, 晶格常数 $d_x = d_y = 30$ mm, 球形空腔半径 $a = 5$ mm, 计算频率范 100 Hz ~ 10 kHz, 步长为 100 Hz, 本文算法得到的解析解与有限元计算的数值解如图 3(c) 所示。

从图 3(c) 中可以看出, 解析解与数值解计算结果趋势基本保持一致, 在 100 Hz 到 6 kHz 的中低频率范围内吻合得较好; 当频率超过 6 kHz 以后, 数值解和解析解计算结果开始出现偏差, 事实上这种现

象是合理的,因为以多重散射理论为基础的均匀化理论,是在准静态极限(低、中频)假设下推导出来的,因此解析解在低频时与数值解吻合较好,高频时会出现一定的误差。

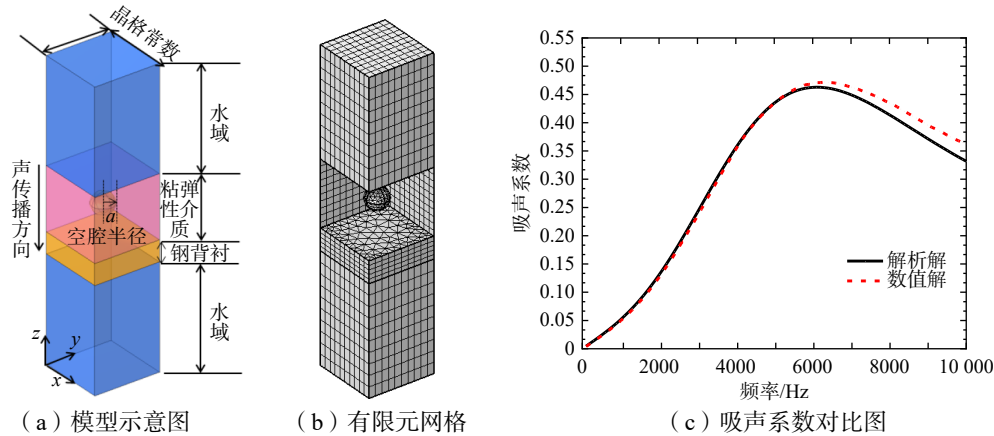


图 3 有限元模型与算法验证

Fig.3 Finite element model and algorithm validation

表 1 材料参数

Tab.1 Material parameters

	E/Pa	ν	η	$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	$c/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$
橡胶	7.1×10^7	0.497	0.2	1100	/
水	/	/	/	1000	1500
钢	2.1×10^{11}	0.25	/	7800	/

3 计算效率

有限元法虽然能计算各种复杂周期单元的吸声系数,但受网格收敛性影响,往往计算效率较低,而本文提出的均匀等效理论是以解析公式为基础得到的,相对有限元法有天然优势。表 2 列出了使用本文算法与有限元法的计算时长(有限元网格如图 3(b)),对比发现,本文算法大大地缩短了计算时长,在保证算法准确性的同时,进一步实现高效吸声预报(计算均在普通台式机上进行)。

表 2 计算效率对比

Tab.2 Comparison of computational efficiency

算法	单元数	频率范围	计算时长
有限元法	122 013	100 Hz ~ 10 kHz	1124 s
本文算法	0	100 Hz ~ 10 kHz	0.7 s

4 算法几何适用性

由 1.1 节理论可知,本文的均匀等效理论算法是基于球形空腔单元展开的,而实际中常用的单元还包括圆柱、圆锥或圆台空腔,从解析建模角度,建立不同形状的空腔单元等效参数并非易事,本章将从工程应用的角度探讨如何将所提出的球腔等效法去应用于其它形状空腔,重点从空腔长径比等角度来展开分析。

图 4 给出了圆柱、圆锥、圆台空腔覆盖层在三种长径比下的吸声系数(采用有限元法)与球腔覆盖层吸声系数(采用均匀等效理论)计算结果对比,可以看出圆柱腔和圆锥腔的结果更接近球腔均匀等效

计算结果,圆台腔的误差略大,对于高频出现偏差的原因,本文第2章已作说明,这里不再赘述。基本规律可以总结为:当圆柱、圆锥、圆台空腔长径比较小,且围度与球腔半径接近时,可以用球形空腔均匀化理论来近似模拟。

