

文章编号: 1007-7294(2025)03-0474-12

# 非比例载荷下考虑加载路径的多轴 疲劳寿命预测模型

高建雄, 程 琴, 朱鹏年  
(新疆大学 机械工程学院, 乌鲁木齐 830046)

**摘要:** 循环加载下路径的非比例性所引起的附加强化效应, 是造成材料疲劳寿命缩短的重要因素。针对这一问题, 首先基于等效应变模型和临界面理论, 以最大剪切应变幅所在平面为临界平面, 综合考虑材料本身的非比例系数和加载路径的非比例性, 引入一种新型非比例因子来量化非比例加载对于材料疲劳寿命的影响。其次, 为考虑试件的损伤机理与疲劳破坏模式, 以临界平面上的最大法向应力来表征其对疲劳破坏的贡献, 在此基础上结合非比例因子, 提出一种多轴疲劳寿命预测模型。最后, 利用多轴载荷作用下四种材料的疲劳实验数据验证所提模型的有效性, 并将预测结果与五种现有模型进行对比。研究表明: 与现有模型相比, 所提模型能够有效提升非比例载荷作用下多轴疲劳寿命的预测精度。

**关键词:** 非比例载荷; 加载路径; 多轴疲劳; 寿命预测; 临界平面

中图分类号: TH114 文献标识码: A doi: 10.3969/j.issn.1007-7294.2025.03.012

## Multiaxial fatigue life prediction model considering loading-path under non-proportional loading

GAO Jian-xiong, CHENG Qin, ZHU Peng-nian  
(School of Mechanical Engineering, Xinjiang University, Urumqi 830046, China)

**Abstract:** The additional strengthening effect caused by the non-proportionality of loading-path under cyclic loading is an important factor that shortens fatigue life of material. To solve this issue, the plane of maximum shear strain amplitude was treated as the critical plane, and the non-proportionality of material and loading-path were both considered. A new non-proportionality factor was introduced to quantify the impact of non-proportionality loading on fatigue life of material based on the equivalent strain model and critical interface theory. Secondly, the damage mechanism and fatigue failure mode of the specimen were also considered, the maximum normal stress on the critical plane was adopted to characterize its contribution to fatigue failure. On this basis, a multiaxial fatigue life prediction model was proposed by combining the non-proportional factors. Finally, the proposed model was verified by using the fatigue test data of four materials under multiaxial loading, and the prediction results were compared with five proposed models. The results show that the proposed model can effectively improve the fatigue life prediction accuracy under non-proportional loads compared with the existing models.

**Key words:** non-proportional loading; loading path; multiaxial fatigue; life prediction; critical plane

收稿日期: 2024-09-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52065062); 新疆维吾尔自治区高校基本科研业务费科研项目(XJEDU2023P007); 新疆维吾尔自治区重点研发计划(2021B01003)

作者简介: 高建雄(1988-), 男, 博士, 副教授, 通讯作者, E-mail: jianxiinggao888@163.com; 程琴(1998-), 女, 硕士研究生。

## 0 引言

很多工程结构在服役过程中长期承受多轴载荷的反复作用,致使疲劳破坏成为其主要失效模式之一。长期以来,工程结构的多轴疲劳寿命预测一直是国内外学者关注的热点和难点问题。大量研究表明,工程结构的多轴疲劳损伤受众多因素的共同影响,例如加载路径、材料性能、表面状态、内部缺陷等<sup>[1-3]</sup>。因此,合理选取并量化表征与材料疲劳寿命相关的损伤参数至关重要,直接影响多轴载荷下疲劳寿命的预测精度。

一般而言,现有的多轴疲劳寿命预测模型可分为三大类:等效应变模型、基于能量的模型、临界平面法<sup>[4-5]</sup>。应当指出的是,等效应变模型的核心是构建等效参数,并假设等效参数与单轴载荷产生相同的疲劳损伤,进而利用等效参数预测多轴疲劳寿命。然而,此类模型在预测非比例载荷作用下结构的多轴疲劳寿命时存在很大误差<sup>[6]</sup>。能量模型通常具有特定的物理含义,能够较好预测结构的多轴疲劳寿命,然而能量参数属于标量,不能很好地解释多轴疲劳断裂机理。相比之下,临界平面法能够有效揭示多轴疲劳破坏模式与裂纹萌生机理,并具有较强的工程实用性。

Smith等<sup>[7]</sup>基于临界平面理论,将临界平面上的最大法向应力范围和法向应变范围作为损伤参数预测多轴疲劳寿命,然而由于该模型(即SWT模型)忽略了剪切应力对疲劳微裂纹萌生、扩展的促进作用,导致其预测结果偏于危险。为提高非比例加载下多轴疲劳寿命的预测精度,Li等<sup>[8]</sup>考虑剪切应力及平均应力对疲劳寿命的影响,提出了一种改进的SWT模型。Brown等<sup>[9]</sup>认为最大剪切应变是导致初始裂纹萌生的重要因素,并结合临界平面理论与疲劳裂纹扩展机理建立了BM模型。Fatemi等<sup>[10]</sup>通过研究发现仅以应变作为主要参数解释疲劳破坏机理有失偏颇,为此引入临界平面上的最大法向应力作为次要参数,并提出了经典的FS模型。为考虑各应力分量与应变分量对疲劳损伤的影响,Incie等<sup>[11]</sup>通过定义广义应变能,将其作为损伤参数预测多轴疲劳寿命。在此基础上,Yu等<sup>[12]</sup>对应力进行归一化处理,并提出了修正的广义应变能模型。

针对等效应变模型在多轴非比例加载时,疲劳寿命预测结果与实验值之间误差较大的问题,本文提出基于临界平面理论,将最大剪切应变幅作为主要的疲劳损伤参量;同时考虑非比例加载路径及材料性能对疲劳寿命的影响,定义一种新的非比例损伤因子;在此基础上,引入临界平面上的最大法向应力作为次要损伤参量来表征其对疲劳破坏的贡献,进而提出一种多轴疲劳寿命预测模型。

