

文章编号: 1007-7294(2026)03-0387-12

错列管束绕流的动力学模态分解参数研究

韩 旺¹, 曹贻鹏¹, 刘 晨¹, 孙凯浪², 孙玉东², 赵晓臣¹

(1. 哈尔滨工程大学 动力与能源工程学院, 哈尔滨 150001; 2. 中国船舶科学研究中心, 江苏 无锡 214082)

摘要: 本文对错列换热管束绕流场进行了非定常数值仿真, 使用动力学模态分解(Dynamic Mode Decomposition, DMD)方法对数值计算得到的管束绕流涡量数据进行了分析及流场重构, 研究了快照数、奇异值的截断阶数对流场重构的影响。结果表明: 基于 DMD 方法能够准确有效地获取错列管束绕流非定常流场中涡量数据的模态结构和对应模态的频率、增长率, 基于主要模态重构的流场与数值结果吻合较好, 验证了 DMD 方法在错列管束绕流分析中的有效性; 根据无量纲周期数, 提出了最小快照数准则, 能够直接得到有效的低误差快照数, 极大减少了计算成本; 从涵盖能量的程度出发, 提出了最优奇异值截断阶数准则, 有效避免过大的奇异值截断阶数而带来的误差。该研究可为复杂换热器管束绕流场的 DMD 研究提供参数选取依据。

关键词: 错列管束; 动力学模态分解; 流场重构; 快照数; 奇异值截断阶数

中图分类号: O351.2 文献标识码: A doi: 10.3969/j.issn.1007-7294.2026.03.005

The study of dynamic mode decomposition parameters for the flow around staggered tube bundles

HAN Wang¹, CAO Yi-peng¹, LIU Chen¹, SUN Kai-lang², SUN Yu-dong², ZHAO Xiao-chen¹

(1. Harbin Engineering University, Harbin 150001, China; 2. China Ship Scientific Research Center, Wuxi 214082, China)

Abstract: Unsteady numerical simulations were systematically conducted to investigate the transient flow characteristics around a staggered heat exchanger tube bundle. The vorticity distribution derived from numerical simulations was analyzed using Dynamic Mode Decomposition (DMD) for modal extraction and flow field reconstruction. The effects of the number of snapshots and singular value truncation order on the accuracy of reconstructed flow fields were studied. The results indicate that DMD enables accurate extraction of both vortical mode structures and their associated characteristic parameters, including frequencies and growth rates, from transient flow fields surrounding a staggered tube bundle. Flow field reconstructions obtained from dominant coherent modes exhibit strong agreement with high-fidelity numerical benchmarks. This confirms the effectiveness of the DMD methodology in resolving vortex-driven flow interactions in staggered tube bundle configurations. A minimum snapshot criterion is proposed based on the dimensionless period number, allowing direct determination of an appropriate number of snapshots with minimal computational error, which in turn substantially reduces computational costs. In terms of the energy retention ratio, a criterion for determining the optimal singular value truncation order is established, alleviating errors caused by overly aggressive truncation thresholds. This study provides theoretical insights into parameters selection for DMD analysis of complex flow fields around heat exchanger tube bundles.

收稿日期: 2025-06-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52241101)

作者简介: 韩 旺(1997-), 男, 博士研究生, E-mail: han_wang@hrbeu.edu.cn;

曹贻鹏(1980-), 男, 副教授, 通讯作者, E-mail: yipengcao06@163.com。

Key words: staggered tube bundle; Dynamic Mode Decomposition; flow reconstruction; number of snapshots; singular value truncation order

0 引言

管壳式换热器在船舶动力系统等领域中有着极为广泛的应用,其壳程内部的换热管按一定结构、尺寸和排列形式组成了不同类型的换热管束,壳程介质在流经错列管束时,会出现剪切层分离、失稳及转捩等现象,并在尾流中形成交替脱落的旋涡^[1]。管束在湍流涡结构影响下的噪声和振动问题长期存在,不仅会造成换热器结构破坏、性能降低,还将消耗大量维护费用。因此,研究换热器壳程错列管束绕流特性至关重要。

随着高精度计算流体力学的迅猛发展,已能够实现换热器壳程管束绕流的数值模拟研究。然而,面对低分辨率且高维度的庞大流场数据,如何从复杂的非线性管束绕流场数据中提取低维空间下的主要流动特征,仍是一个需要解决的问题^[2]。本征正交分解(Proper Orthogonal Decomposition, POD)和动力学模态分解(Dynamic Mode Decomposition, DMD)是复杂流动分析中建立降阶模型较为典型的两种方法^[3]。POD 将高阶流场矩阵投影到若干正交的低阶向量上,实现了空间层面上对流场信息的分析,但该方法无法在时间层面上对流场的信息进行分析,可能出现模态重叠的现象^[4]。DMD 方法对时空耦合结构数据建立降阶模型(Reduced Order Model, ROM),并结合主要模态和频率等信息对流场结构进行分析。Schmid^[5]首先提出了基于相似矩阵的 DMD,并将其作为系统线性稳定性的分析方法。Rowley^[6]又提出了基于伴随矩阵的 DMD,将其视为计算近似 Koopman 分解的特定数值算法。之后,学者们将 DMD 方法推广到了不同的流动分析中。例如, Sakai^[7]、叶坤^[8]、Bai^[9]、孙婉荣^[10]、袁猛^[11]将 DMD 分别应用于单圆柱与双圆柱绕流,分析其稳定性以及尾流流态的流动特性;韩忠华^[12]、Jonathan^[13]、Sampath^[14]、Seena^[15]、Rowley^[16]、丁杰^[17]将 DMD 分别应用于机翼等钝体绕流及其他流动,验证了 DMD 分析的有效性并获得了其流场结构特征,上述研究充分说明了 DMD 方法对流动问题分析的可靠性。学者们还针对 DMD 参数对流场重构误差的影响开展了研究,如快照数、时间步长和奇异值截断阶数等,得出了快照数和奇异值截断阶数对重构误差影响显著的结论。

相较于单圆柱和双圆柱绕流,错列管束绕流的流动机制更为复杂。然而,在现有的管束绕流研究中,动态模式分解方法的适用性研究仍存在不足。此外,现有研究通常采用枚举不同参数值的方式,通过对比不同参数设置下的重构效果来确定各参数的最优值。尽管这种方法能够通过多次试验实现较低的重构误差,但其对操作者经验的依赖性较高,缺乏统一的动态模式分解参数选取标准,且尚未针对错列管束扰流问题建立专门的 DMD 参数准则。基于此,本文开展错列管束绕流的动力学模态分解研究,在验证动力学模态分解错列管束绕流问题的适用性的同时,探究不同快照数对流场重构精度的影响,讨论不同奇异值截断阶数下的预测效果,提出满足错列管束绕流低误差的最小快照数准则与最优奇异值截断阶数准则。