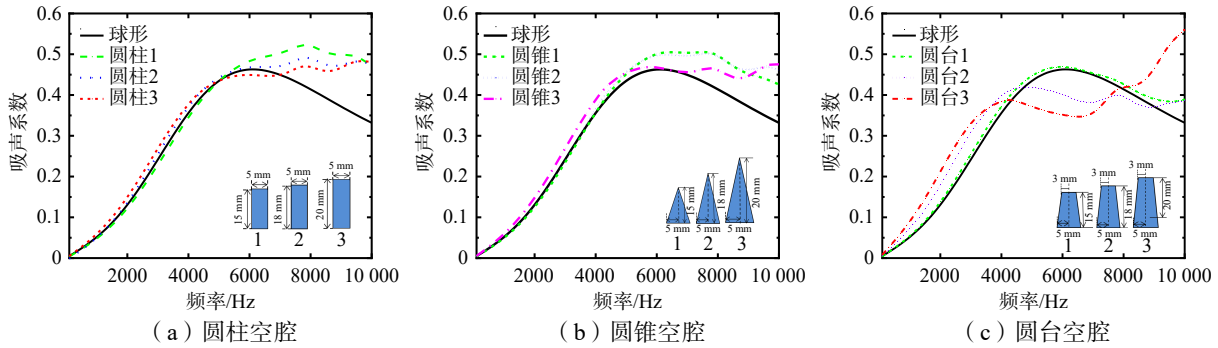


图4 不同形状空腔吸声系数对比

Fig.4 Comparison of sound absorption coefficients for different cavity shapes

5 物理参数对算法精度的影响

在讨论了算法几何适用性后,本章继续探讨一些重要物理参数对算法精度的影响,主要从耦合散射系数 I 、等效厚度 l_e 和基体材料参数(杨氏模量、基体厚度、基体密度)进行分析。

5.1 耦合散射系数 I

在本文提出的均匀等效方法中,耦合散射系数 I 是个重要因素,相关文献中^[13-15]给出了不同 I 的表达式,图5比较了这几种不同 I 的表达式对吸声系数的影响(以有限元数值解作为参考),可以看出当 I 采用式(10)时,预报结果最为准确。

另外由 I 表达式可知, a/d_s (空腔半径与基体尺寸比)是关键参数,当 a/d_s 大小变化时(固定 d_s ,改变空腔半径 a),预报精度受到较大影响,从图6可以看出, a/d_s 较小时,预报精度更好。

5.2 等效厚度 l_e

由1.1节公式(6)可知,等效厚度 l_e 可以通过低填充率和高填充率下的等效厚度插值函数来表示。调整幂指数 β 可以改变覆盖层的等效厚度。图7(a)~图7(b)显示了不同填充率(通过改变球腔半径 a)对吸声系数的影响。可以看出,在中、低频时,按照公式(6)方式处理的 β 的取值对吸声系数影响不大,并且可以正确计算吸声系数。图7(b)表明,对于填充率高的模型,高频时误差较大。

5.3 基体参数的影响

本节主要从杨氏模量、基体厚度和基体密度三个方面分析,从图8可以看出,杨氏模量的取值对本文算法精度有较大影响,且规律复杂。当杨氏模量取值为 $E_1 = 10^5$ Pa和 $E_2 = 10^6$ Pa时,均匀等效算法预报结果与有限元结果有明显误差(吸声峰值偏移),当杨氏模量取 $E_3 = 10^7$ Pa时,两种方法较为接近,这说明当材料较“硬”时,本文提出算法更适用。以第一阶吸声峰为例,当杨氏模量较小时,可以看到两种算法的峰值频率有明显偏移。第一阶吸声峰是由背衬与覆盖层构成的“质量-弹簧共振”引起的(背衬代表“质量”,覆盖层代表“弹簧”)。因此可以推断出,当杨氏模量较小时,本文的等效算法对覆盖层低频时

