

文章编号: 1007-7294(2025)01-0145-11

柔性基础非线性能量阱隔振系统 动力学特性分析

陈 森^{1a,1b}, 朱 翔^{1a,1b,2}, 李天匀^{1a,1b,2}, 陈树鑫^{1a,1b}, 戴 维^{1a,1b,2}

(1. 华中科技大学 a. 船舶与海洋工程学院; b. 船舶和海洋水动力湖北省重点实验室, 武汉 430074;
2. 上海交通大学 高新船舶与深海开发装备协同创新中心, 上海 200240)

摘要: 针对舰船等工程领域低频线谱控制难题, 建立考虑柔性基础的非线性能量阱隔振系统动力学模型, 利用谐波平衡法和 Runge-Kutta 法分析系统的非线性动力学特性。探讨基础参数对系统幅频特性的影响, 并分析系统在共振频率处的非线性动力学行为。以振动功率流为评价参数, 探讨非线性能量阱质量比、立方刚度、阻尼对减振效果的影响规律。针对本文计算模型的研究表明: 当基础刚度较弱时, 非线性能量阱对设备的幅频响应特性影响较大; 对于特定的参数, 基础和设备在一阶共振频率处的运动状态可能是不同的; 非线性能量阱减振效果良好, 在本算例中传递到基础的功率流峰值降低了 13.95 dB。

关键词: 柔性基础; 非线性能量阱; 谐波平衡法; 振动功率流

中图分类号: O322 TB533+.1 文献标识码: A doi: 10.3969/j.issn.1007-7294.2025.01.014

Dynamic characteristics analysis of vibration isolation system with nonlinear energy sink on flexible foundation

CHEN Sen^{1a,1b}, ZHU Xiang^{1a,1b,2}, LI Tian-yun^{1a,1b,2}, CHEN Shu-xin^{1a,1b}, DAI Wei^{1a,1b,2}

(1a. School of Naval Architecture and Ocean Engineering; b. Key Laboratory of Naval Architecture and Ocean Engineering Hydrodynamics (HUST), Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China; 2. Collaborative Innovation Center for Advanced Ship and Deep-Sea Exploration (CISSE), Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: For low-frequency line spectrum control in naval and other engineering fields, a nonlinear energy sink vibration isolation system dynamics model considering a flexible foundation was established, and the nonlinear dynamics of the system was analyzed using the harmonic balance method and Runge-Kutta method. The influence of the foundational parameters on the amplitude-frequency characteristics of the system was explored, and the nonlinear dynamical behavior of the system at the resonant frequency was analyzed. The influence law of mass ratio, cubic stiffness, and damping on the damping effect of nonlinear energy sink was explored with vibration power flow as the evaluation parameter. For the computational model analyzed, research shows: when the foundation stiffness is weak, the nonlinear energy sink has a large effect on the ampli-

收稿日期: 2024-07-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51879113; 51839005; 12202152)

作者简介: 陈 森(1998-), 男, 硕士研究生;

朱 翔(1980-), 男, 博士, 教授, 通讯作者, E-mail: zhuxiang@hust.edu.cn。

tude and frequency response characteristics of the equipment; for specific parameters, the state of motion of the base and the equipment at the first order resonant frequency may be different; the nonlinear energy sink has a superior damping effect, reducing the peak power flow to the base by 13.95 dB in this example.

Key words: flexible foundation; nonlinear energy sink; harmonic balance method; power flow analysis

0 引 言

工程中的大多数振动是有害的,如潜艇低速航行时,由机械设备周期性运转造成的机械噪声将严重影响潜艇的声隐身性能,因此各种振动的控制方法与技术^[1-3]得到了广泛的关注与研究。其中被动控制技术具有结构简单、可靠性高、实现成本低等优点,被广泛应用于工程中,包括调谐质量阻尼器(TMD)、非线性能量阱(nonlinear energy sink, NES)等。与TMD相比,由于NES的刚度为强非线性,其自振频率并不恒定,因此NES可以与主系统组合后形成一系列非线性共振条件,从而具有宽频减振的优点^[4]。目前,NES技术正逐渐被应用到各个工程领域的减振中^[5]。

许多学者针对NES的消极隔振、积极隔振系统的振动开展了大量研究工作。Gendelman等^[6]指出在不同参数下,系统存在着混沌响应、强(弱)准周期响应以及周期响应;Zang等^[7]通过谐波平衡法和Runge-Kutta法研究了NES系统的复杂动力学行为;AL-Shudeifat^[8]提出了一种高效的双稳态NES。刘中坡等^[9]对附加轨道型非线性能量阱的高层结构开展了振动台实验,结果表明这种NES能同时抑制结构多个模态的振动;Zhang等^[10]利用惯容器代替了传统NES中的附加质量,数值结果表明:当附加质量很小时,仍然有优异的减振效果;Geng等^[11]利用间隙振子提出了一种限幅型非线性能量阱装置,通过理论和实验研究表明,NES的振幅在合理的范围内,仍然对主系统有良好的减振效果,促进了NES在工程中的应用;范舒铜等^[12]提出了一种黏弹性非线性能量阱,其减振性能优于传统的NES。这些工作为动力吸振器的设计提供了新思路。楼京俊等^[13]设计了一种可垂向承载的柔性铰链型NES装置,试验结果表明:与线性吸振器相比,该装置具有较好的宽频减振效果;李爽等^[14]讨论了激励幅值对具有NES隔振系统全局分岔特性的影响;郑中强等^[15]将NES应用在受随机波浪载荷作用下的固定式导管架海洋平台,与调谐质量阻尼器(TMD)相比,NES具有更强的鲁棒性。在公开发表的文献中,非线性能量阱技术在舰船领域开展的相关研究较少。