1 计算方法

1.1 流场控制方程

本文采用 SST $k-\omega$ 湍流模型来求解流体控制方程,其中 k 和 ω 的输运方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = P_k - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \omega u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \frac{\gamma}{\nu_t} P - \beta \rho \omega^2 \quad (2)$$

在方程(1)、(2)中,湍动能生成项 P_k 、湍流粘度 μ_t 、混合函数 F_1 、 F_2 、以及应变率张量 S 的表达式如下

$$\begin{cases} P_k = \min(P, 10\beta^* \rho k \omega) \\ \mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1 \omega, S F_2)} \\ F_1 = \tanh(\arg_1^4), \arg_1 = \min \left\{ \max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega} \right), \frac{4\rho \sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right\}, CD_{k\omega} = \max \left(2\rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right) \\ F_2 = \tanh(\arg_2^2), \arg_2 = \max \left(\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega} \right) \\ S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}, S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \quad (3)$$

式中: y 为距最近壁面的法向近距离, β^* 、 β_1 、 β_2 、 a_1 、 $\sigma_{\omega 1}$ 、 $\sigma_{\omega 2}$ 、 σ_{k1} 、 σ_{k2} 均为模型系数。

需要说明的是, F_1 并非方程(1)、(2)的未知量, 而是 SST $k-\omega$ 模型的混合函数, 其一用于控制 ω 方程交叉扩散项中的系数 $2(1-F_1)$, 其二用于模型常数的加权混合。式(2)中的 P 为由平均速度梯度计算得到的原始湍动能生成项, 定义为 $P = 2\mu_t S^2$, 为避免在强剪切区域的数值不稳定性, 对湍动能方程中的生成项进行约束, 即 $P_k = \min(P, 10\beta^* \rho k \omega)$ 。式(2)中的 ν_t 为湍流运动粘度, 定义为 $\nu_t = \mu_t / \rho$ 。

1.2 动力学模态分解方法

DMD 方法将流动过程分解为若干流体模态及其特征参数, 通过选取合适的模态建立 ROM 来近似还原物理场特征。获取动力学 ROM 可以采取两种方法, 分别是伴随矩阵法和相似矩阵法, 而后者比前者具有更好的鲁棒性^[18]。因此, 本文采用相似矩阵法对错列管束绕流场进行 DMD 求解。

设在初始时刻流场中某物理量的数值为一个列向量 x_1 , 其为初始时刻的快照, 列向量的元素中包含了系统不同空间位置的该物理量的值, 之后每隔相等的时间步长 Δt 进行一次数据采样, 直到第 $k \times \Delta t$ 时刻停止, 得到共计 k 组快照构成的数据集 $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ 。

基于 Koopman 算子可将非线性的数据快照近似为线性动力学系统, 即快照 x_{i+1} 可通过快照 x_i 的线性映射表示为 $x_{i+1} = A x_i$, A 包含了系统的时间演化信息。对于 1 到 k 组流场快照, 有如下关系

$$X_2^{(k)} = A X_1^{(k-1)} \quad (4)$$

式中: $X_1^{(k-1)} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}]$, $X_2^{(k)} = [x_2, x_3, x_4, \dots, x_k]$ 。

由于矩阵 A 的维度很高且矩阵 $X_1^{(k-1)}$ 、 $X_2^{(k)}$ 并不是方阵, 因此无法直接求解, 需要寻找 A 的近似矩阵 A' 来获取系统的动力学特征。首先, 对矩阵 $X_1^{(k-1)}$ 进行奇异值分解

$$X_1^{(k-1)} = U S V^H \quad (5)$$

式中: U 为左奇异矩阵, S 为奇异值矩阵, V 为右奇异矩阵。用 C 表示矩阵, 在右上角加数字表示矩阵的维度, 则 $U \in C^{n \times r}$, $S \in C^{r \times r}$, $V \in C^{(k-1) \times r}$ 。 r 是指奇异值分解之后截断的阶数。

这样矩阵 A 便可用矩阵 $X_1^{(k-1)}$ 的左奇异矩阵 U 表示

$$A \approx U A' U^H \quad (6)$$

将式(5)和(6)代入式(4)中, 可得到近似矩阵 A' 的表达式为

$$A' = U^H X_2^{(k)} V S^{-1} \quad (7)$$

对近似矩阵 A' 进行特征分解, 得到其特征值和特征向量

$$A' W = W \Lambda \quad (8)$$

式中: W 为 A' 的特征向量构成的矩阵, Λ 为对角矩阵, 其对角线元素由 A' 的特征值构成。使用 A' 的特征值和特征向量可以得到 DMD 模态

$$\Phi = X_2^{(k)} V S^{-1} W \quad (9)$$

式中: Φ 的列向量 ϕ_i 即为 DMD 模态, 模态对应的特征值就是 Λ 对角线上的元素 λ_i , $\ln(\lambda_i) / \Delta t$ 的实部是模态的增长率, 虚部是模态的频率。根据上述结果, 便可重构 $t + \Delta t$ 时刻的数据快照

$$x(t + \Delta t) = \sum_{i=1}^n \phi_i \exp(\ln \lambda_i t / \Delta t) b_i = \Phi \Lambda^{t/\Delta t} b \quad (10)$$

式中: b_i 为第 i 阶模态的振幅, b 为由元素 b_i 构成的列向量, b 可以根据 $\Phi b = X_1$ 得到。

2 非定常流场数值计算

2.1 验证模型

在对错列管束绕流模型进行数值计算之前,有必要对数值计算方法及参数进行验证。本文选择了一个二维圆柱绕流模型进行验证^[19]。圆直径为 5.12 mm, $Re=200$, 流动介质为水。计算域网格划分为结构化网格,确保圆柱边界层网格 $y^+ < 1$ 。建立的二维圆柱流计算网格如图 1 所示。

对二维圆柱绕流非定常流动进行数值计算,并取圆柱斯特劳哈尔数 St 与文献结果进行对比,如表 1 所示。本文结果与文献结果的最大误差不足 3%,充分说明了数值方法和计算参数的有效性。

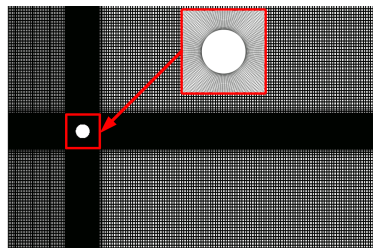


图 1 圆柱绕流计算网格及圆柱区域网格局部放大图

Fig.1 Computational grid for flow around a cylinder with a locally magnified view of the mesh in the cylinder region