## 1 多轴应力应变状态分析

以薄壁圆管试件为例,在轴向和扭转载荷的共同作用下,其应力应变状态可由式(1)给出:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 1/2\gamma_{xy} & 0 \\ 1/2\gamma_{xy} & -\nu_{\text{eff}}\varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_{\text{eff}} \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中, $\sigma_x$ 为轴向应力; $\tau_{xy}$ 为剪切应力; $\varepsilon_{xx}$ 为轴向应变; $\gamma_{xy}$ 为剪切应变; $\nu_{\text{eff}}$ 为有效泊松比, $\nu_{\text{eff}}$ 可定义为

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{\nu_e \varepsilon_e + \nu_p \varepsilon_p}{\varepsilon_e + \varepsilon_p} \quad (2)$$

式中, $\nu_e$ 为弹性泊松比, $\nu_p$ 为塑性泊松比, $\varepsilon_e$ 为弹性应变, $\varepsilon_p$ 为塑性应变。

通过坐标变换,任意平面上的法向应力与应变分别如式(3)和(5)所示,剪切应力与应变分别如式(4)和(6)所示。

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_{xx}}{2} + \frac{\sigma_{xx}}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \quad (3)$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_{xx}}{2} \sin(2\theta) - \tau_{xy} \cos(2\theta) \quad (4)$$

$$\varepsilon_\theta = (1 - \nu_{\text{eff}}) \frac{\varepsilon_{xx}}{2} + (1 + \nu_{\text{eff}}) \frac{\varepsilon_{xx}}{2} \cos(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2\theta) \quad (5)$$

$$\gamma_{\theta} = (1 + \nu_{\text{eff}}) \varepsilon_{xx} \sin(2\theta) - \gamma_{xy} \cos(2\theta) \quad (6)$$

当施加的应变为正弦曲线时,有

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_a \sin \omega t \quad (7)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_a \sin(\omega t - \varphi) \quad (8)$$

式中,  $\varepsilon_a$  为轴向应变振幅,  $\gamma_a$  为剪切应变振幅,  $\varphi$  为相位差。

若以最大剪切应变幅所在平面为临界平面,则临界平面上的参数可表示为

$$\frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \theta} = 0 \quad (9)$$

$$\theta_c = \frac{1}{4} \tan^{-1} \left[ \frac{2\lambda(1 + \nu_{\text{eff}}) \cos \varphi}{(1 + \nu_{\text{eff}})^2 - \lambda^2} \right] \quad (10)$$

$$\lambda = \varepsilon_{\alpha} / \gamma_{\alpha} \quad (11)$$

$$\Delta \gamma_{\text{max}} = \varepsilon_a \left\{ [\lambda \cos(2\theta_c) \cos \varphi - (1 + \nu_{\text{eff}}) \sin(\theta_c)]^2 + [\lambda \cos(2\theta_c) \sin \varphi]^2 \right\}^{0.5} \quad (12)$$

$$\Delta \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{\alpha}}{2} \left\{ [2(1 + \nu_{\text{eff}}) \cos^2(\theta_c) + \lambda \sin(2\theta_c) \cos \varphi - 2\nu_{\text{eff}}]^2 + (\lambda \sin 2\alpha \sin \varphi)^2 \right\}^{0.5} \quad (13)$$

式中,  $\theta_c$  为临界平面所在的位向角,  $\Delta \gamma_{\text{max}}$  和  $\Delta \varepsilon_n$  分别为临界平面上的最大剪切应变幅和法向应变幅。

由于实际构件的应力无法简化, Liao<sup>[13]</sup>、Branco<sup>[14]</sup> 和 Wu 等<sup>[15]</sup> 给出了一种计算临界平面的三维空间算法, 三维空间中的材料平面  $S$  可由其单位法向量  $\mathbf{n}$  定义, 并通过角度  $\alpha$  和  $\beta$  表示, 得到的第二参考系可根据以下单位向量来表示:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (14)$$

材料平面  $S$  上的法向应力  $\sigma_n$  与法向应变  $\varepsilon_n$  分别如式(15)和式(16)所示, 剪切应力  $\tau_s$  与剪切应变  $\gamma_s$  分别如式(17)和式(18)所示。

$$\sigma_n = \mathbf{n}^T [\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{n} \quad (15)$$

$$\varepsilon_n = \mathbf{n}^T [\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{n} \quad (16)$$

$$\tau_s = |\sigma_p - \sigma_n| = |[\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{n} - (\mathbf{n}^T [\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{n}) \mathbf{n}| \quad (17)$$

$$\frac{\gamma_s}{2} = |\varepsilon_p - \varepsilon_n| = |[\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{n} - (\mathbf{n}^T [\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{n}) \mathbf{n}| \quad (18)$$

最后结合临界平面的定义, 进一步得到疲劳损伤平面和损伤参数。

## 2 多轴疲劳损伤模型

### 2.1 等效应变模型

解决工程中的单轴拉伸疲劳问题时, 通常建立材料的宏观力学相关参数和寿命之间的关系, 将等效应变方程应用于寿命预测中<sup>[16]</sup>, 一般的形式可表示为

$$\frac{\Delta \varepsilon_{\text{eq}}}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (19)$$

式中,  $\Delta \varepsilon_{\text{eq}}$  为所选临界平面上等效的应变幅,  $\sigma'_f$  为疲劳强度系数,  $\varepsilon'_f$  为疲劳延性系数,  $b$  为疲劳强度指数,  $c$  为疲劳延性指数,  $N_f$  为疲劳寿命,  $E$  为弹性模量。

### 2.2 FS 模型

Fatemi 等<sup>[10]</sup> 以最大剪切应变作为主要控制参数, 以临界面上的最大法向应力作为次要参数, 并认为前者是产生初始裂纹的重要因素, 后者促进裂纹扩展并可以反映非比例强化效应, 据此最终建立了如下 FS 模型:

$$\frac{\Delta\gamma_{\max}}{2} \left(1 + n \frac{\sigma_{n,\max}}{\sigma_y}\right) = (1 + \nu_e) \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \frac{n}{2} (1 + \nu_e) \frac{\sigma'^2_f}{E\sigma_y} (2N_f)^{2b} + (1 + \nu_p) \varepsilon'_f (2N_f)^c + \frac{n}{2} (1 + \nu_p) \frac{\varepsilon'_f \sigma'_f}{\sigma_y} (2N_f)^{b+c} \quad (20)$$