目前,在计算NES这一类非线性系统的稳态响应时,通常采用的是复平均法^[16-17]、谐波平衡法^[18-19]这两类近似解析研究方法和Runge-Kutta数值积分方法。李响等^[20]通过对比复平均法、谐波平衡法这两种近似解析方法发现,对于强非线性系统,谐波平衡法更准确。

对于积极隔振系统,许多学者是基于刚性基础进行研究分析的,且多采用力传递率评价减振效果。对于舰船、航空航天等领域的积极隔振系统,基础的柔性往往不可忽略。此外,对于耦合了NES的积极隔振系统,以基础的振动能量来评估减振效果也越来越受到重视,这也是需要考虑基础的原因所在。对于舰船上的隔振系统,在理论分析中,一般将基础考虑成等效质量^[21]、梁基础^[22]、板基础^[23]。在原隔振系统引入NES可能会导致复杂的非线性动力学行为^[5],为此,本文参考文献[21]将柔性基础简化为弹簧-质量构成的离散系统。

而在以往的研究中,利用振动功率流来评价NES减振效果的工作开展得相对较少。Yang^[24]、Shi^[25]、Zhu^[26]等在利用振动功率流评估非线性减/隔振分析方面做了大量工作,研究了光滑非线性系统、非光滑非线性系统、复合材料结构等系统的功率流特性。这些工作具有比较重要的理论意义和工程应用价值。

综上所述,对于耦合NES的积极隔振系统,许多学者是基于刚性基础进行研究分析的,且多以力

传递率评价减振效果,而实际的船舶隔振系统往往为柔性基础。因此,本文结合工程实际,建立柔性基础的非线性能量阱隔振系统动力学模型,利用谐波平衡法和 Runge-Kutta 法分析系统的动力学特性,并通过振动功率流分析非线性能量阱的减振效果。

1 理论模型

本文分析的柔性基础非线性能量阱隔振系统如图 1 所示。在图 1 中,将柔性基础等效为弹簧-阻尼-质量构成的离散系统,其中基础的等效质量为 M ,等效刚度为 k_0 ,等效阻尼为 c_0 ;机械设备 m_1 通过线性刚度 k_1 、线性阻尼 c_1 与柔性基础相连;NES 由附加质量 m_2 、立方刚度 k_N 、线性阻尼 c_N 构成,并与机械设备 m_1 耦合连接,并记质量比 $\mu=m_2/m_1$ 。简谐激励力 $F\cos(\omega t)$ 集中作用于机械设备 m_1 上。

根据牛顿第二定律,系统动力学方程为

$$\begin{cases} M\ddot{x}_0 + k_0x_0 + c_0\dot{x}_0 + k_1(x_0 - x_1) + c_1(\dot{x}_0 - \dot{x}_1) = 0 \\ m_1\ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_0) + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + k_N(x_1 - x_2)^3 + c_N(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F\cos(\omega t) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_N(x_2 - x_1)^3 + c_N(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中, x_0, x_1, x_2 分别为基础、设备、NES 的位移。

1.1 谐波平衡法

根据谐波平衡法(HBM),系统的近似解可假设为如下形式:

$$x_i(\tau) = \sum_{j=1}^N a_{ij}(\bar{\tau}) \cos(j\tau) + \sum_{j=1}^N b_{ij}(\bar{\tau}) \sin(j\tau) = S(\tau) \cdot R_i \quad (2)$$

根据式(2)可以得到系统的速度与加速度。式中下标 $i=0, 1, 2, j$ 为谐波阶数,谐波系数向量 R_i 与 $S(\tau)$ 分别为

$$S(\tau) = [\cos(\tau), \cos(2\tau), \dots, \cos(N\tau), \sin(\tau), \sin(2\tau), \dots, \sin(N\tau)]^T \quad (3)$$

$$R_i = [a_{i1}(\bar{\tau}), a_{i2}(\bar{\tau}), \dots, a_{iN}(\bar{\tau}), b_{i1}(\bar{\tau}), b_{i2}(\bar{\tau}), \dots, b_{iN}(\bar{\tau})] \quad (4)$$

将上述近似解代入方程(1),根据 Galerkin 法有

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} [M\omega^2 \ddot{x}_0 + k_0x_0 + c_0\omega\dot{x}_0 + k_1(x_0 - x_1) + c_1\omega(\dot{x}_0 - \dot{x}_1)] \delta S(\tau) d\tau = 0 \\ \int_0^{2\pi} [m_1\omega^2 \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_0) + c_1\omega(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + k_N(x_1 - x_2)^3 + c_N\omega(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F\cos(\tau)] \delta S(\tau) d\tau = 0 \\ \int_0^{2\pi} [m_2\omega^2 \ddot{x}_2 + k_N(x_2 - x_1)^3 + c_N\omega(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)] \delta S(\tau) d\tau = 0 \end{cases} \quad (5)$$

令谐波系数向量 R_i 为常数,对各阶谐波进行平衡,可得到一个非线性代数方程组。利用 Newton-Raphson 迭代法与伪弧长延伸法求解各阶谐波系数,进而得到系统的幅频响应特性曲线。保持谐波系数向量 R_i 为时间的变量,得到一个常微分方程组,根据 Floquet 稳定性理论可以判断系统解的稳定性。

1.2 数值方法

针对以上系统,可采用四阶 Runge-Kutta 法(R-K)对上述非线性方程组进行数值求解,并以此验证谐波平衡法分析的近似结果。利用 MATLAB 中的 ode45 函数实现 Runge-Kutta 法,求解时取计算时长为 5000 个周期,周期 $T=2\pi/\omega$,时间步长取为 $T/100$,并取最后 200 个周期的稳态响应数据进行计算

