

文章编号: 1007-7294(2025)12-1874-11

双层 Boussinesq 型水波方程的流函数解

梁 锐¹, 刘忠波¹, 房克照², 孙家文^{2,3}, 王 平^{2,3}

(1. 大连海事大学 交通运输工程学院, 辽宁 大连 116026; 2. 大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024; 3. 国家海洋环境监测中心 国家环境保护海洋生态环境整治修复重点实验室, 辽宁 大连 116023)

摘要: Boussinesq 型水波方程是近岸工程中广泛应用的一种波浪模型, 其计算精度取决于方程基本性能, 而方程的非线性应用上界一直是关注的重点内容。近年来, 双层 Boussinesq 方程的理论性能、数值建模及应用均取得了较大的进展, 然而其非线性上界是多少, 尚未有文献给出答案。为此, 本文通过遗传算法和牛顿法求解最高空间导数为 3 阶和 5 阶的双层 Boussinesq 方程的流函数, 以确定其上界。并以同样的方法, 求出了相应单层 Boussinesq 方程的流函数解。数值结果表明: 最高导数为 3 阶和 5 阶的双层 Boussinesq 方程的非线性上界为 $H/L=0.137$ 、 0.138 ; 与单层 Boussinesq 方程相比, 双层方程在强非线性特征上具有更大的适用水深。本文提出的遗传算法和牛顿法相结合的方法, 可为求解相关 Boussinesq 型水波方程的流函数波浪提供一定的参考。

关键词: Boussinesq 方程; 流函数; 非线性上界; 遗传算法; 牛顿法

中图分类号: O353.2 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.1007-7294.2025.12.005

Stream-function solution of a two-layer Boussinesq model

LIANG Rui¹, LIU Zhong-bo¹, FANG Ke-zhao², SUN Jia-wen^{2,3}, WANG Ping^{2,3}

(1. College of Transportation Engineering, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China; 2. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 3. State Environmental Protection Key Laboratory of Marine Ecological Environment Restoration, National Marine Environmental Monitoring Center, Dalian 116023, China)

Abstract: The Boussinesq model is a kind of wave model widely used in near-shore engineering, and its computational accuracy mainly depends on the basic performance of the model, while the upper bound of nonlinear application of the model has always been the focus of attention. In recent years, the two-layer Boussinesq model has gained great progress regarding theoretical properties, numerical modeling and applications. However, the value of its nonlinear upper bound has not been given in any literature. So in this study, the stream-function of the two-layer Boussinesq model was solved using a combination of genetic algorithm and Newton's method to determine the upper bound value of the model, considering the highest spatial derivatives of order 3 and 5. In the same way, the stream-function solutions of the corresponding one-layer Boussinesq model were derived. The numerical results show that the nonlinear upper bounds of the two-layer Boussinesq model with the highest derivatives of order 3 and 5 are $H/L = 0.137$ and 0.138 . Compared with the one-layer Boussinesq model, the two-layer model has a greater water depth of applicability regarding

收稿日期: 2025-06-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52171247; 52071057; 51779022)

作者简介: 梁 锐(2002-), 男, 博士研究生;

刘忠波(1976-), 男, 教授, 博士生导师, 通讯作者, E-mail: liuzhongbo@dlmu.edu.cn。

strong nonlinear characteristics. The combination of genetic algorithm and Newton's method proposed in this study can provide some references for solving the stream-function waves of the related Boussinesq models.

Key words: Boussinesq model; stream-function; nonlinear upper bound; genetic algorithm; Newton's method

0 引 言

Boussinesq 型水波方程是描述波浪传播的重要数学模型,在近岸和海洋工程水动力模拟中具有重要应用。自 1967 年 Peregrine^[1] 首次提出变水深的水平二维 Boussinesq 型水波方程以来,近岸波浪的时域模拟得到了广泛的关注。为克服经典 Boussinesq 型水波方程弱非线性和弱色散性的缺陷,相应的研究工作也随之展开。Witting^[2] 引入了 Padé逼近的方法以确定方程中的色散系数。Madsen 等^[3]、Nwogu^[4] 提出了改进型方程,但适用水深不超过 $kh = 6$ (k 为波数, h 为水深)。近年来, Liu 等^[5-6] 的研究取得了较大的进展,他们推导了多层 Boussinesq 方程,大大扩展了 Boussinesq 型水波方程的适用水深范围。最新的有关 Boussinesq 型水波方程的优秀综述,可参见 Kirby^[7] 和孙家文等^[8] 的工作。