式中,  $n$  为材料常数,  $\sigma_y$  为屈服强度。

### 2.3 SWT 模型

SWT 模型建立之初是为了预测单轴载荷下考虑平均应力影响的疲劳寿命, 之后 Smith 等<sup>[7]</sup> 对该模型进行了改进, 并将其推广用于多轴载荷下的疲劳寿命预测。在 SWT 模型中, 损伤参量由最大拉应力  $\sigma_{n,\max}$  与最大主应变幅  $\varepsilon_a$  构成, 如式(21)所示。

$$\sigma_{n,\max} \varepsilon_a = \frac{(\sigma'_f)^2}{E} (2N_f)^{2b} + \sigma'_f \varepsilon'_f (2N_f)^{b+c} \quad (21)$$

式中,  $\sigma_{n,\max} \varepsilon_a$  称为应变能, 如此定义的损伤参量可以反映低周疲劳和高周疲劳中的平均应力效应。

### 2.4 陈旭模型

Chen 等<sup>[18]</sup> 通过研究发现, 在低周疲劳区, 材料的附加硬化效应通常发生在塑性屈服阶段之后, 在预测疲劳寿命时往往忽略了非比例性对弹性阶段的影响, 因此, 将 Coffin-Manson 公式的塑性项修改为

$$(1 + l_p f_p)^{\frac{1}{n'}} \frac{\Delta\gamma_{\max}^p}{2} = \gamma'_f (2N_f)^{c_0} \quad (22)$$

$$l_p = \frac{\sigma_{NP}}{\sigma_{IP}} - 1 \quad (23)$$

$$f_p = 2 \frac{A_{\theta\max}}{A_{\max}} - 1 \quad (24)$$

式中,  $l_p$  为材料的非比例因子,  $f_p$  为路径非比例度因子,  $\Delta\gamma_{\max}^p$  为塑性剪切应变的范围,  $n'$  为循环应变硬化指数,  $\sigma_{IP}$  为比例加载下的等效力,  $\sigma_{NP}$  为非比例加载下的等效力,  $A_{\max}$  为一个循环中具有最大剪切应变半径的圆面积,  $A_{\theta\max}$  是  $\gamma_{\theta\max} - \theta$  极坐标空间的扫掠面积。

### 2.5 李静模型

李静等<sup>[19]</sup> 分析了 WB 模型的不足, 提出了一种新的等效损伤参量为

$$\frac{\varepsilon'_{eq}}{2} = \frac{\Delta\gamma_{\max}}{2} + l \frac{\Delta\varepsilon_n}{2} \quad (25)$$

$$l = 1 + \frac{\Delta\sigma_n}{2\sigma_y} \quad (26)$$

式中,  $l$  为材料的非比例损伤因子,  $\Delta\sigma_n$  为虚法向应力范围。

## 3 基于临界平面法的多轴疲劳损伤模型的建立

尚德广等<sup>[16]</sup> 提出将存在最大法向应变的最大剪切应变幅平面作为临界平面, 定义最大剪切应变幅为首要损伤参量。利用等效应变准则将临界平面上的最大切应变  $\Delta\gamma_{\max}$  和法向应变的变程  $\varepsilon_n^*$  组成等效应变幅, 其表达式为

$$\frac{\Delta\varepsilon_{eq}}{2} = \left[ \varepsilon_n^{*2} + (\Delta\gamma_{\max}/2)^2 / 3 \right]^{1/2} \quad (27)$$

式中,  $\varepsilon_n^*$  为法向应变的变程, 表达式如下:

$$\varepsilon_n^* = 1/2 \Delta\varepsilon [1 + \cos(\varphi)] \quad (28)$$

式中,  $\varphi$  为相位角。

已有的研究<sup>[20]</sup> 表明, 将式(27)作为疲劳损伤参量进行寿命预测时, 在比例加载下, 预测的结果与试验值基本吻合, 而在非比例加载下预测结果与实验值误差较大。为探讨上述等效应变模型在多轴非比

例加载下影响疲劳损伤的因素,将两种材料 Pure Ti(纯钛)和 Q235B(碳素钢)的实验数据代入,分别得到了两种材料的等效应变幅值与实验寿命的关系以及循环应力-应变曲线,如图 1 和图 2 所示。

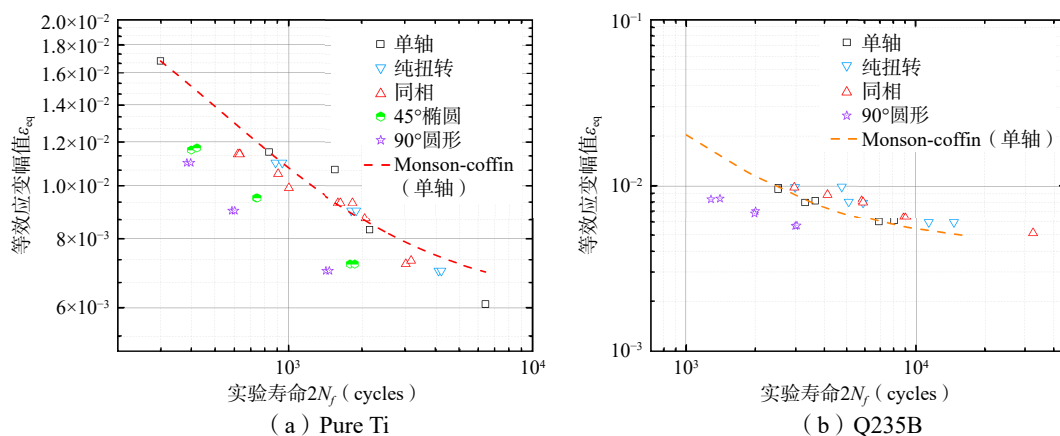


图 1 纯钛和 Q235B 钢的等效应变幅与实验寿命的关系

Fig.1 Equivalent strain amplitude versus experimental lifetime for Pure Ti and Q235B

