文章编号：1007−7294(2026)09−1569−08

基于高斯分布测点的水下矩形板声辐射预报研究

朱丽娟[1,2]，刘海建[3]，李天匀[1,2]，朱　翔[1,2]，张　成[1,2]，彭可挥[1,2]
（1. 华中科技大学 船舶与海洋工程学院，武汉 430074；2. 船舶和海洋水动力学湖北省重点实验室，武汉 430074；3. 武汉第二船舶设计研究所，武汉 430064）

摘要：有限测点信息条件下精准预报水下结构辐射声场对结构减振降噪研究十分重要。本文以矩形板为研究对象，提出采用高斯积分点分布策略布置测点的方法，并采用 L_1 范数稀疏解重构结构表面振速场，结合声振传递函数实现水下结构振动辐射声场预报。针对有限测点信息条件，分析截断模态阶数、测点数目和测点布置方式对振动辐射声场预报值准确度的影响。结果表明，在中低频段内，高斯积分点分布策略能优化测点布置，与传统均布测点方式相比，可减少测点数目，为工程领域有限测点信息条件下结构振动辐射声场预报提供理论支持。

关键词：L_1 范数稀疏解；声辐射预报；高斯分布测点；速度场重构
中图分类号：U663.1　　**文献标识码：**A　　**doi:** 10.3969/j.issn.1007−7294.2026.09.015

Acoustic radiation prediction of underwater rectangular plates based on Gaussian-distributed points

ZHU Li−juan[1,2], *LIU Hai−jian*[3], *LI Tian−yun*[1,2], *ZHU Xiang*[1,2], *ZHANG Cheng*[1,2], *PENG Ke−hui*[1,2]
(1. School of Naval Architecture and Ocean Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China; 2. Hubei Key Laboratory of Naval Architecture and Ocean Engineering Hydrodynamics, Wuhan 430074, China; 3. Wuhan Second Ship Design and Research Institute, Wuhan 430064, China)

Abstract: Accurate prediction of radiated sound fields from underwater structures with limited measurement points is crucial for vibration and noise reduction studies. This paper presents an investigation on a rectangular plate and the proposal of a measurement point arrangement strategy based on Gaussian integration point distribution. The surface vibration velocity field of the structure was reconstructed using an L_1 norm sparse solution, and the acoustic radiation sound field was predicted through vibro-acoustic transfer functions. Under the constraint of limited measurement points, the effects of truncated modal order, number of measurement points, and their arrangement on the prediction accuracy of the radiated sound field were analyzed. Results show that, within the mid-to-low frequency range, the Gaussian integration point distribution strategy optimizes sensor placement. Compared with traditional uniformly distributed measurement methods, the proposed strategy could achieve an accurate prediction of the radiated sound field with fewer measurement points, providing theoretical support for engineering applications involving sound field prediction under limited sensor conditions.

收稿日期：2026−04−21
基金项目：国家自然科学基金资助项目（52371318；52531011）
作者简介：朱丽娟（2001–），女，硕士，E-mail：zlj715@hust.edu.cn；
李天匀（1969–），男，博士，教授，通讯作者，E-mail：ltyz801@hust.edu.cn。

Key words: L_1 norm sparse solution; acoustic radiation prediction; Gaussian distribution measurement point; velocity field reconstruction

0 引 言

辐射噪声是水下航行器生存能力的重要衡量标准[1],矩形板作为结构的典型基本构件,广泛应用于水下航行器各部件中,研究其在中低频范围内的声辐射性能预报意义重大。在工程中获取结构振动信息的常用方法为布置振动传感器[2],但通常在大型结构或复杂环境条件下可布置的测点数目和测点位置十分有限[3]。如何优化测点布置方案,并结合水下结构辐射声场预报方法实现在少量测点条件下精准预报结构辐射声场是水下结构振动研究发展的重要目标。