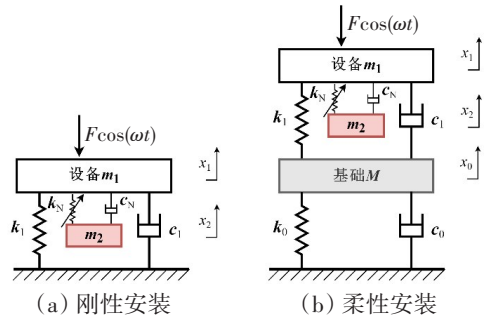


图 1 耦合非线性能量阱的隔振系统
Fig.1 Vibration Isolation Systems with a NES

分析,即取最后200个周期的均方根值作为系统的响应幅值。

2 数值验证与分析

2.1 方法验证

由于NES的刚度为立方非线性,故可忽略偶次和高阶谐波的影响,在谐波平衡法中近似解只需假设1阶和3阶谐波^[11]。本文采用谐波系数的均方根值来描述系统的幅频响应特性曲线,即

$$x_{ir} = \sqrt{\frac{1}{2}(a_{i1}^2 + b_{i1}^2 + a_{i3}^2 + b_{i3}^2)} \tag{6}$$

式中, x_{ir} 为系统位移的均方根值。

柔性基础非线性能量阱隔振系统的各参数取值如下: $M=100$ kg, $k_0=1 \times 10^7$ N/m, $c_0=50$ N·s/m, $m_1=30$ kg, $k_1=6 \times 10^4$ N/m, $c_1=50$ N·s/m, $m_2=3$ kg, $k_N=5 \times 10^7$ N/m³, $c_N=80$ N·s/m, 激励力幅值 $F=50$ N。

基础位移、设备位移的近似解析解与数值解对比如图2所示。从图2可以看出,近似解析方法(HBM)与数值方法(R-K)吻合得很好,故解析解与数值解均是准确可信的。

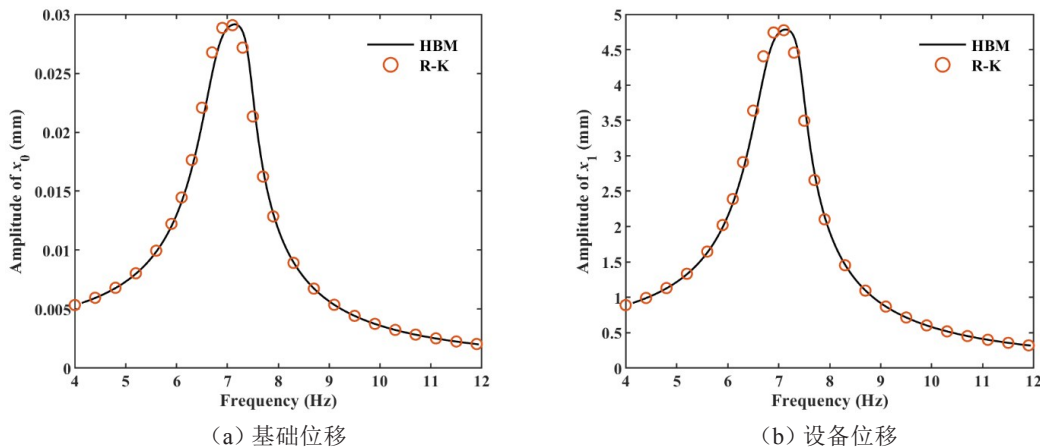


图2 近似解析解与数值解对比

Fig.2 Result comparison between HBM and R-K methods

2.2 讨论分析

首先,初步讨论NES的非线性刚度 k_N 、阻尼 c_N 对设备位移响应的影响,如图3所示。从图3(a)可

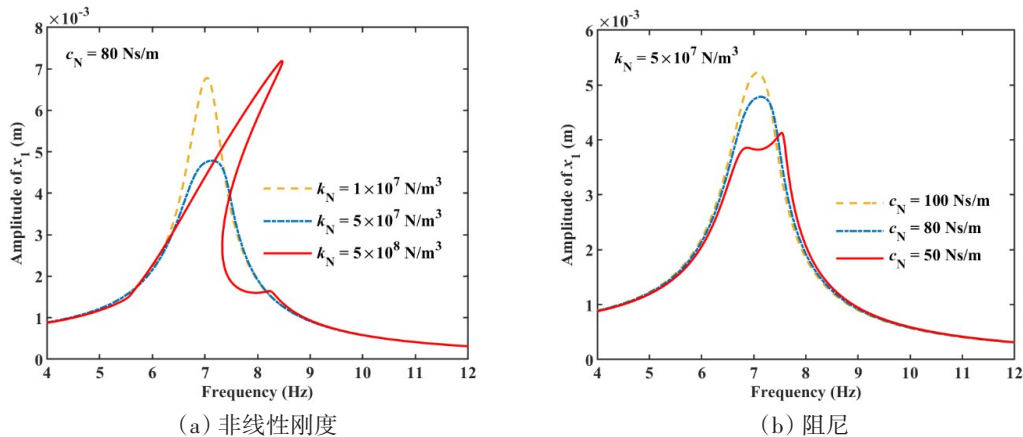


图3 NES刚度、阻尼变化下的设备幅频响应曲线

Fig.3 Amplitude versus frequency of the equipment

以发现,随着非线性刚度 k_N 的增大,设备位移响应呈现了不同的响应特性,当 k_N 较大时(图中对应 $k_N=5 \times 10^8 \text{ N/m}^3$),设备的位移幅频响应存在明显的硬化特性。并可由此推断,存在一个最优值 k_N 使得设备位移响应的峰值最小;在图3(b)中,对比不同阻尼 c_N 对设备位移的影响可以发现,随着阻尼 c_N 的减小,设备位移响应的峰值呈现下降趋势。