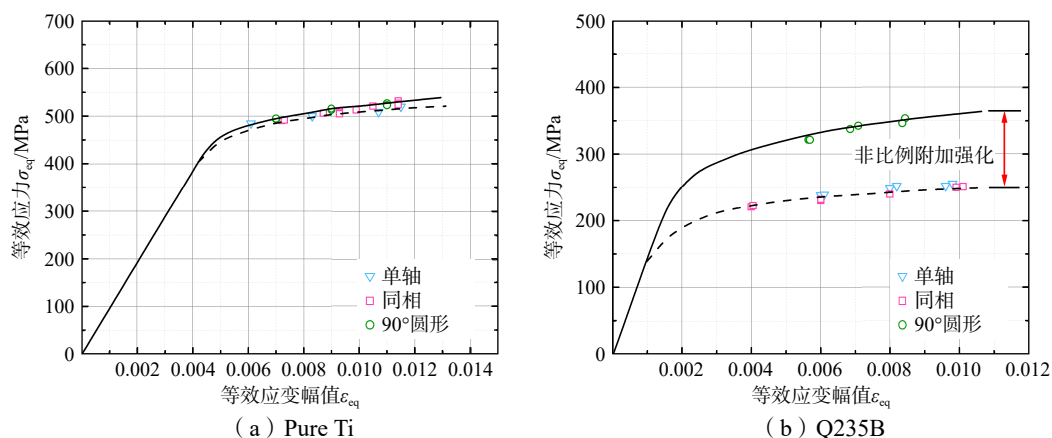


图 2 纯钛和 Q235B 钢的循环应力-应变拟合曲线

Fig.2 Cyclic stress-strain fitting curves of Pure Ti and Q235B

如图 1 所示,当纯钛和 Q235B 钢具有相同等效应变幅值时,两者在单轴、纯扭以及同相加载路径下的疲劳寿命相差不大,但随着加载路径非比例度的增加,其疲劳寿命呈现明显降低的趋势。由此可见,等效应变模型在单轴、扭转以及同相载荷下可以给出较好的预测精度,但在非比例载荷下预测精度不高。因此,可认为疲劳损伤与载荷的加载路径有着密切关系。

如图 2 所示, Q235B 钢在非比例加载条件下的循环应力-应变曲线明显高于单轴和比例加载条件下的应力-应变曲线,材料表现出明显的非比例附加强化特征; 相比之下,纯钛材料的非比例附加强化效应不明显。由此可见,不同材料对非比例载荷的敏感程度存在一定的差异。除此之外,大量的实验表明,不锈钢材料在非比例载荷作用下的附加损伤最明显,铝合金材料的附加强化损伤不明显。因此,可认为附加损伤效应与材料的自身特性有一定的相关性。

综上所述,材料对非比例加载的敏感程度以及加载路径的非比例度,是造成等效应变模型在非比例加载下疲劳寿命预测误差较大的主要原因。基于此,有部分学者提出将最大主应力作为次要损伤参量能够在一定程度上明确材料的疲劳损伤机理与破坏模式<sup>[10]</sup>。因此,为了让等效应变模型在多轴非比例加载下有较好的预测精度,考虑将以下三个参数予以修正:

(1) 材料自身非比例强化系数: 反映材料对非比例附加强化的敏感程度。

(2) 路径非比例因子: 反映加载历史与路径对材料附加强化的影响。

(3) 临界面上的最大法向应力对疲劳损伤的影响因子: 反映最大法向应力促进试件尖端剪切带的聚合过程, 进而加速疲劳裂纹的产生, 具有一定的物理意义。

### 3.1 材料的非比例系数

在多轴非比例循环加载过程中, 由于材料的应力/应变主轴开始旋转, 使材料内部多个滑移系运动, 位错结构受到影响导致稳定性变差, 从而使材料产生附加强化效应, 最终导致寿命降低<sup>[21]</sup>。Kanazawa等<sup>[22]</sup>通过定义材料的非比例系数, 来量化表征非比例载荷作用下材料的附加强化效应, 其定义如式(29)所示。

$$l_{np} = \frac{\sigma_{NP}}{\sigma_{IP}} - 1 \quad (29)$$

式中,  $\sigma_{IP}$ 为比例加载下的等效应力,  $\sigma_{NP}$ 为非比例加载下的等效应力。

应当指出的是, 由于式(29)通常需要借助大量的稳态塑性变形数据进行确定, 因此在工程应用中受到很大限制。针对这一问题, Borodii等<sup>[23]</sup>在实验研究与数据分析的基础之上, 结合材料在静态变形下的应变硬化水平, 提出了近似估计的经验公式, 如式(30)所示。

$$\lg |l_{np}| = 0.705 \mu - 1.22 \quad (30)$$

$$\mu = \frac{\sigma_b}{\sigma_y} - 1 \quad (31)$$

式中,  $\sigma_b$ 为材料的极限抗拉强度,  $\sigma_y$ 为材料的屈服强度。

### 3.2 加载路径的非比例性

众所周知, 加载路径的非比例性主要取决于载荷作用的应变历程和材料的塑性应变能。为探究非比例加载路径对材料疲劳寿命的影响, Itoh等<sup>[24]</sup>通过对各种非比例路径的分析发现, 加载路径的非比例程度由大到小依次为: 圆形、椭圆、十字形和比例路径。Deng等<sup>[25]</sup>采用信号处理理论与方法, 将正应变与剪应变视为独立的随机参量, 通过引入相关系数 $C$ 来量化应变分量在载荷下的比例和非比例特性, 如式(32)所示。

$$f_p = [C(\varepsilon_n, \gamma_s)]^2 \quad (32)$$

在多轴循环加载的情况下, 应力主轴会发生旋转, 通常利用两个角度变换来表征不同平面加载的非比例度, 如式(33)所示。

$$f_{np} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f_p d\alpha d\beta \quad (33)$$

式中,  $\alpha$ 、 $\beta$ 为本文第一章定义在广义三维空间中寻找材料临界平面所需的两个角度变量, 其范围分别为 $0 \leq \alpha \leq \pi$ ,  $0 \leq \beta \leq 2\pi$ 。

若将 $\alpha$ 和 $\beta$ 以 $1^\circ$ 的增量进行离散化, 则加载路径的非比例度可表示为

$$f_{np} = 1 - \frac{1}{181 \times 361} \sum_{i=1}^{181} \sum_{j=1}^{361} [C(\varepsilon_n, \gamma_s)]^2 \quad (34)$$