于李洋等[4]基于传递函数及表面有限测点重构水下复杂结构振动和声场,并利用有限元数值仿真研究了测点位置、测点数目、激励源建模等不同情况下结构表面振动和声场的重构规律;王斌[5]基于声场叠加原理,应用声传递特性创建结构振动与辐射声场之间的关系,提出单元辐射叠加法,在更宽的频率范围内实现了结构辐射声场的快速近似预报;陶建成等[6]基于简支矩形板,运用振动模态和声辐射模态对其辐射声功率进行了预报,并比较了两种模态展开方法对传感器数目的要求;叶海林等[7]基于L_1范数稀疏解重构了结构表面振速场,采用传递函数法和声传递矢量得到了双层加筋圆柱壳结构测点加速度到声场测点声压的声辐射传递函数以及结构测点加速度到辐射声功率之间的传递函数;Simarda等[8]在声源数目有限的情况下,利用声源的稀疏特性,通过求解L_1范数优化问题,对声源的识别和定位进行了研究;余鹏等[9]针对水下单层圆柱壳结构振动声辐射预报中的测点布置问题,提出均匀子集随机选取测点方法,避免传统均匀布置方法中测点选择的主观性和盲目性,提高了结构振动声辐射预报结果的精度。

本文在前人研究基础上,提出采用高斯积分点分布策略优化测点位置的方法。文中模型选取高斯积分点位置作为测点位置的步骤是:利用高斯积分点原理生成二维积分点,并应用 Matlab 仿真将二维积分点映射到本文模型上,最后获取测点坐标信息;基于模态参与因子的稀疏特性,采用L_1范数稀疏解重构水下矩形板振动速度场,结合声振传递函数,实现少量测点信息条件下水下矩形板振动辐射声场预报;分析不同截断模态阶数、测点布置策略对振动声辐射预报值准确度的影响,探究在不影响预报精度情况下的最少截断模态阶数和测点数目。研究可为工程测点布置方式提供一定依据,为有限测点信息条件下准确预报结构辐射声场提供理论支持。

1 基本理论

1.1 振速场重构理论

将水下结构的振动响应用矩阵形式表达,得到其运动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{x}(t)+\boldsymbol{C}\dot{x}(t)+\boldsymbol{K}x(t)=f(t) \tag{1}$$

式中:$\boldsymbol{M}$为质量矩阵;$\boldsymbol{C}$为阻尼矩阵;$\boldsymbol{K}$为刚度矩阵;$f(t)$表示激励力,包括流体载荷和外界激励;$x(t)$为结构各质点的位移向量。

基于模态叠加原理,将结构振速场在模态空间中展开,并对式(1)进行 Laplace 变换,联立二者即可得到结构频域中的振动表达式[7]为

$$-\omega^2\boldsymbol{M}\sum_{r=1}^{\infty}f_r\xi_r+j\omega\boldsymbol{C}\sum_{r=1}^{\infty}f_r\xi_r+\boldsymbol{K}\sum_{r=1}^{\infty}f_r\xi_r=F \tag{2}$$

式中,f_r表示真空中结构的第r阶法向振型,ξ_r表示结构的第r阶模态参与因子,ω为结构振动圆频率。

可得第s阶模态参与因子[10]为

$$\xi_s = \frac{f_s^{\mathrm{T}} F}{-\omega^2 m_s + j\omega c_s + k_s} \tag{3}$$

式中: f_s^{T}, $m_s = f_s^{\mathrm{T}} M f_s$, $c_s = f_s^{\mathrm{T}} C f_s$, $k_s = f_s^{\mathrm{T}} K f_s$分别表示真空中结构的第$s$阶法向振型、模态质量、模态阻尼和模态刚度[10]。

由上述分析可知, 激励力仅影响模态参与系数, 因此水下结构的振速场可以在干模态条件下展开, 并通过水下结构表面有限测点的振速, 利用L_1范数稀疏解得到其在干模态条件下的模态参与因子, 进而结合结构模态振型向量重构水下结构振速场。