Boussinesq 型水波方程的核心思想是将复杂的三维水波问题简化为水平二维问题,通过将速度对坐标 z 的导数转化为水平导数,显著提高了求解效率。从理论层面, Liu 等^[6] 论述了 Boussinesq 型水波方程的发展阶段,包括弱色散、弱非线性、二阶非线性、近似的二阶完全非线性以及极端水深的完全非线性方程。Liu 等^[5] 推导的双层 Boussinesq 方程,通过傅里叶展开方法,给出了 Stokes 线性波解、二阶 Stokes 波解和三阶 Stokes 波解,充分展示了该方程在非线性波理论模拟中的精确性。该 Boussinesq 数值模型在孤立波^[9]、聚焦波^[10] 和双色波群演化^[11] 等的强非线性模拟中均展现了较好的性能。特别地, Liu 等^[11] 开发了双层 Boussinesq 方程数值模型,通过与流函数波浪解析对比,验证了模型的强非线性特性,他们给出了数值模型的最大适用波陡 $H/L = 0.123$ (H 为波高, L 为波长)。尽管如此,关于该方程在强非线性特征方面如流函数波浪的适用上界,目前尚无文献报道。

众所周知, Stokes 破碎波的理论上限为 $H/L \approx 0.142$, 而流函数波浪(通过数值逼近求得)与基于摄动展开方法的 Stokes 三阶波存在本质差异,前者能考虑高阶对低阶的非线性作用,而后的解析不能考虑高阶对低阶的非线性作用。当前,关于 Boussinesq 型水波方程流函数的求解仅有 Otta 等^[12] 和 Madsen 等^[13] 开展过相关研究。因此,本文旨在探讨以下几个问题: (1) Liu 等^[5]、刘忠波等^[14] 提出的双层 Boussinesq 方程的流函数解是怎样的? 其波陡上界是多少? (2) 双层 Boussinesq 方程与单层 Boussinesq 方程流函数解的差异如何? (3) 波面速度公式中的高阶项对双层 Boussinesq 方程的非线性有什么影响? 是否有必要提高其最高阶导数的阶数?

为了求解以上问题,本文采用类似 Madsen 等^[13] 的方法,构造了最高阶导数为 3 阶和 5 阶的双层 Boussinesq 型水波方程的流函数;进一步,通过遗传算法和牛顿法进行求解,以确定双层 Boussinesq 型水波方程的非线性上界。

1 相关理论

1.1 双层 Boussinesq 方程

在水体无旋、无粘的假设下, Liu 等^[5] 将深度为 h 的水体分为两层(如图 1 所示),在 $z = -h_1$ ($h_1 = 2ah$) 处连接上下层水体的水平速度和垂向速度,并结合水底($z = -h$)的运动学条件、波面($z = \eta$)的运动学和动力学边界条件构成了双层 Boussinesq 方程。

具体公式如下,其中, u_η 和 w_η 分别表示波面的水平速度和垂向速度分量; u_{10} 和 w_{10} 分别表示静止水

位的水平速度和垂向速度分量, 静止水位即图 1 中 $z=0$ 处; u_1^* 、 w_1^* 和 u_2^* 、 w_2^* 分别表示上层水体和下层水体的水平伪速度、垂向伪速度; u_1 、 w_1 和 u_2 、 w_2 分别表示上层水体和下层水体的水平速度、垂向速度; g 为重力加速度; 下标 x 、 xx 和 xxx 分别表示对 x 求一阶导数、二阶导数和三阶导数。

波面的运动学和动力学边界条件为

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w_\eta - u_\eta \eta_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_\eta}{\partial t} = -g\eta_x - \frac{1}{2}((u_\eta)^2 + 2u_\eta w_\eta \eta_x)_x - \eta_x \frac{\partial w_\eta}{\partial t} + w_\eta (u_\eta \eta_x)_x \quad (2)$$

静止水位到波面的速度连接公式为

$$u_\eta = u_{10} + \eta w_{10x} - \frac{1}{2}\eta^2 u_{10xx} - \frac{1}{6}\eta^3 w_{10xxx} \quad (3)$$

$$w_\eta = w_{10} - \eta u_{10x} - \frac{1}{2}\eta^2 w_{10xx} + \frac{1}{6}\eta^3 u_{10xxx} \quad (4)$$