表 1 二维圆柱绕流 St 结果

Tab.1 St results of two-dimensional flow around a cylinder

对比结果	本文结果	文献1 ^[19]	文献2 ^[20]
St	0.188	0.192	0.190

2.2 错列管束模型

工业领域中实际应用的管壳式换热器管束数量众多且内部结构复杂,为合理地分析管束绕流特性,忽略壳程支撑结构,将管束绕流场简化为由 7 根转置正三角形排列的换热管束组成的最小“单元”。计算模型取为二维矩形流域,最小管束“单元”位于流域内部,流体从左侧流入、右侧流出,二维错列管束绕流模型如图 2 所示,表 2 显示了模型详细的几何参数。

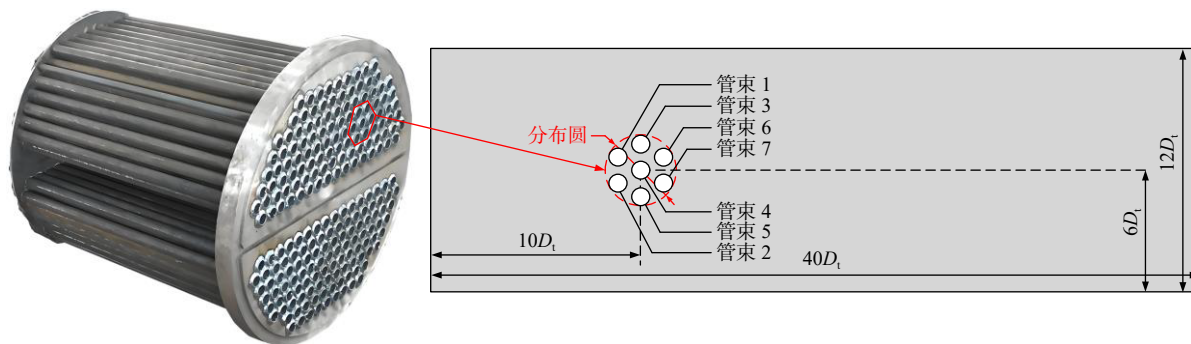


图 2 错列管束计算模型

Fig.2 Computational model of the staggered tube bundle

表 2 错列管束模型参数

Tab.2 Parameters of the staggered tube bundle model

参数类型	管束数	管束直径	管束分布圆直径	节距
符号/单位	N_t	D_t /m	D_d /m	P /m
参数值	7	0.032	0.128	0.048

对二维错列管束模型划分结构化网格。其中,管束壁面处第一层网格高度设置为 1.0×10^{-5} m,增长率为 1.1,确保 $y^+ < 1$ 。考虑网格密度对数值计算的影响,共讨论 4 组网格密度下计算结果的差异,相应网格参数列于表 3 中。网格密度的控制参数包括管束圆周向节点数 N_c 、无因次参数 Δ_c/N_c (Δ_c 为管束的周向长度)以及总单元数 $N^{[21]}$ 。以中心管束上的斯特劳哈尔数 St 作为评判网格无关性的标准参数,

不同网格密度算例的计算结果如表 3 所示。结果表明, Case 3、Case 4 的 St 基本一致, 相对误差在 1% 以内, 出于节约计算资源的目的, 本文选取 Case 3 ($N_c=200, \Delta_c/N_c=0.000\ 50, N=271\ 341$) 的网格参数用于该研究的数值模拟工作。

表 3 网格无关性验证结果
Tab.3 Results of mesh independence validation

工况	网格方案			评判标准参数
	N_c	Δ_c/N_c	N	St
Case 1	120	0.000 84	179 436	0.1971
Case 2	160	0.000 63	220 685	0.2383
Case 3	200	0.000 50	271 341	0.2532
Case 4	200	0.000 50	335 071	0.2536

模型入口定义为速度边界, 流速为 3 m/s; 出口设置为压力边界, 表压为 0 Pa; 流场介质为水, 对应的物性参数均按照 0 ℃、一个大气压力下选取。为加快流场计算进程, 先使用 Standard $k-\varepsilon$ 湍流模型对二维错列管束模型进行定常流动计算, 待参数波动稳定后, 以定常流场作为流场初始值进行非定常流动计算。压力速度耦合选用 SIMPLE 算法, 压力选用二阶离散格式, 动量、湍动能及湍流耗散率均采用二阶迎风离散格式。瞬态计算时间步长为 $\Delta t=0.01\text{ s}$, 总计算时长 $T=60\text{ s}$ 。

在计算的同时监测 7 根管束壁面上的升力和阻力系数, 为减少瞬态时间步长的影响, 横坐标取为无量纲时间步长 (V_0T/D_i), 如图 3 所示; 稳态、瞬态管束绕流场的涡量分布如图 4 所示。从图 3 可以看出, 经过定常流场计算后, 非定常流动很快便达到了稳定阶段, 此时各管束升力、阻力系数随无量纲时间步长增加, 在经历不稳定阶段后出现了周期性的变化特征 ($V_0T/D_i \geq 937.5$); 从图 4 可以看出, 在当前圆柱间距和参数设置下, 流场的两个阶段中管束下游产生的涡街方向均一致, 属于同步同相模式。其中, 在非定常流动中, 尾流中出现了交替产生的涡, 这一特征与各管束升力、阻力系数波动趋势一致。