通过上述模态叠加理论可知, 当对水下结构施加法向激励力时, 假设湿结构表面被离散成n自由度系统, 则结构表面法向振速场$[V]_{n\times 1}$[10] 可表示为

$$[V]_{n\times 1} = [f]_{n\times n}[\xi]_{n\times 1} \tag{4}$$

基于模态截断法, 忽略中低频段范围内对结构振动响应影响较小的高阶模态。假设截断模态阶数为N, 则水下结构表面任意M个测点的法向振速$[V]_{M\times 1}$[10] 可表示为

$$[V]_{M\times 1} = [f]_{M\times N}[\xi]_{N\times 1} \tag{5}$$

由此可通过M个测点的振速和N阶截断模态阶数得到模态参与因子$[\xi]_{N\times 1}$, 并基于模态参与因子和模态振型向量重构结构振速场。由于实际应用中, 一般测点数目小于模态截断数[7], 所以式(5)中, M小于N, 该式为欠定方程组, 即方程有多个解。由于在某一频率下, 决定结构振动响应的只有少数几阶模态, 模态参与向量具有非常大的稀疏特性, 因此引入L_1范数稀疏解求解模态参与因子ξ。

L范数稀疏解最优化问题是一种数学优化问题, 其目标是找到一个解向量, 该向量在某个L范数下具有最小的稀疏度。不同的L范数会导致不同的稀疏度惩罚, 其中, L_0范数为最强的稀疏度惩罚, 但L_0范数稀疏解的求解在计算上通常非常困难。L_1范数是向量中所有元素的绝对值之和, 它比L_0范数更易于求解, 并且仍可产生稀疏解[11], L_2范数是向量中所有元素的平方和的平方根, 它是最弱的稀疏度惩罚, 且通常不会产生稀疏解。因此本文采用L_1范数求解, 并将L_1范数松弛为一个凸函数, 从而将问题转换为一个凸优化问题高效求解。最终本文L_1范数稀疏优化问题求解模态参与因子ξ表达式[10] 为

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & \|\xi\|_1 \\ \text{s.t.} & [V]_{M\times 1} = [f]_{M\times N}[\xi]_{N\times 1} (M < N) \end{array} \right\} \tag{6}$$

1.2 辐射声场理论

基于边界元理论, 在结构形状、流体属性一定时, 结构辐射声场由结构的表面振速分布决定, 由边界积分表达式可得到声振传递函数, 该函数建立了水下结构表面振速和辐射声场的关系。Helmholtz 积分公式表明, 在线性情况下, 根据声源表面声压和法向振速, 便可得到结构声源辐射声场中任意点的声压值。

在三维无限声场中, 自由格林函数[5] 表示为

$$G(\vec{r}, \vec{r}_s) = \frac{\mathrm{e}^{jk\vec{r}}}{4\pi\left|\vec{r} - \vec{r}_s\right|} \tag{7}$$

式中: $\vec{r}$为声场中观测点的空间位置, $\vec{r}_s$为结构表面积分点的位置。

根据波动方程的积分解, 引入格林函数, Helmholtz 积分公式[5] 可写为

$$p(\vec{r}) = \int_s \left[p(\vec{r_s}) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r_s})}{\partial n_s} - j\rho\omega v(\vec{r_s}) G(\vec{r}, \vec{r_s}) \right] \mathrm{d}S \tag{8}$$

式中: $p(\vec{r})$为结构表面声压, $v(\vec{r_s})$为结构表面法向振速, S为结构辐射面, n_s为结构表面法向矢量。

当 Helmholtz 积分公式中的声场求解距离r无限接近结构声源表面[10] 时, 可得

$$\left\{ \begin{array}{l} C(\vec{r_s}) = \dfrac{1}{2} \\ C(\vec{r_s}) p(\vec{r_s}) = \displaystyle\int_s \left[p(\vec{r_s}) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r_s})}{\partial n_s} - j\rho\omega v(\vec{r_s}) G(\vec{r}, \vec{r_s}) \right] \mathrm{d}S \end{array} \right\} \tag{9}$$

对上式进行离散化处理, 得到表面声压向量与法向振速向量之间矩阵的简化表达式[10] 为

$$p(\vec{r}) = ([c]_{N\times1}^{\mathrm{T}}[A]^{-1}[B] + [d]_{N\times1}^{\mathrm{T}})\{v\} \tag{10}$$

定义声传递向量[11]

$$[ATV]_{N\times1}^{\mathrm{T}} = [c]_{N\times1}^{\mathrm{T}}[A]^{-1}[B] + [d]_{N\times1}^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