当 $k_N=5 \times 10^8 \text{ N/m}^3$ 、 $c_N=50 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 时,分别对设备位移稳态响应的稳定性进行判断,如图4所示。在图4(a)中,设备位移幅频响应的硬化区域有两段解的曲线是不稳定的;在图4(b)中,设备位移幅频响应在一阶共振频率附近是不稳定的。

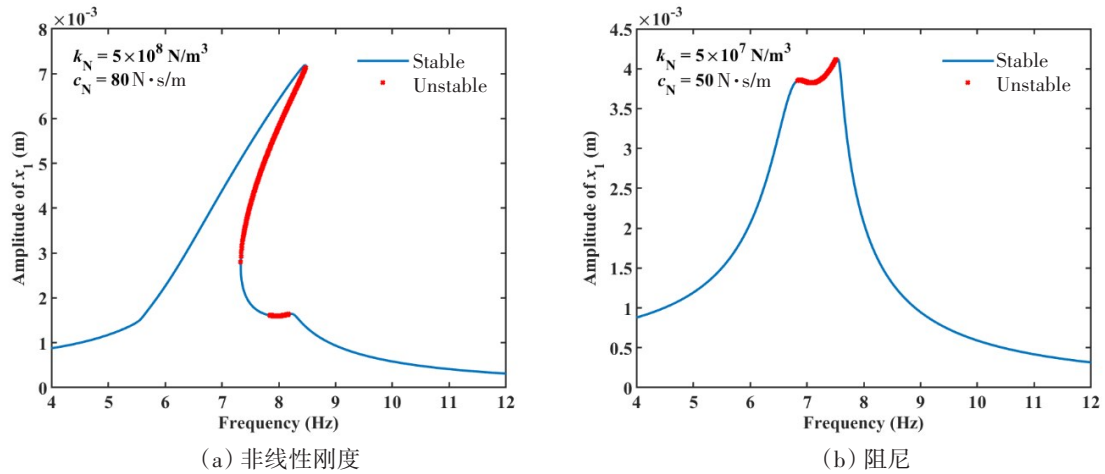


图4 设备响应稳定性判断

Fig.4 Judgment of equipment response stability

3 柔性基础对含NES系统的影响

3.1 柔性基础对系统幅频响应的影响

下面进一步研究基础刚度、质量对含NES的设备幅频响应峰值的影响。刚性安装的设备幅频响应峰值记为 A_r ,对应的频率为 f_r ;弹性安装的设备幅频响应峰值记为 A_1 ,对应的频率为 f_1 。定义弹性安装设备与刚性安装设备的参数之比 R_A 、 R_f 分别为

$$\begin{cases} R_A = \frac{A_1}{A_r} \\ R_f = \frac{f_1}{f_r} \end{cases} \quad (7)$$

当激励力分别为 $F=10 \text{ N}$ 、 50 N 、 100 N 时,基础刚度、质量对带有NES的设备幅频响应峰值影响的二维等高线图如图5所示。

由图5中可知,设备幅频响应的共振频率与共振峰值随着基础刚度变化呈现出“梯田”式的变化趋势,说明基础刚度对设备幅频响应共振峰的影响占主导地位。当基础刚度接近设备隔振器刚度时,基础质量才会对设备幅频响应产生影响。随着基础刚度的减小,设备的共振频率向低频移动,而共振峰值在不断地增大。当激励力较小($F=10 \text{ N}$)或较大($F=100 \text{ N}$)时,随着基础刚度的减小,几乎同时影响设备的共振频率与共振峰值;当 $F=50 \text{ N}$ 时,基础刚度首先影响的是共振频率,进一步减小刚度,才会影响共振峰值。