由于材料的非比例特性与非比例加载路径所引起的非比例硬化通常被认为是相互独立存在的, 因此, 为了能够综合考虑这两种因素对材料多轴疲劳寿命的影响, 本文提出了如式(35)所示的非比例损伤因子。

$$\psi = \sqrt{1 + \frac{1}{2} f_{np} (1 + l_{np})} \quad (35)$$

### 3.3 临界面上的最大法向应力

在多轴疲劳寿命预测中, 明确材料的疲劳损伤机理与破坏模式是研究者极为关注的热点问题。Fatemi等<sup>[10]</sup>通过实验研究发现, 仅以应变作为主要控制参数难以解释材料的疲劳破坏机理。为此, Fatemi等以临界面上的最大法向应力作为次要参数, 研究发现该参数对材料的疲劳裂纹扩展影响显

著。文献[26]表明,纯钛材料在三种不同加载条件下,随着加载路径非比例度的增加,法向应力呈现出逐渐增大的趋势,如图 3 所示。这是因为在非比例载荷的作用下,裂纹部位的最大法向应力促进了试件尖端剪切带的聚合过程,进而加速了疲劳裂纹的产生。

因此,为了让所提模型有较明确的破坏模式,通过引入一个与临界平面上最大法向应力有关的修正系数 $\rho$ ,来表征最大法向应力对于疲劳裂纹扩展的贡献,修正系数 $\rho$ 如下式所示:

$$\rho = 1 + k \frac{\sigma_{n,\max}}{\sigma_y} \quad (36)$$

式中, $k$ 为材料常数,通常可用单轴数据与纯扭转数据进行确定。

### 3.4 本文新模型的建立

为了解决等效应变模型在比例载荷下疲劳寿命预测精度较高、而在非比例载荷下其寿命预测结果存在较大误差的问题,前文探讨了等效应变模型在多轴非比例加载下寿命预测性能较差的原因,并提出了与临界平面上最大法向应力有关的修正系数 $\rho$ 、材料自身非比例强化系数 $l_{np}$ 以及路径非比例因子 $f_{np}$ 等损伤因子。本文基于临界平面理论,在等效应变模型的基础上,为了让模型具有较明确的破坏模式,引入一个与临界平面上最大法向应力有关的修正系数 $\rho$ ,来表征最大法向应力对于疲劳裂纹扩展的贡献,建立了如下模型:

$$\frac{\Delta \varepsilon_{eq}^I}{2} = \frac{\Delta \varepsilon_{eq}}{2} \rho = \frac{\Delta \varepsilon_{eq}}{2} \left( 1 + k \frac{\sigma_{n,\max}}{\sigma_y} \right) = \frac{\sigma_f'}{E} (2N_f)^b + \varepsilon_f' (2N_f)^c \quad (37)$$

式中, $\Delta \varepsilon_{eq}$ 为等效应变幅, $\Delta \varepsilon_n$ 为法向应变幅。

然而,已有研究表明 $k$ 并不是一个恒定不变的常数。在非比例载荷作用下, $k$ 值会随其分散性的增大而增大。以 16MnR 材料<sup>[27]</sup>为例,在比例载荷作用下,当实验寿命与预测寿命接近时, $k$ 的取值接近于 1。在非比例载荷作用下, $k$ 的最大取值接近 1.8。因此,如果不考虑 $k$ 值的这一特点,将会导致疲劳寿命预测结果偏于危险。

材料常数 $k$ 能够反映正应力对疲劳裂纹扩展的影响,而最大法向应力 $\sigma_{n,\max}$ 则会影响 $k$ 的取值。在实际应用中, $\sigma_{n,\max}$ 可通过考虑应变路径的非比例因子的修正 Ramberg-Osgood 关系进行确定,如式(38)所示。

$$\varepsilon_{n,\max} = \frac{\sigma_{n,\max}}{E} + \left[ \frac{\sigma_{n,\max}}{K' (1 + l_{np} f_{np})} \right]^{\frac{1}{n'}} \quad (38)$$

式中, $K'$ 为循环强化系数, $n'$ 为循环应变硬化指数。

由式(38)可以看出,材料的非比例系数和加载路径的非比例度对最大正应力影响较大。对附加硬化不敏感的材料而言,若其非比例系数 $l_{np}$ 等于 0,则会忽略加载路径的非比例度对疲劳寿命的影响。然而,在非比例系数 $l_{np}$ 等于 0 的情况下,若利用本文提出的式(35)进行计算,则加载路径的非比例度不会受到影响。此外,现有研究表明, $k$ 值与材料类型及加载路径的非比例度相关,其值会随着疲劳寿命的增大而增大<sup>[26]</sup>。

最后,本文在式(37)的基础之上,为了能够同时考虑材料自身性能和非比例加载路径对疲劳寿命的影响,结合所提出的非比例因子 $\psi$ (即式(22)),建立如下多轴疲劳寿命预测模型:

$$\frac{\Delta \varepsilon_{eq}^*}{2} = \frac{\Delta \varepsilon_{eq}}{2} \left( 1 + k \psi \frac{\sigma_{n,\max}}{\sigma_y} \right) = \frac{\Delta \varepsilon_{eq}}{2} \left( 1 + k \left( 1 + \frac{1}{2} f_{np} (1 + l_{np}) \right)^{1/2} \frac{\sigma_{n,\max}}{\sigma_y} \right) = \frac{\sigma_f'}{E} (2N_f)^b + \varepsilon_f' (2N_f)^c \quad (39)$$

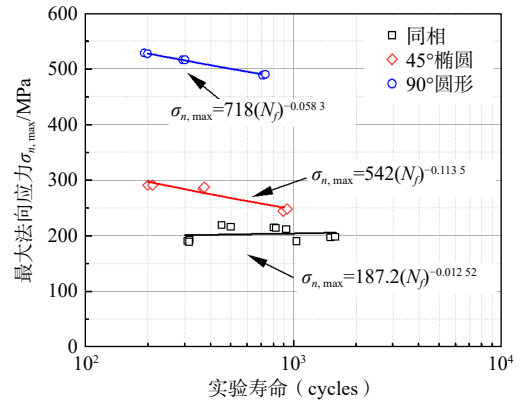


图 3 最大法向应力与疲劳寿命的关系

Fig.3 Relationship between maximum normal stress and fatigue life

### 4 模型验证与讨论

为验证所提模型的合理性及有效性, 本文选取了 16MnR<sup>[27]</sup>、BT-9 和 Pure-Ti<sup>[26]</sup>、Q235B<sup>[28]</sup> 四种不同材料在拉-扭加载条件下的多轴疲劳实验数据, 并利用五种已有的模型进行对比分析, 其中, 有三种经典模型: 等效应变模型、FS 模型、SWT 模型; 以及近几年广泛使用的两种修正模型: 陈旭模型、李静模型。表 1 给出了四种材料的疲劳性能参数, 试件的尺寸和所涉及的加载路径如图 4 和图 5 所示。