得到连接结构表面法向振速和辐射声场的声传递函数[10]

$$p(\vec{r}) = [ATV]_{N\times1}^{\mathrm{T}}\{v\} \tag{12}$$

式中: $p(\vec{r})$为外场场点声压, $\{v\}$为速度场向量。

采用声传递向量描述结构表面振动与辐射声场之间的传递规律, 声场声压等于表面振速向量与声传递向量的内积。得到重构速度场后, 便可依据声传递函数, 计算外场场点声压, 实现结构声辐射预报。

2 收敛性分析

2.1 截断模态分析

为验证本文方法的正确性, 本文以四边固支约束且被无限大水域包裹的矩形板为计算模型, 计算模型的参数如表 1 所示。

表 1 计算模型参数

Tab.1 Calculation parameters of the model

名称	符号/单位	数值	名称	符号/单位	数值
矩形板边长	L/m	1.2	点激励力幅值	F/N	10
杨氏模量	E/Pa	2.1×10^{11}	声速	$c/(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$	1500
板厚	t/m	0.004	声介质密度	$\rho_w/(\mathrm{kg\cdot m^{-3}})$	1000
材料密度	$\rho/(\mathrm{kg\cdot m^{-3}})$	7850	泊松比	ε	0.3
阻尼比	ζ	0.005	最大计算频率	Hz	600

已知在中、低频率范围内, 只有少数几阶模态对振动响应有较大贡献, 模态参与因子具有稀疏特性[12], 因此分析模态参与因子, 即可确定对结构振动响应起主要贡献作用的模态阶数, 进一步协助选取分析结构振动所需的最少截断模态阶数, 此处展示 100 Hz 与 600 Hz 计算频率下前 800 阶模态参与因子分析结果, 如图 1 所示。

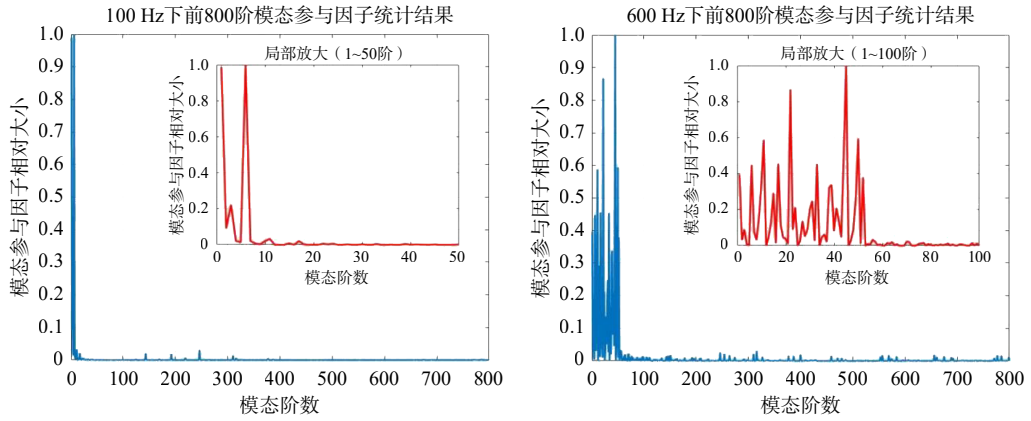


图 1 模态参与因子分析

Fig.1 Analysis of modal participation factors

图 1 表明在较低计算频率 100 Hz 下起主要贡献作用的模态集中在前 10 阶, 在计算频率 600 Hz 下起主要贡献作用的模态集中在前 60 阶。因此, 在本文计算频率下, 随着计算频率升高, 起主要贡献作用的模态阶数增多, 即在较高频段, 模态参与因子的稀疏特性降低。

为验证模态参与因子分析所得最少模态阶数的准确性，此处分别选取前 60 阶模态与前 40 阶模态进行对比计算。测点布置方面，利用高斯积分点原理生成6×6个二维积分点，即选取 36 个高斯测点，将积分点映射于本文模型得到测点坐标信息，提取测点处板的振动响应数据作为采样数据。高斯积分点的数学本质是在最少点数下对多项式函数实现高精度的数值积分；而许多振动形态（尤其是低阶模态）的振型函数均可用多项式较好地近似。因此，将测点布置于高斯积分点处，可用少量测点高效表征结构振动形态特征，使基于这些测点信息的速度场重构更加准确，具体高斯测点布置如图 2 所示。