为简化下面的表达式, 本文引入 a 和 b 两个变量, 具体表达为

$$a = -\alpha h \quad (5)$$

$$b = \beta h \quad (6)$$

在静止水位的速度表达式为

$$u_{10} = u_1^* - \frac{2}{5}a^2 u_{1xx}^* - a w_{1x}^* + \frac{1}{15}a^3 w_{1xxx}^* \quad (7)$$

$$w_{10} = w_1^* - \frac{2}{5}a^2 w_{1xx}^* + a u_{1x}^* - \frac{1}{15}a^3 u_{1xxx}^* \quad (8)$$

在上下层水体的连接处, 速度应保持连续, 其表达式为

$$u_1^* - \frac{2}{5}a^2 u_{1xx}^* + a w_{1x}^* - \frac{1}{15}a^3 w_{1xxx}^* = u_2^* - \frac{2}{5}b^2 u_{2xx}^* + b w_{2x}^* - \frac{1}{15}b^3 w_{2xxx}^* \quad (9)$$

$$w_1^* - \frac{2}{5}a^2 w_{1xx}^* - a u_{1x}^* + \frac{1}{15}a^3 u_{1xxx}^* = w_2^* - \frac{2}{5}b^2 w_{2xx}^* - b u_{2x}^* + \frac{1}{15}b^3 u_{2xxx}^* \quad (10)$$

在水底的运动学条件表达式为

$$w_2^* - \frac{2}{5}b^2 w_{2xx}^* + b u_{2x}^* - \frac{1}{15}b^3 u_{2xxx}^* = 0 \quad (11)$$

式(1)~(11)即为双层 Boussinesq 方程。而下文中有关剖面速度的计算, 可采用式(12)和式(13)计算上层水体任意点水平速度和垂向速度, 采用式(14)和式(15)计算下层水体任意点水平速度和垂向速度。

$$u_1(x, z) = u_1^* - \left(\frac{1}{2}(z-a)^2 - \frac{1}{10}a^2 \right) u_{1xx}^* + (z-a) w_{1x}^* - \left(\frac{1}{6}(z-a)^3 - \frac{1}{10}a^2(z-a) \right) w_{1xxx}^* \quad (12)$$

$$w_1(x, z) = w_1^* - \left(\frac{1}{2}(z-a)^2 - \frac{1}{10}a^2 \right) w_{1xx}^* - (z-a) u_{1x}^* + \left(\frac{1}{6}(z-a)^3 - \frac{1}{10}a^2(z-a) \right) u_{1xxx}^* \quad (13)$$

$$u_2(x, z) = u_2^* - \left(\frac{1}{2}(z-b+h)^2 - \frac{1}{10}b^2 \right) u_{2xx}^* + (z-b+h) w_{2x}^* - \left(\frac{1}{6}(z-b+h)^3 - \frac{1}{10}b^2(z-b+h) \right) w_{2xxx}^* \quad (14)$$

$$w_2(x, z) = w_2^* - \left(\frac{1}{2}(z-b+h)^2 - \frac{1}{10}b^2 \right) w_{2xx}^* - (z-b+h) u_{2x}^* + \left(\frac{1}{6}(z-b+h)^3 - \frac{1}{10}b^2(z-b+h) \right) u_{2xxx}^* \quad (15)$$