表 1 材料疲劳性能参数

Tab.1 Material fatigue performance parameters

材料	$E/\text{GPa}$	$\sigma_b/\text{MPa}$	$\sigma_y/\text{MPa}$	$l_{np}$	$\sigma'_f/\text{MPa}$	$\varepsilon'_f$	$\gamma'_f$	$b$	$c$	$c_0$
16 MnR	212.5	544.5	324.4	0.2	966.4	0.842	1.568	-0.101	-0.618	-0.651
BT-9	118	1080	910	0	1180	0.278	0.180	-0.025	-0.665	-0.470
Pure-Ti	112	558	475	0	647	0.548	0.417	-0.033	-0.646	-0.523
Q235B	204	390.9	269	0.26	407.6	0.81	0.809	-0.042	-0.59	-0.583

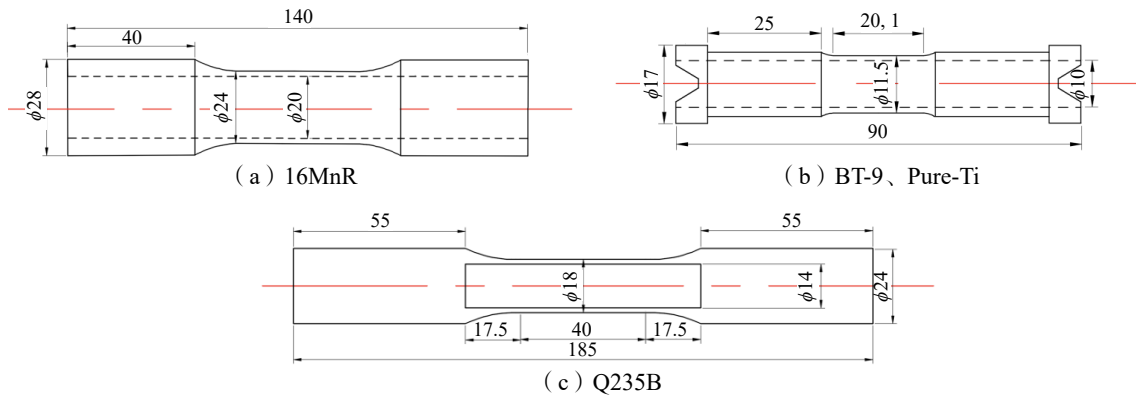


图 4 试件尺寸

Fig.4 Specimen size

表 2 给出了四种不同材料的  $k$  值。根据表 2 中的数据 and 式 (34), 可计算得到三种不同加载路径下的非比例度, 如表 3 所示。

将四种材料的相关数据分别代入本文模型和五种已有模型 (FS 模型、SWT 模型、等效应变模型、陈旭模型、李静模型) 中, 可得各模型的疲劳寿命预测结果, 如图 6 所示。

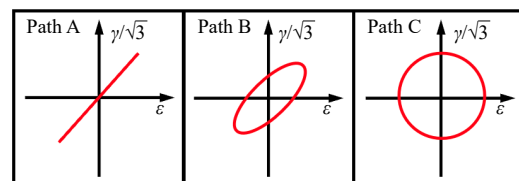


图 5 加载路径

Fig.5 Loading paths

由图 6 可知, 对于三种经典模型: FS 模型的寿命预测结果大多位于  $\pm 3$  倍寿命因子范围之内, 其中 16 MnR 的预测精度较差, 主要原因是 16 MnR 属于混合型破坏模式; 等效应变模型在比例加载下具有较好的预测精度, 预测结果大多在  $\pm 2$  倍寿命因子范围之内, 但随着路径非比例度的增加, 其预测性能逐渐下降, 预测结果有大部分位于  $\pm 3$  倍寿命因子范围之外; 相比之下, SWT 模型的寿命预测精度最差, 原因是在上述三种加载路径下, 材料的疲劳失效以剪切破坏为主, 而 SWT 模型通常只对拉伸型破坏具有较好的预测精度。对于近几年广泛使用的两种修正模型即陈旭模型和李静模型, 两者寿命预测结果几乎都位于  $\pm 3$  倍寿命因子范围左右, 但也有一小部分的数据点位于  $\pm 3$  倍寿命因子范围之外, 整体的预测结果较分散。本文所提模型的预测寿命大多位于  $\pm 2$  倍寿命因子范围之内, 全部位于  $\pm 3$  倍寿命因子范