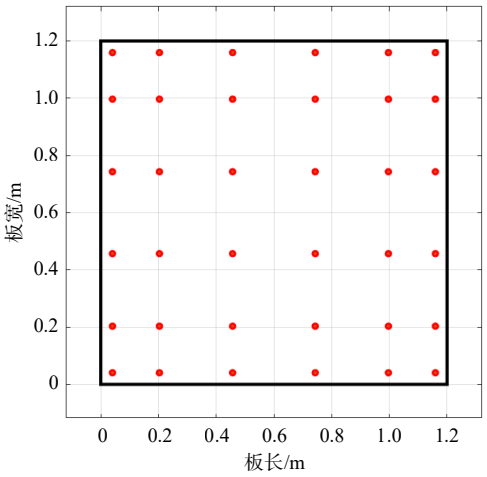


图 2　高斯测点选取

Fig.2　Selection of Gaussian measurement points

基于6×6个高斯测点振动响应数据，利用本文方法重构水下结构振速场，并将重构结果与解析法直接计算结果进行对比，本文采用均方振速（参考级为1×10^{-9}（$\mathrm{m\cdot s^{-1}}$））表示振速场，具体结果对比如图 3 所示。进一步，通过声振传递函数，完成对结构表面声辐射的预报，并将得到的声压预报结果与解析法直接计算的声压结果进行对比，为便于直观比较，此处用声压级表示（参考级为1×10^{-6}（Pa）），如图 4 所示。

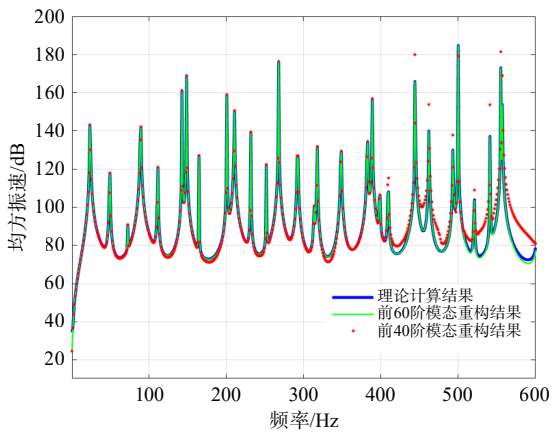


图 3　均方振速结果对比

Fig.3　Comparison of mean square vibration velocity results

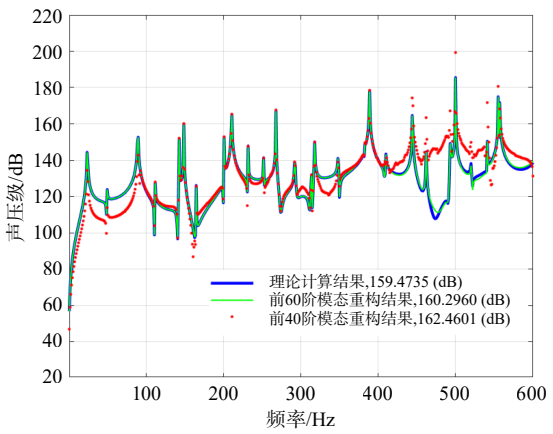


图 4　声压预报结果对比

Fig.4　Comparison of predicted sound pressure results

如图 3 所示：当截断模态取前 60 阶时，均方振速曲线重合度高；当截断模态取前 40 阶时，均方振速曲线重合度开始降低，且主要表现在高频区域。如图 4 所示，在测点数目与位置布置均相同的条件下，当选取的截断模态阶数涵盖本文计算频率下所有起主要贡献作用的模态阶数时，预报声压总级为 160.296 dB，与理论声压总级计算结果相比，重构预报误差仅 0.823 dB，相对误差绝对值仅为 0.516%。当选取的截断模态阶数无法包含计算频率下所有起主要贡献作用的模态阶数时，预报精度下降，误差约为 3 dB，达到工程预报所能接受的误差范围极限，且误差主要来源于较高频区域，与模态参与因子分析结果一致。因此，针对本文模型与计算频率，精准预报结构声辐射所需的最少截断模态阶数为 60 阶。