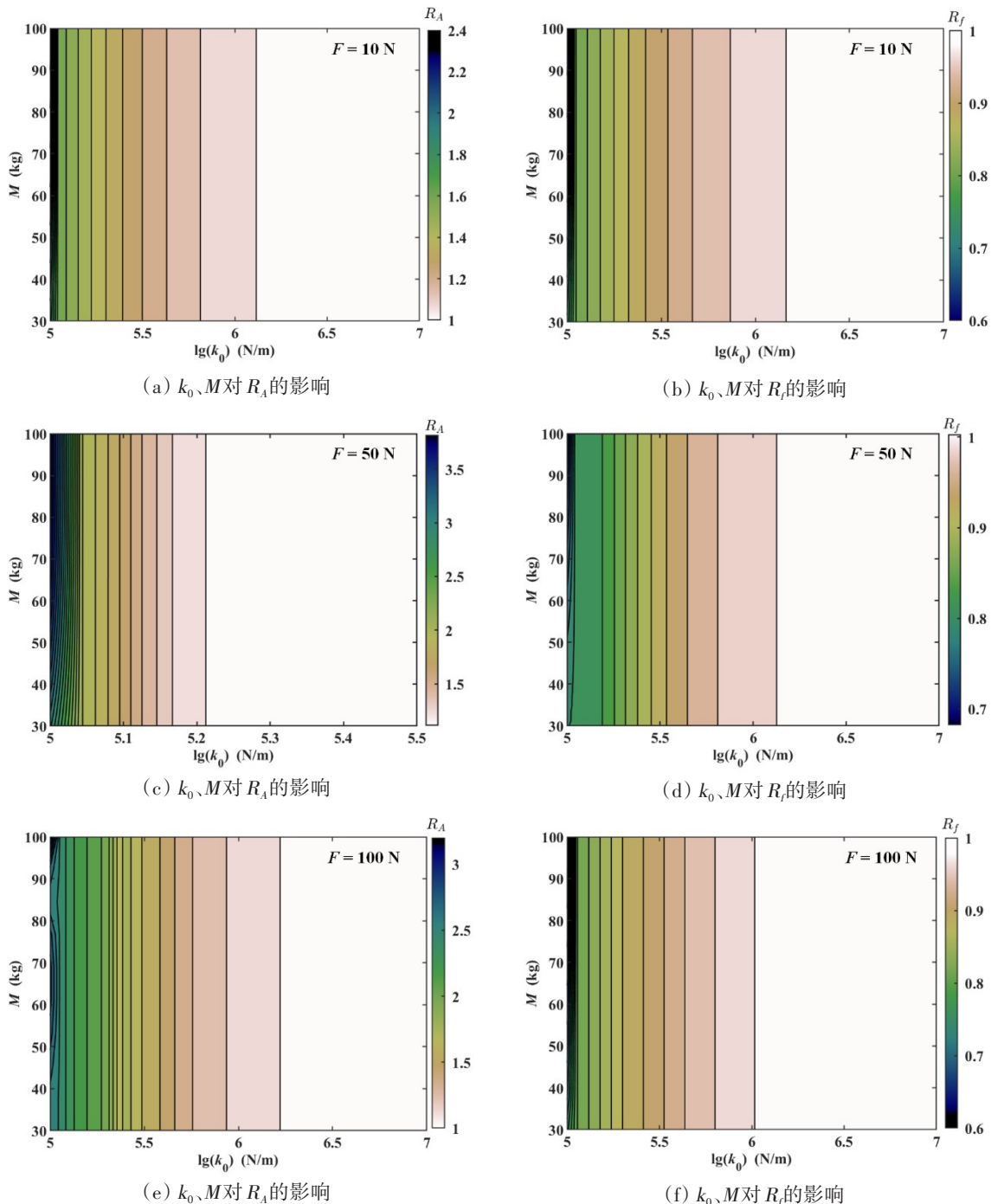


图5 基础刚度、质量对设备共振峰的影响

Fig.5 Influence of foundation stiffness and mass on R_A , R_f of the equipment

综上所述,参考不同激励力下的等高线图,根据图5(e)中的等高线,本文给出了一个基础刚度参考值,取 $\lg(k_0)=6.25\text{ N/m}$,即基础刚度 k_0 与设备刚度 k_1 之比 $k_0/k_1>30$ 时,可以不考虑基础对含有 NES 的隔振系统的影响。

对于舰船上的隔振系统,一般来说,基础的刚度还是比较大的,因为较小的刚度会使基础的响应快速增大。在下面的计算分析中,基础参数保持原始参数不变。

3.2 系统的非线性动力学行为分析

下面采用非线性动力学时间序列分析方法,利用时间历程图、频谱图、相图和庞加莱映射图研究

NES阻尼参数对系统运动状态的影响。在一阶共振频率 $\omega=44.92 \text{ rad/s}$ 时,采用四阶Runge-Kutta法求解系统的稳态响应,系统的初始值均取为0。

图6分别对应阻尼 $c_N=30 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 、 $50 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 、 $80 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 时,基础和设备的系统动力学特性。从图6(a)、(d)中可见,当 c_N 较小时,基础与设备均处于混沌运动状态;从图6(b)、(e)中可见,随着 c_N 增大,设备处于准周期运动状态,但基础却处于混沌运动状态;从图6(c)、(f)中可见,当 c_N 较大时,设备处于周期运动状态,但基础却处于弱准周期运动状态。综上所述,尽管此时的基础参数对设备的幅频特性影响很小,但是基础与设备二者在一阶共振频率处的运动状态可能是不同的。

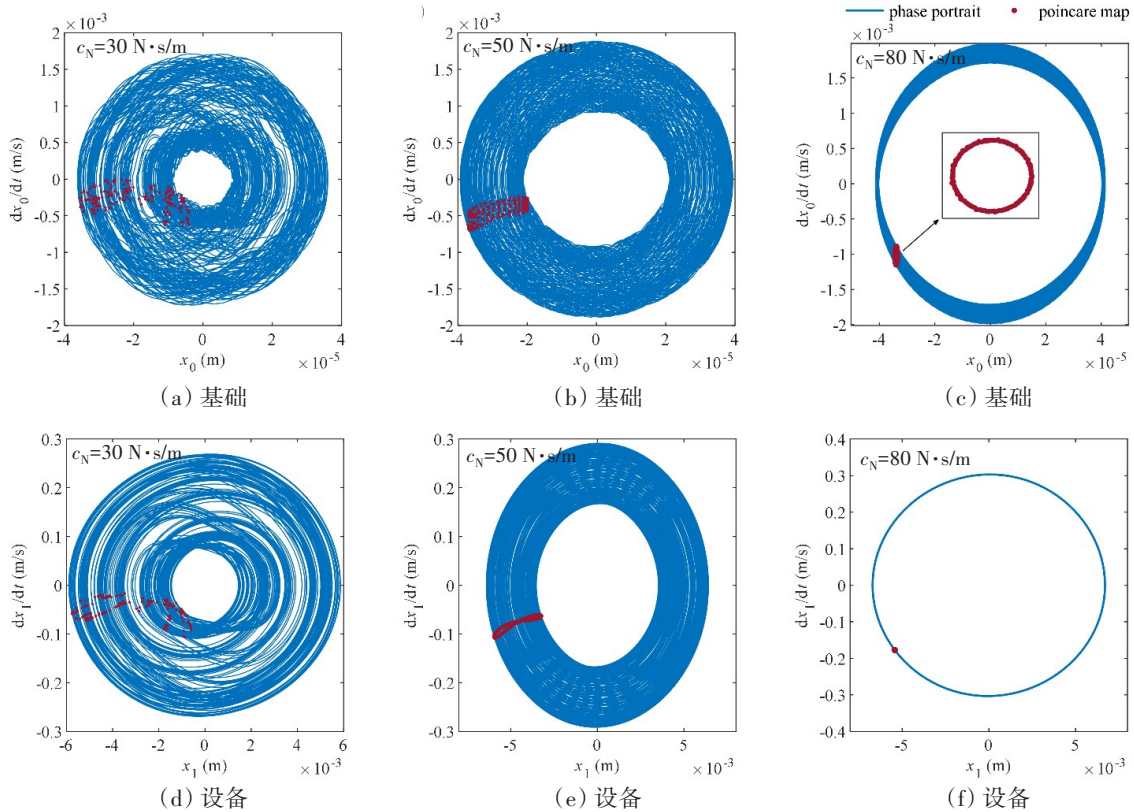


图6 不同阻尼下的系统动力学特性

Fig.6 Dynamic characteristics of the equipment and foundation with different damping coefficients