围之内,具有较高的预测精度。相较于三种经典模型和两种修正模型,通过本文所提参数的修正,使其寿命预测精度提升较为显著,并且预测数据结果分布紧凑,具有较强的稳定性。

表 2 不同材料的  $k$  值

Tab.2  $k$  values for different materials

	16MnR	BT-9	Pure-Ti	Q235B
$k$	1	0.23	0.1	0.34

表 3 不同加载路径下的非比例度

Tab.3 Non-proportionality factors under different loading paths

加载路径	A	B	C
$f_{np}$	0	0.55	0.8

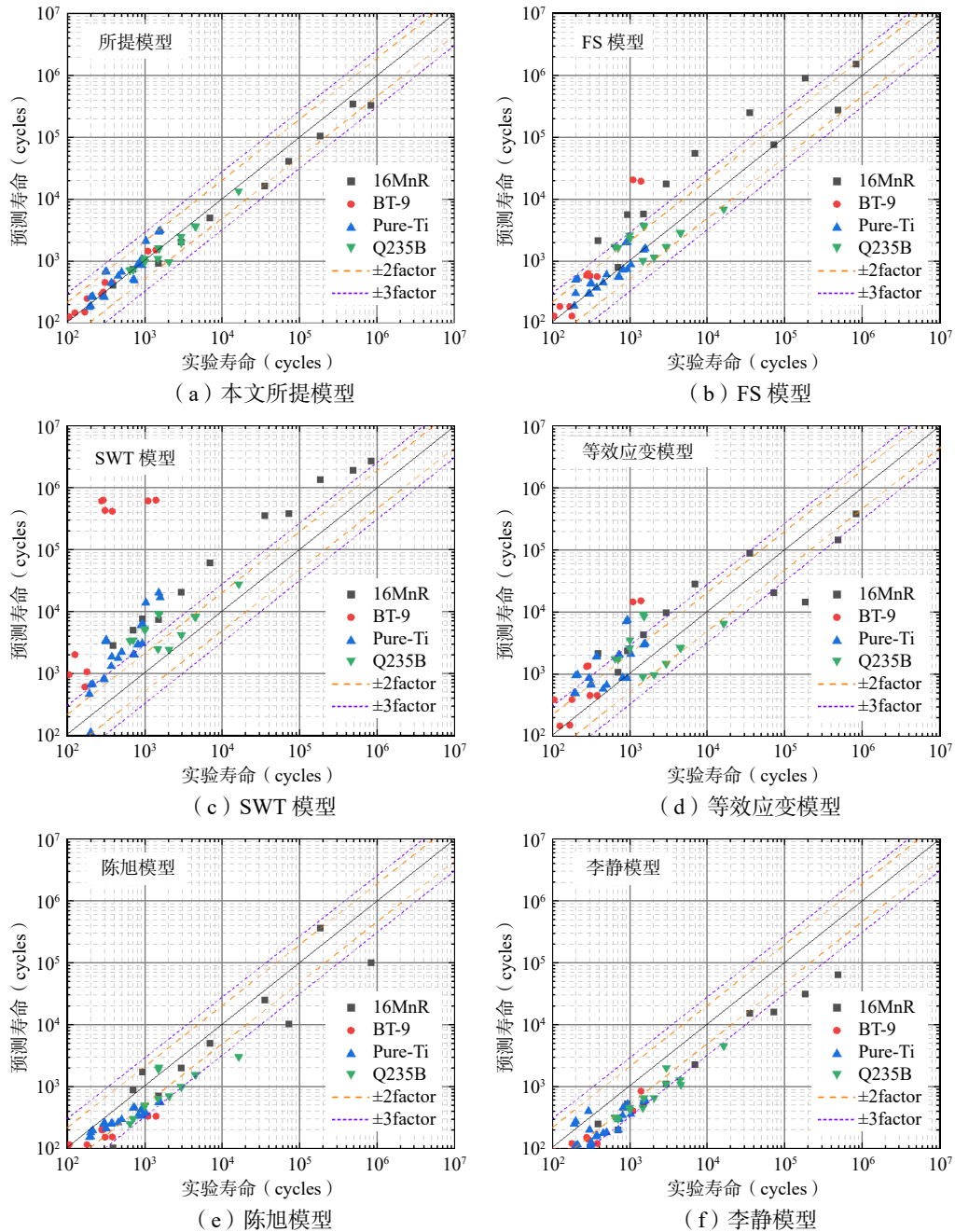


图 6 各模型的疲劳寿命预测结果

Fig.6 Fatigue life prediction results of each model

## 5 分析与讨论

为进一步定量评估各种模型的预测能力,本文引入误差指标 $P_{\text{error}}$ 来计算实验寿命与预测寿命之间的误差。误差指标 $P_{\text{error}}$ 通常可表示为

$$P_{\text{error}} = \log_{10} \left( \frac{N_e}{N_p} \right) \quad (40)$$

式中, $N_e$ 为实验寿命, $N_p$ 为预测寿命。

通过式(40)可计算各模型的误差指标 $P_{\text{error}}$ ,在此基础上综合采用箱体图和正态分布曲线图来分析各模型的预测精度,结果如图7所示。

在图7中,箱体的大小可以反映各模型预测寿命的标准差,箱体内的点和水平线分别反映各模型预测寿命的均值和中值。通过对比可知,本文模型的寿命预测标准差最小,等效应变模型的寿命预测标准差最大。此外,本文模型的寿命预测均值与实验寿命均值最为接近,SWT模型的寿命预测均值与实验寿命均值相差较大。通过正态分布曲线图可以看出,本文模型的正态曲线分布最为集中,呈现“瘦”而“高”的特点,预测性能明显优于其它五种模型。

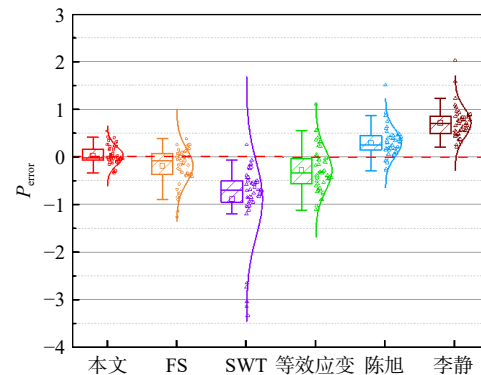


图7 模型预测误差图

Fig.7 Model prediction error

## 6 结论

本文通过研究非比例载荷下加载路径对疲劳寿命的影响,提出了综合考虑材料本身非比例特性和加载路径的非比例因子。在此基础上,结合材料的疲劳破坏模式,利用最大法向应力和等效应变模型,建立了一种新的疲劳寿命预测模型。最后,通过模型验证与对比分析得到如下结论:

(1)通过添加临界平面上的最大法向应力构建非比例因子,以此来考虑非比例加载路径对疲劳寿命的影响。引入非比例因子之后所建立的模型,其寿命预测结果的准确性有了显著提升,而且该模型能够反映材料的疲劳破坏模式。

(2)所建模型的预测寿命大多位于 $\pm 2$ 倍寿命因子范围之内,具有较高的预测精度,正态曲线分布最为集中,呈现“瘦”而“高”的特点,预测性能明显优于其它五种模型。