2.2 测点数量分析

确定最少截断模态阶数后，进一步研究采用高斯积分点原理分布测点策略时，预报本文模型辐射声场所需的最少测点数目。逐步减少测点，分别选取 16 个、9 个和 4 个高斯测点进行分析，所得重构速度场的均方振速对比曲线和声压预报对比曲线分别如图 5 和图 6 所示。

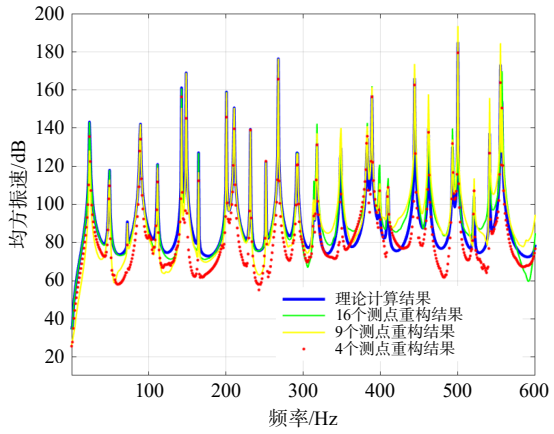


图 5 高斯测点下均方振速结果对比

Fig.5 Comparison of mean square vibration velocity results under Gaussian measurement points

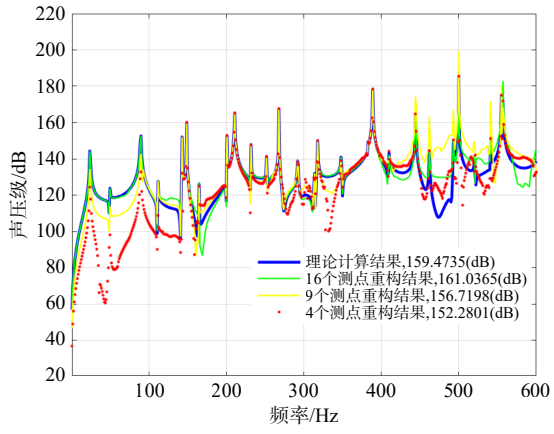


图 6 高斯测点预报结果对比

Fig.6 Comparison of predicted results from Gaussian measurement points

如图 5 所示：当测点数目减少为 16 个时，均方振速曲线吻合度较为良好；当测点数目减少为 9 个时，均方振速曲线吻合度开始下降；当测点进一步减少为 4 个时，均方振速曲线吻合度明显下降。

如图 6 所示：声压预报结果变化趋势与均方振速结果趋势变化基本一致，当测点数目减少为 9 个时，预报结果误差增大为 2.75 dB；当测点进一步减少为 4 个时，预报结果误差再度增大至 7.19 dB。由此可得，在本文模型与计算方法下，预报误差在工程预报所能接受的误差范围内，所需的最少高斯测点数目为 9 个。

3 高斯测点与均布测点分析

选择传统均布测点进行对比分析，验证高斯分布测点是否可以优化测点布置。前文已确定分析本文模型所需的最少截断模态阶数与高斯测点数目，在此条件下分别选取 16 个、9 个和 4 个传统均布测点进行分析，最终声压预报对比曲线如图 7 所示。

如图 7 所示：当选取 16 个传统均布测点时，预报结果良好；当测点数量减少为 9 个时误差明显增大，达 5.52 dB；当测点进一步减少为 4 个时，预报结果误差再度增大至 7.84 dB。进一步，将传统均布测点预报结果与高斯测点预报结果进行绘图对比，如图 8 所示，其中预报结果误差如表 2 所示。