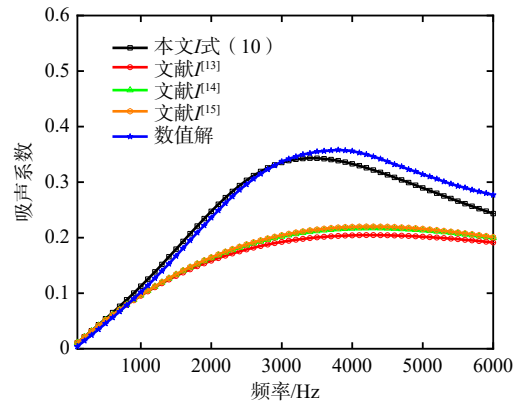


图5 不同文献参数 I 计算的吸声系数对比

Fig.5 Comparison of sound absorption coefficients using different I values

的“弹性”性能预报存在偏差。这可能是因为杨氏模量较小，材料较软，更容易发生多种变形，以至于等效算法较难“捕获”其运动特征。

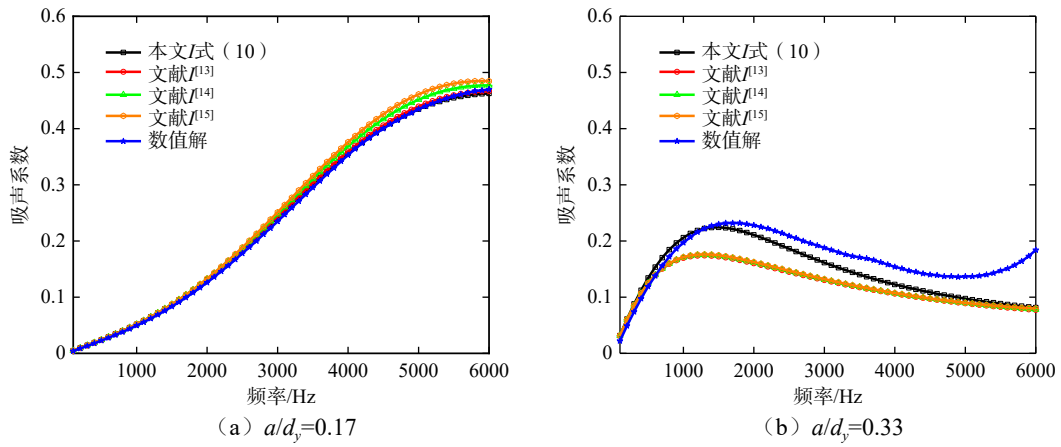


图 6 选取不同 a/d_y 计算吸声系数

Fig.6 Comparison of sound absorption coefficients using different a/d_y

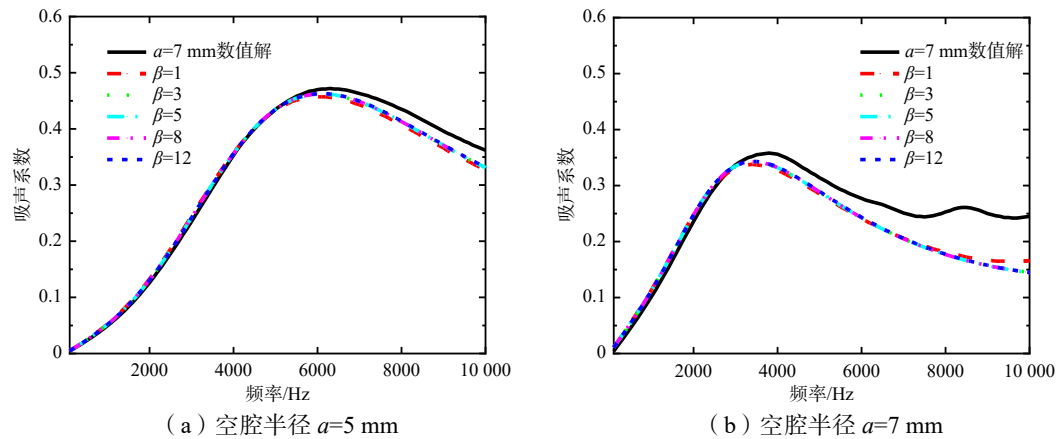


图 7 β 取值对吸声系数的影响

Fig.7 Comparison of sound absorption coefficients using different β

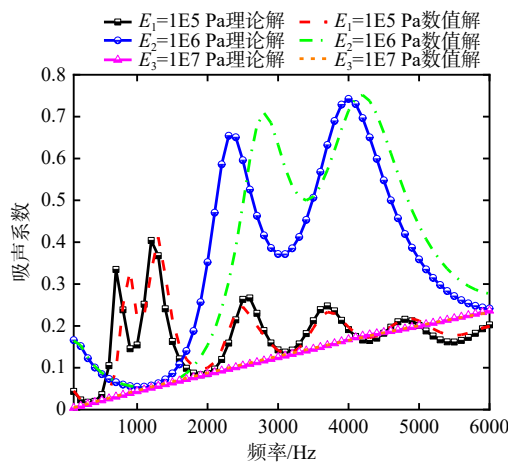


图 8 不同杨氏模量计算吸声系数对比

Fig.8 Comparison of sound absorption coefficients using different Young's moduli