### 参 考 文 献:

- [1] 赵丙峰, 廖 鼎, 朱顺鹏, 等. 机械结构概率疲劳寿命预测研究进展[J]. 机械工程学报, 2021, 57(16): 173–197.  
Zhao B F, Liao D, Zhu S P, et al. Probabilistic fatigue life prediction of mechanical structures: State of the art[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(16): 173–197. (in Chinese)
- [2] 刘俭辉, 吕 鑫, 韦尧兵, 等. 考虑附加强化效应及平均应变的多轴疲劳寿命预估[J]. 中国机械工程, 2020, 31(3): 314–320.  
Liu J H, LÜ X, Wei Y B, et al. Multiaxial fatigue life prediction model considering additional hardening effects and mean strains[J]. China Mechanical Engineering, 2020, 31(3): 314–320. (in Chinese)
- [3] 刘俭辉, 赵 贺, 冉 勇, 等. 基于临界面理论的多轴等效应变疲劳寿命预估模型[J]. 中国机械工程, 2022, 33(15): 1821–1827.  
Liu J H, Zhao H, Ran Y, et al. Multiaxial equivalent strain fatigue life prediction model based on critical plane theory[J]. China Mechanical Engineering, 2022, 33(15): 1821–1827. (in Chinese)

- [4] Luo P, Yao W X, Susmel L, et al. A survey on multiaxial fatigue damage parameters under non-proportional loadings[J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2017, 40: 1323–1342.
- [5] 徐 燊, 朱顺鹏, 郝永振, 等. 基于临界面-损伤参量法的高压涡轮盘多轴疲劳寿命预测[J]. *航空学报*, 2018, 39(9): 221930.  
Xu S, Zhu S P, Hao Y Z, et al. Multiaxial fatigue life prediction of an HPT disc based on critical plane-damage parameter[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2018, 39(9): 221930. (in Chinese)
- [6] 姜 潮, 邓 群, 李博川. 考虑非比例附加损伤的多轴低周疲劳寿命模型[J]. *力学学报*, 2015, 27(4): 634–641.  
Jiang C, Deng Q, Li B C. A new multiaxial fatigue life prediction model based on the non-proportional additional damage[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 27(4): 634–641. (in Chinese)
- [7] Smith K N, Watson P, Topper T H. A stress-strain function for the fatigue of metals[J]. *Journal of Materials*, 1970, 5: 767–778.
- [8] Li J, Liu J, Sun Q, et al. A modification of Smith-Watson-Topper damage parameter for fatigue life prediction under non-proportional loading[J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2011, 35(4): 301–316.
- [9] Brown M W, Miller K J. A theory for fatigue failure under multiaxial stress-strain conditions[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 1973, 187(1): 745–755.
- [10] Fatemi A, Socie D F. A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading[J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 1988, 11(3): 149–165.
- [11] Incie A, Glinka G. A generalized fatigue damage parameter for multiaxial fatigue life prediction under proportional and non-proportional loadings[J]. *International Journal of Fatigue*, 2014, 62: 34–41.
- [12] Yu Z Y, Zhu S P, Liu Q, et al. Multiaxial fatigue damage parameter and life prediction without any additional material constants[J]. *Materials*, 2017, 10(8): 923.
- [13] Liao D, Zhu S P, Qian G. Multiaxial fatigue analysis of notched components using combined critical plane and critical distance approaches[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, 160: 38–50.
- [14] Branco R, Costa J D, Borrego L P, et al. Comparison of different one-parameter damage laws and local stress-strain approaches in multiaxial fatigue life assessment of notched components[J]. *International Journal of Fatigue*, 2021, 151: 106405.
- [15] Wu Z R, Hu X T, Song Y D. Multiaxial fatigue life prediction for titanium alloy TC4 under proportional and nonproportional loading[J]. *International Journal of Fatigue*, 2014, 59: 170–5.
- [16] 尚德广, 王德俊. 多轴疲劳强度[M]. 北京: 科学出版社, 2007.  
Shang D G, Wang D J. Multiaxial fatigue strength[M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese)
- [17] Shang D J, Wang D J. A new multiaxial fatigue damage model based on the critical plane approach[J]. *International Journal of Fatigue*, 1998, 20(3): 241–245.
- [18] Chen X, Gao Q, Sun X F. Low-cycle fatigue under non-proportional loading[J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 1996, 19(7): 839–854.
- [19] 李 静, 孙 强, 乔艳江, 等. 基于临界平面法的拉扭双轴疲劳寿命估算模型[J]. *固体力学学报*, 2010, 31(1): 101–106.  
Li J, Sun Q, Qiao Y J, et al. A model for estimating the fatigue life of tension torsion biaxial systems based on the critical plane method[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2010, 31(1): 101–106. (in Chinese)
- [20] 刘俭辉, 王生楠, 黄新春, 等. 基于损伤力学-临界面法预估多轴疲劳寿命[J]. *机械工程学报*, 2015, 51(20): 120–127.  
Liu J H, Wang S N, Huang X C, et al. Prediction of multiaxial fatigue life based on damage mechanics critical surface method[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 51(20): 120–127. (in Chinese)
- [21] Hamada N, Sakane M, Itoh T, et al. High temperature non-proportional low cycle fatigue using fifteen loading paths[J]. *Theoretical & Applied Fracture Mechanics*, 2014, 73: 136–143.
- [22] Kanazawa K, Miller K J, Brown M W. Cyclic deformation of 1% Cr-Mo-V steel under out-of-phase loads[J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 1979, 2(2): 217–228.
- [23] Borodii M V, Shukaey S M. Additional cyclic strain hardening and its relation to material structure, mechanical

- characteristics, and lifetime[J]. *International Journal of Fatigue*, 2007, 29(6): 1184–1191.
- [24] Itoh T, Nakata T, Sakane M, et al. Non proportional low cycle fatigue of 6061 aluminum alloy under 14 strain paths[J]. *European Structural Integrity Society*, 1999, 25: 41–54.
- [25] Deng Q Y, Zhu S P, Niu X P, et al. Load path sensitivity and multiaxial fatigue life prediction of metals under non-proportional loadings[J]. *International Journal of Fatigue*, 2023, 166: 107281.
- [26] Shamsaei N, Gladskyi M, Panavovskiy K, et al. Multiaxial fatigue of titanium including step loading and load path alteration and sequence effects[J]. *International Journal of Fatigue*, 2010, 32(11): 1862–1874.
- [27] Gao Z L, Zhao T W, Wang X G, et al. Multiaxial fatigue of 16MnR steel[J]. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 2009, 131(2): 021403.
- [28] Qu W L, Zhao E N, Zhou Q, et al. Multiaxial low-cycle fatigue life evaluation under different non-proportional loading paths[J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2018, 41: 1064–1076.