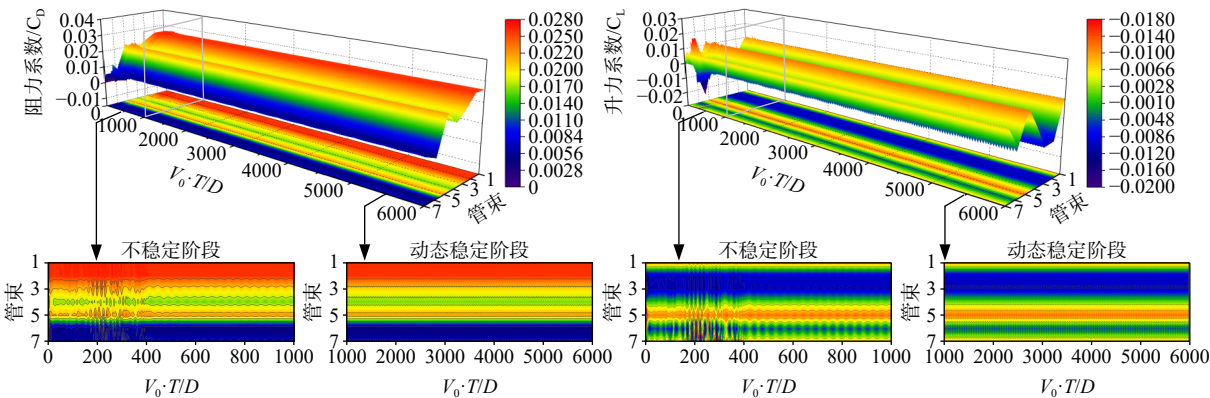
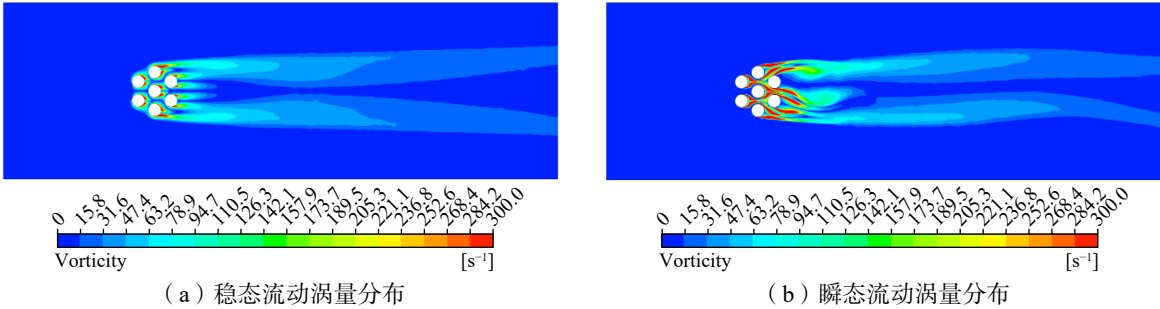


图 3 错列管束升力和阻力系数随无量纲时间步的分布

Fig.3 Distribution of lift and drag coefficients of the staggered tube bundle with dimensionless time step



(a) 稳态流动涡量分布 (b) 瞬态流动涡量分布

图 4 错列管束绕流场涡量分布

Fig.4 Vorticity distribution of the flow field around the staggered tube bundle

3 DMD 计算分析

3.1 动力学模态分析

在图3中的动态稳定阶段,取937.5~2237.5无量纲时间步跨度的流场涡量数据作为DMD分析的快照数据,共计1399个快照。图5为各模态特征值的实部和虚部在单位圆的分布,位于特征圆上的点共有27个(红色标识),分别对应13对共轭模态和一个主导模态,其均为周期性模态,位于特征圆外部的均为不稳定模态,其余特征值均位于单位圆内部,属于稳定模态。但是受计算机舍入误差的影响,到圆心距离严格为1的点并不存在,因此基于特征圆的分析方法仅能定性分析模态稳定性^[11]。

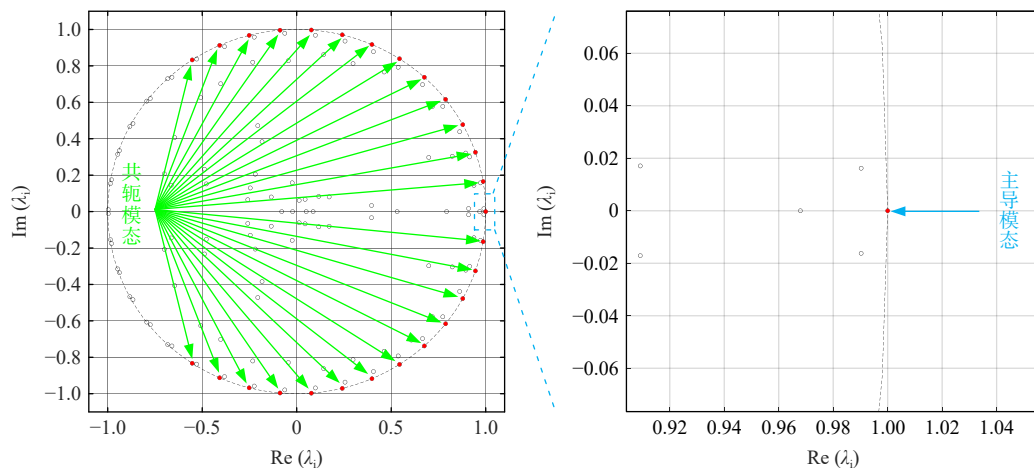


图5 DMD 特征值分布

Fig.5 Distribution of DMD eigenvalues

根据 $\mathbf{X}_1^{(k-1)}$ 奇异值的变化,使用硬阈值作为判据以截断奇异值^[22]。在保留前19阶奇异值后,按照振幅从大到小对前6阶模态排序,其模态参数如表4所示、振幅和增长率的关系如图6所示。

表4 按振幅排列的前6阶模态的模态参数

Tab.4 Modal parameters of the first 6 modes arranged by amplitude

模态参数	Mode 0	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
振幅	2 656 591	34 533	4552	1179	678	461
增长率/($\times 10^{-5}$)	0.00	-1.82	-8.98	-22.70	-22.17	-24.32
频率/Hz	0.00	16.59	33.19	49.78	66.37	82.97

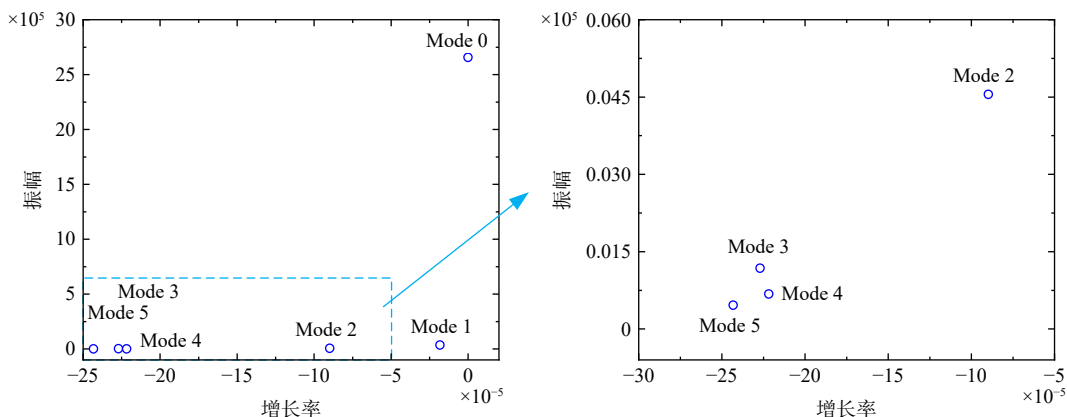


图6 模态增长率与振幅的关系

Fig.6 Relationship between modal growth rate and amplitude

从表4、图6中可以看出, Mode 0点对应的模态系数幅值最大, 模态增长率为0, 因此该模态的幅值基本不变且对各时刻流场的作用基本相同, 因此对应的是流场的平均状态。Mode 1点和Mode 2点对应的模态增长率较小且为负, 幅值没有继续增大的趋势, 反应了流场随时间的变化特征。Mode 3点、Mode 4点和Mode 5点对应的模态增长率较大且为负, 是稳定模态。以上计算完成了对二维错列管束绕流的动力学模态分解, 建立了错列管束绕流场的涡量降阶模型, 在此基础上, 研究建立的降阶模型在涡量场重构中的效果, 重构过程如图7所示, 重构错列管束涡量场与真实错列管束涡量场对比如图8所示。