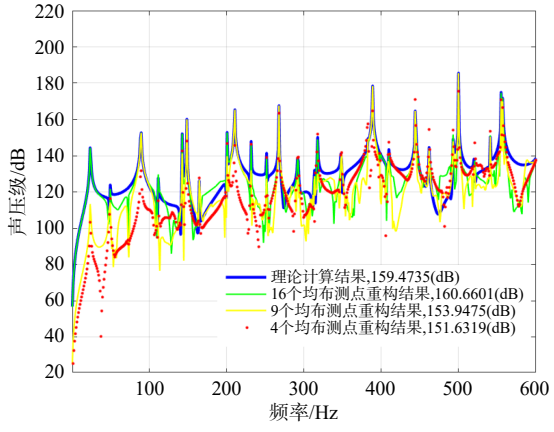


图 7 均布测点预报结果对比

Fig.7 Comparison of predicted results from uniformly distributed measurement points

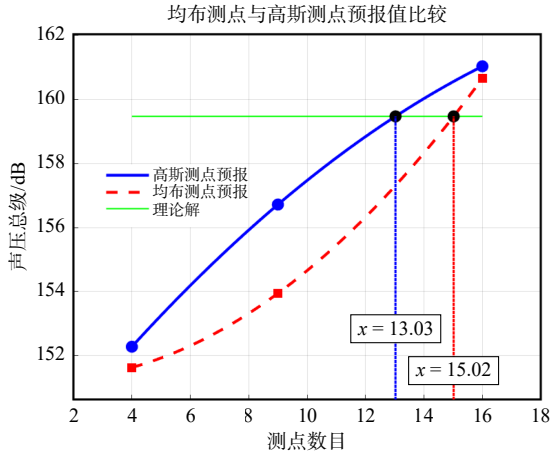


图 8 两种测点预报结果对比

Fig.8 Comparison of predicted results from two measurement points

表 2 两种测点选取及误差数据

Tab.2 Selection and error data of two measurement points

类型	模态阶数	测点数目	均布相对误差绝对值（dB）	高斯相对误差绝对值（dB）
具体数目	60	16	1.19	1.56
	60	9	5.52	2.75
	60	4	7.84	7.19

由图 8 可得，在相同预报精度下，即 y 值相同时，采用高斯分布测点方式总比采用传统均布测点方式所需的测点数目少。若两种测点布置策略预报的水下结构辐射声场预报误差（与理论值相比）均小于 0.001 dB，在同等预报精度要求下，采用高斯分布测点方式需要约 13 个测点，而采用传统均布测点方式则需要约 15 个测点，同时，当高斯测点数量大于 13 个，均布测点数量大于 15 个时，随着测点数量的增加，两种测点预报误差并未立即减小，这是由于 L_1 范数稀疏解的有效性依赖于模态参与因子稀疏性，当测点过密时，可能会引入信息冗余，从而导致结构重构偏差，预报误差变大。由此可得，在相同预报精度下，采用高斯分布测点方式相比传统均布测点方式可减少测点数目，且测点数目并非越多越好，存在一个最优测点数量区间。由表 2 可得，当测点数目均为 9 个时，高斯测点预报误差仅为 2.75 dB，而均布测点预报误差达 5.52 dB，已超出工程可接受误差范围。综上可知，采用高斯积分点原理分布测点可以优化测点布置。

4 结　论

本文以四边固支约束的水下矩形板为研究对象，提出了一种通过高斯积分点分布策略测点布置方法。该方法在有限测点信息条件下，采用 L_1 范数稀疏解方法重构结构表面振速场，结合声振传递函数实现了结构声辐射的准确预报，进而分析了本文计算模型所需的最少截断模态阶数与测点数目，并与传统均布测点布置方法进行了对比，结果验证了采用高斯积分点原理分布测点可优化测点布置。

针对不同截断模态阶数与测点布置方法对结构声辐射预报影响进行对比分析，得出以下结论：

（1）最少截断模态阶数应包含对结构响应起主要贡献的所有模态，且在较高频段，模态参与因子的稀疏性降低。

（2）采用高斯积分点分布策略可优化测点布置，结合本文水下辐射声场预报方法可实现较少测点信息条件下水下结构的辐射声场准确预报。

（3）本文方法适用于中低频段，在较高频段，可根据高频区域模态参与因子的特性，寻找更适合的声辐射预报方法，分析更优化的测点布置策略。

（4）针对复杂结构，后续可将结构划分为若干子区域，分区域进行分析，进一步确定最佳测点布置。

参　考　文　献：

[1] 韩国文, 吴绍维. 潜艇结构水下低频声辐射特性分析[J]. 船海工程, 2023, 52(5): 121–125.
Han G W, Wu S W. Analysis of low-frequency underwater sound radiation characteristics of submarine structures[J]. Ship & Ocean Engineering, 2023, 52(5): 121–125. (in Chinese)