4 振动功率流评估减振效果

振动功率流可以综合性地预测和评估系统的动态特性,被广泛应用于系统隔振效果的理论分析。系统在一个周期内的时间平均输入功率流,以及传递到基础的时间平均功率流分别为

$$\bar{P}_{in} = \frac{1}{T} \int_0^T P_{in} dt = \frac{1}{T} \int_0^T [F \cos(\omega t) \dot{x}_1] dt \tag{8}$$

$$\bar{P}_1 = \frac{1}{T} \int_0^T P_1 dt = \frac{1}{T} \int_0^T [k_1(x_0 - x_1) + c_1(\dot{x}_0 - \dot{x}_1)] \dot{x}_0 dt \tag{9}$$

未控系统在基频处的时间平均输入功率流峰值记为 \bar{P}_{in}^n ,传递到基础的时间平均功率流峰值记为 \bar{P}_1^n ;带有非线性能量阱的系统在基频处的时间平均输入功率流峰值记为 \bar{P}_{in}^n ,传递到基础的时间平均功率流峰值记为 \bar{P}_1^n 。上述物理量均转换成分贝的形式,参考功率的基准值为 10^{-12} W 。下面分别定义两个功率流评价指标 R_{in} 、 R_1 ,来评估非线性能量阱的吸振效果,即

$$\begin{cases} R_{in} = \bar{P}_{in}^u - \bar{P}_{in}^n \\ R_t = \bar{P}_t^u - \bar{P}_t^n \end{cases} \quad (10)$$

从图 4(b)可知,弱阻尼系数下的系统是不稳定的,在实际的工程应用中应该避免。下面讨论 NES 非线性刚度、阻尼对系统振动功率流的影响,其中阻尼系数 $c_N=[70,120]$ N·s/m。对于不同的 NES 附加质量 $m_2=1.5$ kg($\mu=5%$)、3 kg($\mu=10%$),当非线性刚度和阻尼同时变化时,振动功率流评价指标 R_{in} 、 R_t 变化的二维等高线图如图 7 所示。