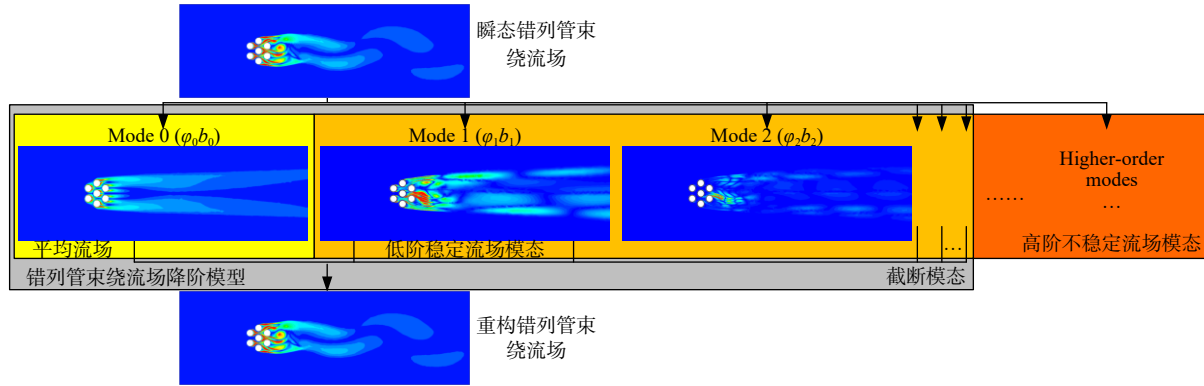


图7 错列管束瞬态绕流场模态分解

Fig.7 Mode decomposition of the transient flow field around the staggered tube bundle

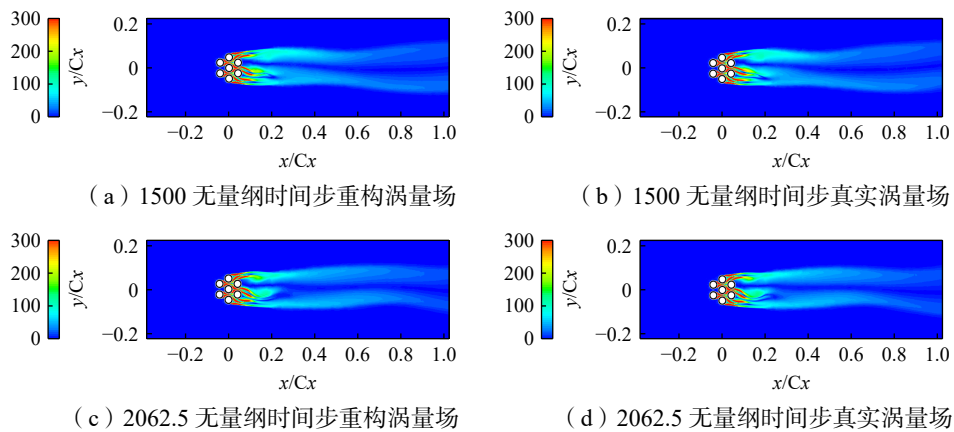


图8 重构涡量场与真实涡量场对比

Fig.8 Comparison between reconstructed and real vorticity field

从图8中可以看出, 对于所取的快照空间时刻内的涡量场, 使用DMD方法已经能够捕捉错列管束绕流中关键的流场特征并进行流场重构, 重构流场与原始流场高度吻合, 表明重构效果良好, 丢失的流场特征较少。但由于实际的流场涡量特征更为复杂, 所用1399个快照和截断前19阶模态得到的近似涡量场仍与真实涡量场间存在5%的偏差。

3.2 输入快照数对流场重构效果的影响

本文提出采用无量纲周期数 N_T 对快照数的影响进行衡量。对于类圆柱绕流, 其流动具有特征频率, 因此使用斯特劳哈尔数 St 对其流动进行描述

$$St = fL/V \quad (11)$$

式中: f 为涡脱落频率, L 为特征长度, V 为流体速度。其中, f 又可以写成

$$f = 1/T \quad (12)$$

式中: T 为涡脱落周期。在DMD快照取样时, 应当至少包含一个完整周期性的数据特征, 即快照数量需要满足

$$N \geq T/\Delta t \quad (13)$$

式中: N 为快照数, Δt 为流场瞬态时间步长。考虑到类圆柱绕流结构的相似性, 以 St 作为相似性准则, 把错列管束绕流等效为圆柱绕流, 由式(11)、(12)、(13)便可以得到关于错列管束绕流的最小快照数

$$N_T = C_1 D_d / (C_2 S t V \Delta t) \quad (14)$$

式中: N_T 是无量纲周期快照数, C_1 是管束分布系数, $C_1 = A_t / A_d$, A_t 、 A_d 是管束和分布圆面积, C_2 是频率系数, $C_2 = f_{\text{feature}} / (n f_{\text{max}})$, f_{feature} 是特征频率, f_{max} 是最大分析频率, n 是频率放大系数 ($n=1,2,3,4,5,6$), V 是入口流速。本文 $C_1 = 0.4375$, C_2 考虑了不同频率放大系数, 依次取为: 0.110、0.055、0.036、0.027、0.022 和 0.018, 对应快照数 N_T 分别为 533、1066、1599、2132、2665 和 3198。

同时, 为了更全面地考虑所有时刻下全局尺度上的重构误差, 采用均方根误差 x_{RMS} 对 DMD 模态重构的涡量场误差进行全面评估, x_{RMS} 定义为

$$x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_{\text{real}}(i) - x_{\text{DMD}}(i)|^2} \quad (15)$$