[2] 周　祥, 张袁元. 基于振动分析的机械结构损伤识别方法综述[J]. 机械工程与自动化, 2017(1): 216–218.
Zhou X, Zhang Y Y. A review of vibration analysis-based damage identification methods for mechanical structures[J]. Mechanical Engineering & Automation, 2017(1): 216–218. (in Chinese)

[3] 杨　辰. 结构健康监测的传感器优化布置研究进展与展望[J]. 振动与冲击, 2020, 39(17): 82–93.
Yang C. Research progress and prospects of sensor optimization placement for structural health monitoring[J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(17): 82–93. (in Chinese)

[4] 于李洋, 龚　强. 基于表面有限测点的水下复杂结构振动和声场重构[J]. 中国水运 (下半月), 2020, 20(24): 7–9.
Yu L Y, Gong Q. Vibration and sound field reconstruction of underwater complex structures based on limited surface measurement points[J]. China Water Transport, 2020, 20(24): 7–9. (in Chinese)

[5] 王　斌. 基于表面振动监测的大型水下结构辐射噪声预报研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2008.
Wang B. Research on radiation noise prediction of large underwater structures based on surface vibration monitoring[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2008. (in Chinese)

[6] 陶建成, 邱小军. 两种模态展开法预测结构辐射声功率时振动传感器数目的要求研究[J]. 应用声学, 2009, 28(4): 283–290.
Tao J C, Qiu X J. Study on the requirement of vibration sensor number for predicting structural radiated sound power using two modal expansion methods[J]. Journal of Applied Acoustics, 2009, 28(4): 283–290. (in Chinese)

[7] 叶海林, 陈美霞, 陶襄樊. 基于 L_1 范数稀疏解的水下双层圆柱壳振动声辐射预报影响因素研究[J]. 船舶力学, 2019, 23(2): 234–244.
Ye H L, Chen M X, Tao X F. Study on influencing factors of vibration and sound radiation prediction of underwater double-layer cylindrical shells based on L_1-norm sparse solution[J]. Journal of Ship Mechanics, 2019, 23(2): 234–244. (in Chinese)

[8] Simard P, Antoni J. Acoustic source identification: Experimenting the ℓ 1 minimization approach[J]. Applied Acoustics, 2013, 74(7): 974–986.

[9] 余　鹏, 张晓宇, 陈　杰, 等. 水下单层圆柱壳振动声辐射预报的测点布置改进方法[J]. 舰船科学技术, 2021, 43(3): 44–48+53.
Yu P, Zhang X Y, Chen J, et al. An improved measurement point arrangement method for vibration-acoustic radiation prediction of underwater single-layer cylindrical shells[J]. Ship Science and Technology, 2021, 43(3): 44–48+53. (in Chinese)

[10] 陶襄樊. 基于L1 范数稀疏解水下圆柱壳声振响应评估[D]. 武汉: 华中科技大学, 2014.
Tao X F. Evaluation of vibro-acoustic response of underwater cylindrical shells based on L1-norm sparse solution[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2014. (in Chinese)

[11] 孙　铁. 基于稀疏重构的水下结构噪声源定位方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2018.
Sun T. Research on localization method of underwater structural noise sources based on sparse reconstruction[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2018. (in Chinese)

[12] 温华兵, 左言言, 夏兆旺, 等. 加筋圆柱壳体支撑结构振动传递特性试验研究[J]. 船舶力学, 2013, 17(7): 785–792.
Wen H B, Zuo Y Y, Xia Z W, et al. Experimental study on vibration transmission characteristics of support structure for stiffened cylindrical shells[J]. Journal of Ship Mechanics, 2013, 17(7): 785–792. (in Chinese)