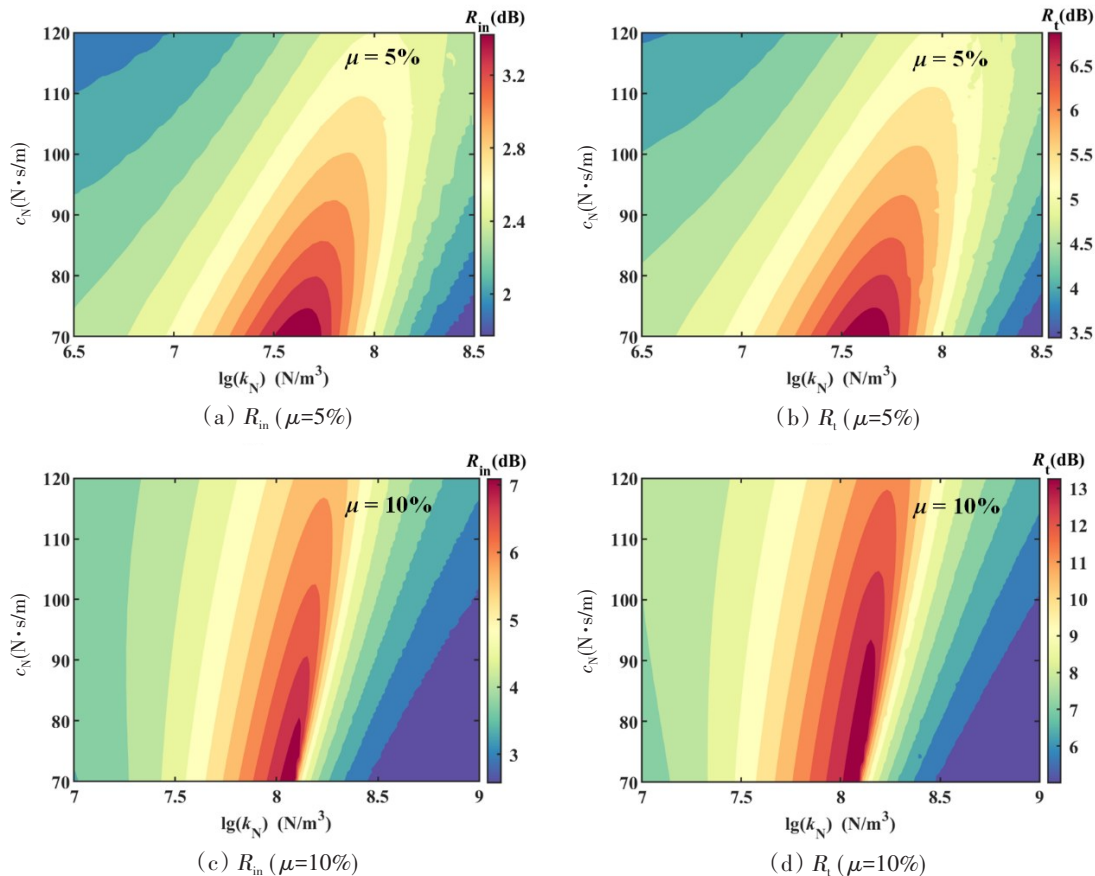


图 7 NES 非线性刚度、阻尼对系统振动功率流的影响云图

Fig.7 Contour plot of R_{in} and R_t for different M 、 c_N and k_N

在图 7(a)、(b)中,当 NES 的非线性刚度和阻尼同时变化时, R_{in} 、 R_t 有着比较复杂的变化趋势,但二者的等高线图变化趋势基本一致。当刚度较小时,阻尼越小减振效果越好;但当刚度较大时,阻尼越大减振效果越好。在减振性能最优区域形成了明显的山峰,故非线性刚度存在着一个最优解,对应的 R_{in} 和 R_t 的最大值分别为 3.56 dB、7.15 dB。在图 7(c)、(d)中, R_{in} 和 R_t 的变化趋势与图 7(a)、(b)基本一致,也有着明显的山峰,但对应最优的非线性刚度增大。由于 NES 质量增大,减振效果更加显著,其对应的 R_{in} 和 R_t 的最大值分别为 7.47 dB、13.95 dB。

从图 7 亦可知,当 NES 的非线性刚度和阻尼同时变化时,由于未控系统的振动功率流峰值始终不变,则可以认为:系统的时间平均输入功率流 \bar{P}_{in} ,以及传递到基础的时间平均功率流 \bar{P}_t 有着相似的变化趋势。

下面讨论非线性能量阱的质量和刚度这两个关键设计参数对振动功率流评价指标 R_{in} 、 R_t 的影响,其变化曲线如图 8 所示。当 NES 的质量较小时,如 2 kg 以下,功率流评价指标 R_{in} 、 R_t 对非线性刚度 k_N 并不敏感;随着附加质量的增大,减振效果对非线性刚度 k_N 比较敏感,此时适度的 k_N 有利于改

善减振效果,但太大的 k_N 又会抑制减振效果;当附加质量较大,达到3 kg以上时,增大 k_N 可以显著改善减振效果,且质量 m 大于3 kg,即质量比大于10%时, R_{in} 、 R_t 逐渐收敛,但 k_N 太大的情况下随着质量增大,对应的 R_{in} 、 R_t 会缓慢减小。

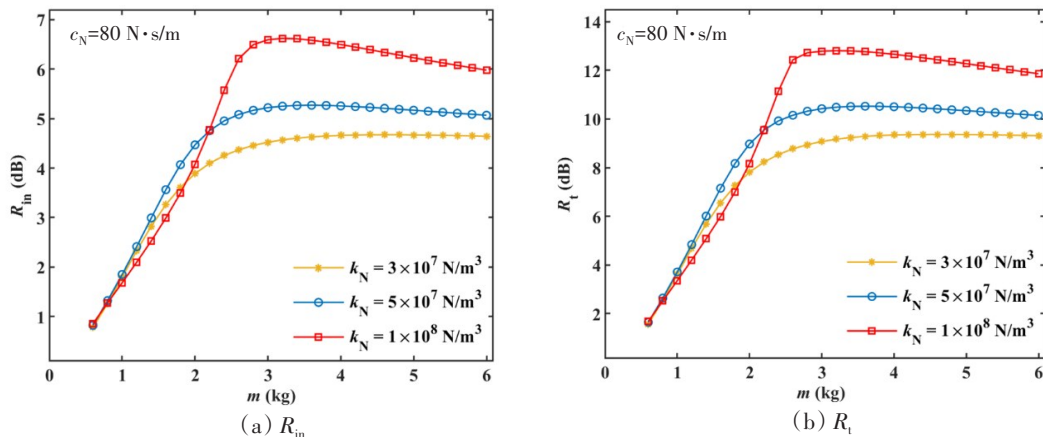


图8 非线性刚度、质量对NES系统振动功率流的影响曲线

Fig.8 Effect of NES nonlinear stiffness and mass on R_{in} and R_t

5 结 论

本文建立了柔性基础的非线性能量阱隔振系统的动力学模型,利用谐波平衡法和Runge-Kutta法分析了系统的动力学特性,并通过振动功率流分析了非线性能量阱的减振效果。针对本文分析的计算模型,得到了以下结论:

(1) 在基础参数中,刚度对主系统的影响最大,并给出了一个参考值,当基础刚度大于30倍的主系统刚度时,可以不考虑基础刚度对主系统振动特性的影响。

(2) 引入了NES后,基础和设备在一阶共振频率处的运动状态可能是不同的,如当设备处于准周期运动时,基础却处于混沌运动。

(3) 非线性能量阱减振效果优越,其非线性刚度存在着一个最优解。在本算例中,附加质量存在着一个上限值,上限质量比约为设备的10%,此时传递到基础的功率流峰值降低了13.95 dB;系统的时间平均输入功率流 \bar{P}_{in} 与传递到基础的时间平均功率流 \bar{P}_t 变化趋势相似。

参 考 文 献:

- [1] 徐 鉴. 振动控制研究进展综述[J]. 力学季刊, 2015, 36(4): 547-565.
Xu Jian. Advances of research on vibration control[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2015, 36(4): 547-565. (in Chinese)
- [2] Lou Jingjun, Zhu Shijian, He Lin, et al. Experimental chaos in nonlinear vibration isolation system[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 40(3): 1367-1375.
- [3] 柴 凯, 楼京俊, 杨庆超, 等. 高静低动隔振系统的双时延反馈混沌化[J]. 船舶力学, 2019, 23(5): 611-620.
Chai Kai, Lou Jingjun, Yang Qingchao, et al. Vibration isolation system based on high-static-low-dynamic stiffness with dual time-delay feedback control[J]. Journal of Ship Mechanics, 2019, 23(5): 611-620. (in Chinese)
- [4] 鲁 正, 王自欣, 吕西林. 非线性能量阱技术研究综述[J]. 振动与冲击, 2020, 39(04): 1-16+26.
Lu Z, Wang Z, Lu X. A review on nonlinear energy sink technology[J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(04): 1-16+26. (in Chinese)
- [5] Ding Hu, Chen Liqun. Designs, analysis, and applications of nonlinear energy sinks[J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 100(4):

- 3061–3107.
- [6] Gendelman O V, Starosvetsky Y, Feldman M. Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink I: Description of response regimes[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 51(1–2): 31–46.
- [7] Zang Jian, Chen Liqun. Complex dynamics of a harmonically excited structure coupled with a nonlinear energy sink[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2017, 33(4): 801–822.
- [8] Al-Shudeifat Mohammad A. Highly efficient nonlinear energy sink[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 76(4): 1905–1920.
- [9] 刘中坡, 乌建中, 王菁菁, 等. 轨道型非线性能量阱对高层结构脉动风振的控制仿真[J]. *振动工程学报*, 2016, 29(6): 1088–1096.
Liu Zhongpo, Wu Jianzhong, Wang Jingjing, et al. Simulation of track nonlinear energy sink for wind-induced vibration control in high-rise building[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2016, 29(6): 1088–1096. (in Chinese)
- [10] Zhang Zhen, Lu Zeqi, Ding Hu, et al. An inertial nonlinear energy sink[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 450: 199–213.
- [11] Geng Xiaofeng, Ding Hu. Two modal resonance control with an encapsulated nonlinear energy sink[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2022: 520.
- [12] 范舒铜, 申永军. 简谐激励下黏弹性非线性能量阱的研究[J]. *力学学报*, 2022, 54(9): 2567–2576.
Fan Shutong, Shen Yongjun. Research on a viscoelastic nonlinear energy sink under harmonic excitation[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(9): 2567–2576. (in Chinese)
- [13] 楼京俊, 李爽, 柴凯, 等. 非线性能量阱振动抑制效果理论分析与试验研究[J]. *工程力学*, 2022, 39(06): 202–211.
Lou Jingjun, Li Shuang, Chai Kai, et al. Theoretical and test research on the vibration suppression effect of nonlinear energy sink[J]. *Engineering Mechanics*, 2022, 39(6): 202–211. (in Chinese)
- [14] 李爽, 楼京俊, 柴凯, 等. 激励力幅值对非线性能量阱系统全局分岔特性的影响研究[J]. *船舶力学*, 2021, 25(4): 479–488.
Li Shuang, Lou Jingjun, Chai Kai, et al. Research on the influence of excitation amplitude on global bifurcation characteristics of nonlinear energy sink system[J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2021, 25(4): 479–488. (in Chinese)
- [15] 郑中强, 姚志鹏, 常宗瑜. 基于非线性能量阱的随机波浪载荷下导管架海洋平台的振动控制[J]. *中国海洋大学学报(自然科学版)*, 2021, 51(9): 103–110.
Zheng Zhongqiang, Yao Zhipeng, Chang Zongyu. Vibration control of jacket offshore platform under random wave load based on nonlinear energy sink[J]. *Periodical of Ocean University of China*, 2021, 51(9): 103–110. (in Chinese)
- [16] Sun Min, Hu Wenhua, Liu Jun, et al. Steady-state responses of mechanical system attached to non-smooth vibration absorber with piecewise damping and stiffness[J]. *Meccanica*, 2021, 56(2): 275–285.
- [17] Huang Dongmei, Li Ruihong, Yang Guidong. On the dynamic response regimes of a viscoelastic isolation system integrated with a nonlinear energy sink[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019: 79.
- [18] Krack Malte, Gross Johann. Harmonic balance for nonlinear vibration problems[M]. Springer, 2019.
- [19] Geng Xiaofeng, Ding Hu. Theoretical and experimental study of an enhanced nonlinear energy sink[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 104(4): 3269–3291.
- [20] 李响, 张业伟, 丁虎, 等. 谐波平衡法与复平均法计算强非线性系统稳态响应的区别[J]. *固体力学学报*, 2019, 40(5): 390–402.
Li Xiang, Zhang Yewei, Ding Hu, et al. The difference in steady-state responses of a strongly-nonlinear system via harmonic balance method and complexification-averaging technique[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2019, 40(5): 390–402. (in Chinese)
- [21] Yang J, Xiong Y P, Xing J T. Vibration power flow and force transmission behaviour of a nonlinear isolator mounted on a nonlinear base[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, 115–116: 238–252.
- [22] Li T Y, Zhang X M, Zuo Y T, et al. Structural power flow analysis for a floating raft isolation system consisting of constrained damped beams[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 202(1): 47–54.
- [23] Xu Yang, Yang Tiejun, Fuller Christopher R, et al. A theoretical analysis on the active structural acoustical control of a vibration isolation system with a coupled plate-shell foundation[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020: 170.
- [24] Yang J, Xiong Y P, Xing J T. Nonlinear power flow analysis of the Duffing oscillator[J]. *Mechanical Systems and Signal Pro-*

cessing, 2014, 45(2): 563–578.

- [25] Shi Baiyang, Yang Jian, Rudd Chris. On vibration transmission in oscillating systems incorporating bilinear stiffness and damping elements[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, 150: 458–470.
- [26] Zhu Chendi, Yang Jian. Vibration transmission and energy flow analysis of variable stiffness laminated composite plates[J]. *Thin-Walled Structures*, 2022: 180.