式中: N 是快照数, $x_{\text{real}}(i)$ 与 $x_{\text{DMD}}(i)$ 分别是真实流场与 DMD 模态重构的第 i 个涡量场快照。

从图 3 中动态稳定阶段第 937.5 个无量纲时间步开始, 取不同 N_T 下管束绕流场涡量数据作为输入快照, 图 9 为不同快照数下重构涡量场与真实涡量场的误差对比。

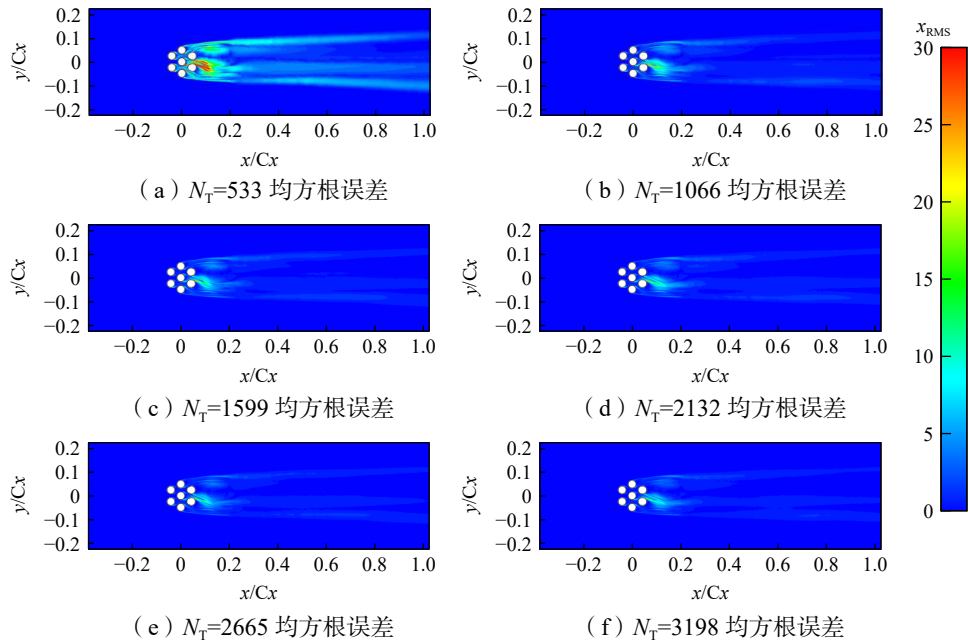


图 9 不同快照数下重构涡量场与真实涡量场均方根误差对比

Fig.9 Comparison of the root mean square error between reconstructed and the real vorticity field under different numbers of snapshots

从图中可以看出, 重构涡量场与真实涡量场的误差整体较小, 主要分布在管束 7 的正下游及流域的尾流位置, 其中管束 7 的正下游处是最大误差位置, DMD 可以较精确地捕捉低频大尺度的旋涡, 但在捕捉高频小尺度涡上存在一定误差。随快照数的增加, 重构涡量场与真实涡量场的差异逐渐减小, 当快照数不少于 $N_T = 1599$ ($n=3$) 时, 整个流场内的均方根误差均小于 10 s^{-1} , 与真实涡量场之间的误差比不足 3.3%, 说明此时快照数对于 DMD 重构结果的影响可以忽略不计。

综合以上结果, 将 $n=3$ 代入式(14), 得到了适用于错列管束绕流问题最小快照数 N_{min} 的表达式为

$$N_{\text{min}} = \frac{3A_t f_{\text{max}} D_d}{A_d f_{\text{feature}} S t V \Delta t} \quad (16)$$

以快照数作为横坐标,以重构涡量场的最大均方根误差作为纵坐标进行作图,结果如图10所示。从图中可以直观地看出,涡量最大均方根误差随快照数增加逐渐减小,减小速率随快照数增加而变小,在最小快照数 $N_{\min}$ 位置涡量最大均方根误差不足 10 s^{-1} ,之后随快照数增加,最大均方根误差基本保持不变。说明当满足最小快照数 $N_{\min}$ 时,快照数对建立的降阶模型重构误差的影响可以忽略不计。

根据不同快照数下涡量场重构均方根误差的计算与分析,本文提出了最小快照数准则的表达式。

3.3 奇异值截断阶数对流场重构效果的影响

从能量的角度来看,奇异值截断的阶数决定了重构流场的能量保留程度。通过保留能量占比大的奇异值,可以保留流场的大部分能量,减少计算量和存储需求,同时控制重构误差。因此,在最小快照数 $N_{\min}$ ($N_T = 1599$)下,本文从建立的ROM模型与原始流场总能量占比的角度出发,讨论奇异值的截断阶数对错列管束绕流场重构精度的影响。

在降阶模型与原始模型的一致性研究方面,常以95%能量保留和99%能量保留作为能量占比规则,95%的能量保留已被证明能够在保证精度的同时,显著降低模型的复杂性,而99%的能量保留可以更好地保证降阶后的模型与原始模型的相似度。因此为保证重构流场精度,本文分别取截断模态总能量在原始流场总能量的占比为95%、99%、99.50%和99.99%时的奇异值的截断阶数进行讨论。截断模态总能量在原始流场总能量的表达式如式(17)所示。

$$E_{\text{DMD}} = \sum_{i=1}^r \phi_i b_i Q_i, E_{\text{real}} = \sum_{i=1}^N \phi_i b_i Q_i, r = \operatorname{argmin} \{ (E_{\text{DMD}}) / (E_{\text{real}}) \geq C \} \quad (17)$$

式中: E_{DMD} 是降阶模型总能量, E_{real} 是原始流场总能量,以DMD分解得到的全部模态能量总和表示, Q 是由特征值组成的范德蒙矩阵, $Q = [\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{N-2}]$, λ 是由特征值组成的列向量, $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_r]^T$ 。

将 $E_{\text{DMD}}/E_{\text{real}}$ 定义为能量占比。通过式(17)可求得,当能量占比为95%、99%、99.50%和99.99%时,相应奇异值的截断阶数分别为11、21、85、217。下面对不同截断阶数下流场涡量值差异进行分析。图11为位于管束4正下游方向,距离管束4圆心0.25 m处的中心采样点的涡量值变化的重构值与真实值对比。结合最大误差分布位置,图12为位于管束7正下游方向,距离管束7圆心0.05 m处的最大误差采样点的涡量值变化的重构值与真实值的对比。