图9(a)展示了基体厚度分别为30 mm, 50 mm, 80 mm时的吸声系数结果,可见基体厚度对均匀化参数预报以及吸声系数预报影响不大。这是因为,等效参数是以空腔以及空腔壁面的运动为基础得到的,基体的厚度仅能改变覆盖层中声波干涉的相位,对空腔与空腔壁的运动影响不大。从图9(b)可以看出,基体密度对吸声系数预报影响很小。

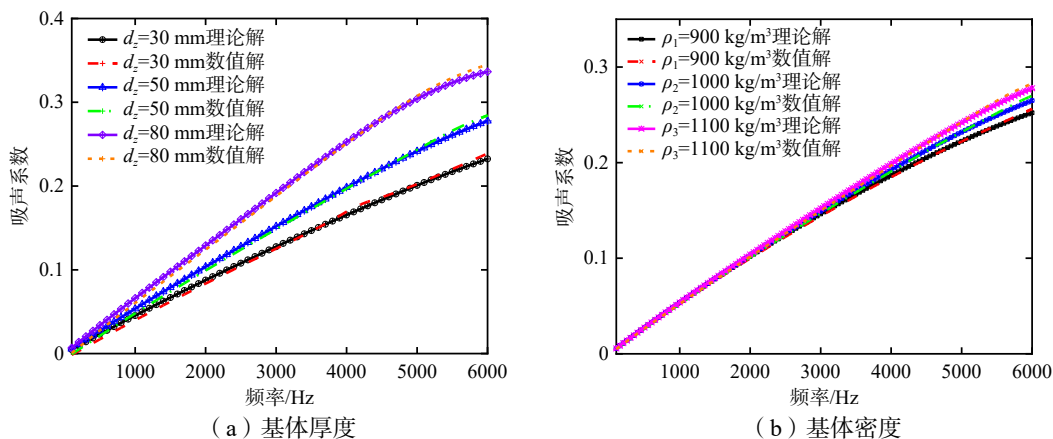


图9 不同基体参数计算吸声系数对比

Fig.9 Comparison of sound absorption coefficients using different matrix parameters

6 结 论

本文以传统多重散射理论为基础,借鉴管路气泡势流理论、Minnaert共振声散射理论推导了含周期球形空腔的声学覆盖层均匀化参数,并用于计算吸声系数,得到如下结论:

(1)本文提出的算法能在中低频范围内较好地预报吸声系数,相较于传统有限元算法能大幅提高计算效率,该算法能适应于长径比较小的圆柱、圆锥和圆台空腔覆盖层。

(2)球形空腔阵列的耦合散射系数对吸声系数预报精度影响较大,耦合散射系数与空腔和基体尺寸比值有关,当该比值较小时,预报效果较好。

(3)基于含空腔的管路势流阻塞系数理论能够较准确地计算覆盖层的等效厚度。在低填充率时,插值幂指数对结果的影响不大。然而在高填充率时,插值幂指数对高频精度有一定的影响。

(4)基体材料的杨氏模量对本文算法精度影响较大,经计算发现,杨氏模量较大时,算法精度更高,而基体厚度和密度等参数对计算精度影响不大。

参 考 文 献:

- [1] 朱蓓丽,黄修长. 潜艇隐身关键技术[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2012.
Zhu B L, Huang X C. Key technologies of submarine stealth[M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2012. (in Chinese)
- [2] 赵宏刚. 基于声子晶体理论的水声吸声材料吸声特性研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2008.
Zhao H G. Research on sound absorption characteristics of underwater acoustic absorbing materials based on phononic crystal theory[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2008. (in Chinese)
- [3] 张冲,何世平,易少强. 静压下球形空腔吸声覆盖层的建模与性能分析[J]. 船舶力学, 2017, 21(1): 99-106.
Zhang C, He S P, Yi S Q. Modeling and performance analysis of spherical cavity sound absorption coating under static pressure[J]. Journal of Ship Mechanics, 2017, 21(1): 99-106. (in Chinese)
- [4] 廖旭弘,庞福振. 声学覆盖层对锥柱组合结构水下振动噪声的影响[J]. 中国造船, 2011, 52(A01): 59-67.
Miao X H, Pang F Z. Effects of acoustic coating on underwater vibration and noise of cone-column composite structures[J].

- Shipbuilding of China, 2011, 52(A01): 59–67. (in Chinese)
- [5] 王少博, 王 斌, 范 军, 等. 基于遗传算法的声学覆盖层等效参数反演方法研究[J]. 船舶力学, 2023, 27(3): 456–469.
Wang S B, Wang B, Fan J, et al. Research on inversion method of equivalent parameters of acoustic coating based on genetic algorithm[J]. Journal of Ship Mechanics, 2023, 27(3): 456–469. (in Chinese)
- [6] Shi K, Jin G, Liu R, et al. Underwater sound absorption performance of acoustic metamaterials with multilayered locally resonant scatterers[J]. Results in Physics, 2018.
- [7] 叶韩峰, 陶 猛, 李俊杰. 基于 COMSOL 的空腔声学覆盖层的斜入射吸声性能分析[J]. 振动与冲击, 2019, 38(12): 6.
Ye H F, Tao M, Li J J. Analysis of oblique incidence sound absorption performance of cavity acoustic coating based on COMSOL[J]. Vibration and Impact, 2019, 38(12): 6. (in Chinese)
- [8] 陈 杨, 胡昊灏, 董天韧, 等. 含空腔声学覆盖层等效参数理论与吸声机理研究[J]. 噪声与振动控制, 2022, 42(6): 79–82+123.
Chen Y, Hu H H, Dong T R, et al. Study on the equivalent parameter theory and sound absorption mechanism of cavity-containing acoustic coating[J]. Noise and Vibration Control, 2022, 42(6): 79–82+123.
- [9] 李 爽. 声学覆盖层等效材料参数反演方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2018.
Li S. Research on inversion method of equivalent material parameters of acoustic coating[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2018. (in Chinese)
- [10] 张嘉伟, 胡昊灏, 黄一帆, 等. 基于传递矩阵法的声学覆盖层透射系数预报研究[J]. 噪声与振动控制, 2024, 44(1): 80–85.
Zhang J W, Hu H H, Huang Y F, et al. Study on prediction of coating acoustic transmission coefficient based on transfer matrix method[J]. Noise and Vibration Control, 2024, 44(1): 80–85. (in Chinese)
- [11] Khelif A, Adibi A. Phononic crystals: Fundamentals and applications[M]. Springer, 2015.
- [12] Cai X, Wallis G B. Potential flow around a row of spheres in a circular tube[J]. Physics of Fluids A, 1992, 4(5): 904–912.
- [13] Leroy V, Strybulevych A, Scanlon M G, et al. Transmission of ultrasound through a single layer of bubbles[J]. The European Physical Journal E, 2009, 29(1): 123–130.
- [14] Kobelev Y A. Scattering of a plane sound wave by spherical particles performing monopole oscillations and positioned at the sites of an infinite plane lattice with identical cells[J]. Acoustical Physics, 2014, 60(1): 1–10.
- [15] Kessissoglou S N. Sound scattering by a lattice of resonant inclusions in a soft medium[J]. Physical Review E, 2019, 99(6aPt2).