从图11、图12可以看出,当能量占比为95% ($r=11$)时,两采样点处涡量重构值与真实值差距较大,基于DMD方法的重构结果与真实值的变化周期基本一致,但是同步性较差且幅值存在偏差,尤其在最大误差采样点处的重构值幅值差异极大。当能量占比为99% ($r=21$)时,虽然两采样点处涡量重构结果在幅值的准确性上差异较小,且两曲线的变化规律完全同步,此时通过DMD方法可以用最少计算资源实现较好的流场重构效果。当能量占比为99.5% ($r=85$)时,虽然用于重构流场的模态个数增加,但增加的模态中同时包含了一部分不稳定模态,对重构结果引入了不必要的干扰,导致重构涡量曲线和真实结果的幅值与同步性偏差较大。当能量占比为99.99% ($r=217$)时,此时所建立的错列管束ROM模型与真实流场基本无异,两采样点处的重构值与原始值在1500个快照时刻以内都高度吻合,相比于能量占比为99% ($r=21$)时流场重构精度更高,但是将消耗更大的计算资源。

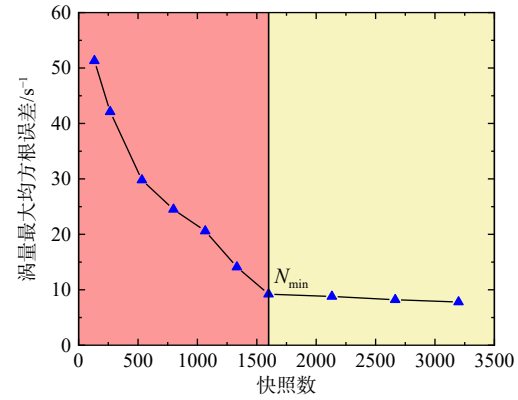


图10 不同快照数下涡量场的最大均方根误差分布

Fig.10 Distribution of the maximum root mean square error of the vorticity field under different numbers of snapshots

根据不同奇异值截断阶数下涡量重构值的计算与分析,本文提出,最优奇异值截断阶数应满足能量占比为 99% 的条件。

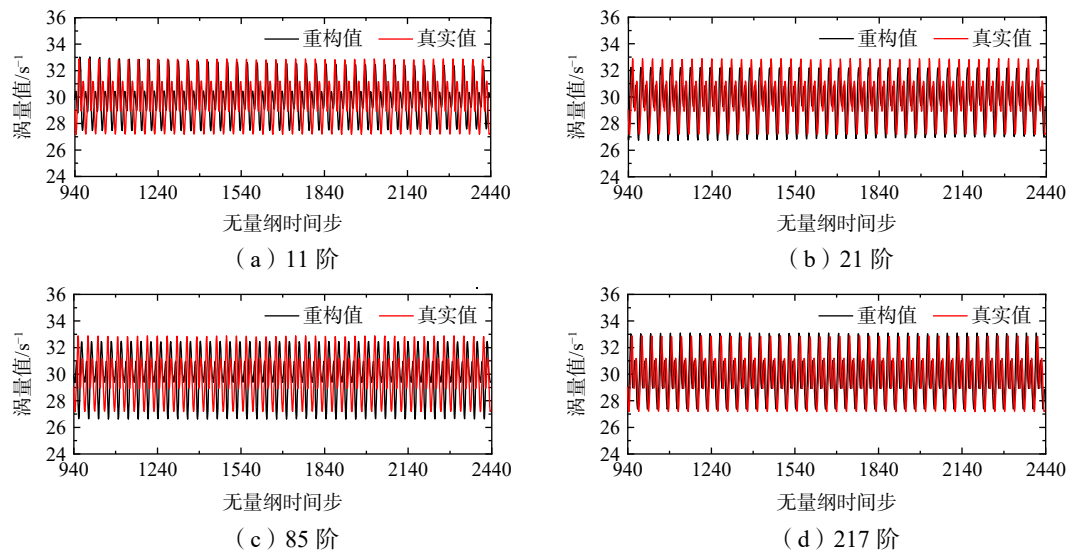


图 11 不同奇异值截断阶数下中心采样点处的涡量重构值与真实值对比

Fig.11 Comparison between reconstructed and real vorticity values at the central sampling point under different singular value truncation orders

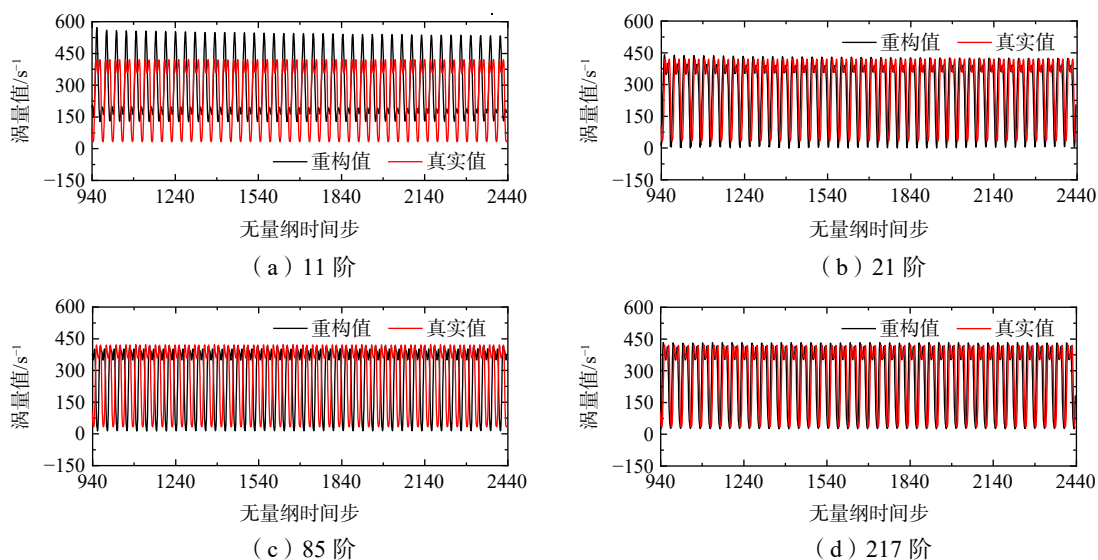


图 12 不同奇异值截断阶数下最大误差采样点处的涡量重构值与真实值对比

Fig.12 Comparison between reconstructed and real vorticity values at the maximum error sampling point under different singular value truncation orders

4 结 论

本文利用 DMD 方法对数值计算得到的错列管束绕流场的涡量数据进行了分析,建立了降阶模型并对流场进行了重构,验证了 DMD 方法对错列管束绕流问题的适用性,在此基础上研究了不同快照数、不同奇异值截断阶数对 DMD 重构误差的影响,进而得出以下主要结论:

(1) 基于 DMD 方法,针对错列管束绕流场,通过提取流场主要特征和各主导模态,进而重构流场。

得到的结果与数值结果吻合较好,验证了本文工作的有效性。

(2)本文使用无量纲周期数来判别快照数量,进而提出了最小快照数准则。通过该准则,能够直接得到有效的低误差快照数,这避免在计算中可能设置的冗余快照数,以及为寻找合适的低误差快照数而开展的枚举试算工作,进而极大地减少了计算成本。

(3)本文从能量占比角度出发,根据降阶模型能量占流场总能量的比值来得到最优奇异值截断阶数。进而通过核对涡量重构值的准确性得到了最优奇异值截断阶数准则。这能够有效避免过大的奇异值截断阶数带来的误差。

参 考 文 献:

- [1] 杜晓庆,林芝强,吴葛菲. 串列双圆柱绕流的模态特征及流场重构[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2022, 54(10): 49–57.
Du X Q, Du Z Q, Wu G F. Mode characteristics and reconstruction of flow field around two tandem circular cylinders[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2022, 54(10): 49–57. (in Chinese)
- [2] 黄 瑾,明平剑,孙婉荣. 流体横掠管束的动模态分析研究[J]. 工程热物理学报, 2023, 44(8): 2279–2284.
Huang J, Ming P J, Sun W R. Dynamic modal analysis of fluid sweeping rods bundle[J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2023, 44(8): 2279–2284. (in Chinese)
- [3] Taira K, Hemati M S, Brunton S L, et al. Modal analysis of fluid flows: Applications and outlook[J]. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 2020, 58(3): 998.
- [4] Berkooz G, Holmes P, Lumley J L. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 1993, 25: 539–575.
- [5] Schmid P J. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2010, 656: 5–28.
- [6] Nathan J K, Rowley C W, Steven L B, et al. On dynamic mode decomposition: theory and applications[J]. Journal of Computational Dynamics, 2015, 1(2): 391–421.
- [7] Sakai M, Sunada Y, Imamura T, et al. Experimental and numerical studies on flow behind a circular cylinder based on POD and DMD[J]. Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, 2015, 58(2): 100.
- [8] 叶 坤,武 洁,叶正寅,等. 动力学模态分解和本征正交分解对圆柱绕流稳定性的分析[J]. 西北工业大学学报, 2017, 35(4): 599.
Ye K, Wu J, Ye Z Y, et al. Analysis circular cylinder flow using dynamic mode and proper orthogonal decomposition[J]. Chinese Journal of Northwestern Polytechnical University, 2017, 35(4): 599. (in Chinese)
- [9] Bai X D, Zhang W, Wang Y. Deflected oscillatory wake pattern behind two side-by-side circular cylinders[J]. Ocean Engineering, 2020, 197: 106847.
- [10] 孙婉荣,明平剑,刘 勇. 二维圆柱绕流的动模态分析研究[J]. 工程热物理学报, 2021, 42(5): 1275–1281.
Sun W R, Ming P J, Liu Y. Study on dynamic mode analysis of two-dimensional cylinder flow[J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2021, 42(5): 1275–1281. (in Chinese)
- [11] 袁 猛,张新玉,柳贡民,等. 并列双圆柱绕流的动力学模态分解[J]. 船舶力学, 2021, 25(5): 527–534.
Yuan M, Zhang X Y, Liu G M, et al. Dynamic mode decomposition of flow past parallel twin cylinders[J]. Journal of Ship Mechanics, 2021, 25(5): 527–534. (in Chinese)
- [12] 韩忠华,王绍楠,韩 莉,等. 一种基于动模态分解的翼型流动转捩预测新方法[J]. 航空学报, 2017, 31(8): 120034.
Han Z H, Wang S N, Han L, et al. A novel method for automatic transition prediction of flows over airfoils based on dynamic mode decomposition[J]. Journal of Aeronautics Northwestern Polytechnical University, 2017, 31(8): 120034. (in Chinese)
- [13] Jonathan H T, Rowley C W, Dirk M L, et al. On dynamic mode decomposition: Theory and applications[J]. Journal of Computational Dynamics, 2014, 1(2): 391–421.
- [14] Sampath R, Chakravarthy S R. Proper orthogonal and dynamic mode decompositions of time-resolved PIV of confined backward-facing step flow[J]. Experiments in Fluids, 2014, 55(9): 1792.

- [15] Seena A, Sung H J. Dynamic mode decomposition of turbulent cavity flows for self-sustained oscillations[J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2011, 32(6): 1098–1110.
- [16] Rowley C W, Mezic I, Bagheri S, et al. Spectral analysis of nonlinear flows[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2009, 641: 115–127.
- [17] 丁 杰, 胡晨星, 刘鹏寅, 等. 无叶扩压器中非定常流动的 DMD 模态分析[J]. *动力工程学报*, 2017, 37(6): 447–453.
Ding J, Hu C X, Liu P Y, et al. Dynamic mode decomposition of the unsteady flow in a vaneless diffuser[J]. *Journal of Chinese Society of Power Engineering*, 2017, 37(6): 447–453. (in Chinese)
- [18] 张 琦. 湍流载荷激励下换热器直管束随机振动特性研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2022.
Zhang Q. Study on random vibration characteristics of straight tube bundle in shell-and-tube heat exchangers[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2022. (in Chinese)
- [19] 顾 罡. 二维单圆柱、双圆柱绕流问题和三维垂荡板运动的数值模拟[D]. 上海: 上海交通大学, 2007.
Gu G. Numerical simulation of two-dimensional flow around single & double cylinders and three-dimensional oscillation of heave plates[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2007. (in Chinese)
- [20] 叶春明, 吴文权. 数值模拟圆柱绕流旋涡运动及尾流不稳定性分析[J]. *工程热物理学报*, 1997, 18(2): 169–172.
Ye C M, Wu W Q. Numerical simulation of vortex motion and wake instability analysis around a cylinder without restraint[J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 1997, 18(2): 169–172. (in Chinese)
- [21] 王 帅, 陈正寿, 杜炳鑫, 等. 柔性管异形表面结构对其涡激振动影响的数值研究[J]. *船舶力学*, 2024, 28(3): 450–464.
Wang S, Chen Z S, Du B X, et al. Numerical study on the effect of flexible pipe special surface structures on vortex-induced vibration[J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2024, 28(3): 450–464. (in Chinese)
- [22] Kutz J N, Brunton S L, Brunton B W, et al. Dynamic mode decomposition: Data-driven modeling of complex systems[M]. Society for Industrial and Applied Mathematics, Washington State University, 2016.