1.2 双层 Boussinesq 方程的流函数

为了得到双层 Boussinesq 方程的流函数, 本文采用了类似 Madsen(2002)^[13] 的方法, 将式(1)和(2)写为

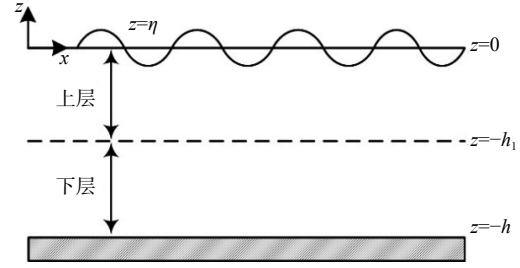


图 1 水体分层示意图

Fig.1 Diagram of water stratification

$$-w_\eta + u_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

$$g\eta + \frac{w_\eta^2}{2} + \frac{u_\eta^2}{2} = R \quad (17)$$

式中: R 是伯努利常数。

对应的 η 、 w_2^* 和 u_2^* 的傅里叶级数解可表达为

$$\eta(x) = \sum_{j=1}^M A_j \cos(jkx) \quad (18)$$

$$u_2^*(x) = \bar{u} + \sum_{j=1}^M B_j \cos(jkx) \quad (19)$$

$$w_2^*(x) = \sum_{j=1}^M C_j \sin(jkx) \quad (20)$$

式中: k 是波数, A_j 、 B_j 和 C_j 是幅值。

将式(19)~(20)代入式(11)可得

$$C_j = r_j B_j \quad (21)$$

$$r_j = \lambda_j \left(\frac{1 + \frac{1}{15} \lambda_j^2}{1 + \frac{2}{5} \lambda_j^2} \right) \quad (22)$$

$$\lambda_j = bjk \quad (23)$$

相应地, w_1^* 和 u_1^* 的表达式可写为

$$u_1^* = \bar{u} + \sum_{j=1}^M P_j B_j \cos(jkx) \quad (24)$$

$$w_1^* = \sum_{j=1}^M Q_j B_j \sin(jkx) \quad (25)$$

P_j 和 Q_j 可通过将式(24)~(25)代入式(9)~(10)得到, 具体表达式如下

$$P_j = \frac{B_{1j} E_j - B_{2j} F_j}{E_j^2 - F_j^2} \quad (26)$$

$$Q_j = \frac{B_{1j} F_j - B_{2j} E_j}{F_j^2 - E_j^2} \quad (27)$$

式中的 B_{1j} 、 B_{2j} 、 E_j 和 F_j 的计算公式如下

$$B_{1j} = 1 + \frac{2}{5} (bjk)^2 + bjk r_j + \frac{1}{15} (bjk)^3 r_j \quad (28)$$

$$B_{2j} = r_j + \frac{2}{5} (bjk)^2 r_j + bjk + \frac{1}{15} (bjk)^3 \quad (29)$$

$$E_j = 1 + \frac{2}{5} (ajk)^2 \quad (30)$$

$$F_j = ajk + \frac{1}{15} (ajk)^3 \quad (31)$$

与上类似, w_{10} 和 u_{10} 的表达式可写为

$$u_{10} = \bar{u} + \sum_{j=1}^M p_j B_j \cos(jkx) \quad (32)$$

$$w_{10} = \sum_{j=1}^M q_j B_j \sin(jkx) \quad (33)$$

其中, p_j 和 q_j 可通过将式(32)~(33)代入式(7)~(8)得到, 具体表达式如下

$$p_j = P_j + \frac{2}{5}(ajk)^2 P_j - ajkQ_j - \frac{(ajk)^3}{15} Q_j \quad (34)$$

$$q_j = Q_j + \frac{2}{5}(ajk)^2 Q_j - ajkP_j - \frac{(ajk)^3}{15} P_j \quad (35)$$

将式(32)~(33)代入式(3)~(4)可得 u_η 和 w_η 的表达式如下

$$u_\eta = \bar{u} + \sum_{j=1}^M \left(p_j + jk\eta q_j + \frac{1}{2}(jk\eta)^2 p_j + \frac{1}{6}(jk\eta)^3 q_j \right) \cos(jkx) B_j \quad (36)$$

$$w_\eta = \sum_{j=1}^M \left(q_j + jk\eta p_j + \frac{1}{2}(jk\eta)^2 q_j + \frac{1}{6}(jk\eta)^3 p_j \right) \sin(jkx) B_j \quad (37)$$

$$H - \eta(0) + \eta\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \quad (38)$$

上式中, H 为波高, L 为波长。参考 Madsen 等(2002)^[13] 的方法, 将式(17)应用于从波谷到波峰的 $M+1$ 个等距点, 将式(16)应用于 M 个交错点(其他点之间的中间)。再加上式(38)构造了 $2M+2$ 个非线性方程。而方程组中存在 A_j 、 B_j 、 $\bar{u}$ 、 R 共 $2M+2$ 个变量, 可通过牛顿法求解。

波面水平速度和垂向速度的精确表达式为

$$u_\eta = \bar{u} + \sum_{j=1}^M B_j \frac{\cosh(jk(\eta+h))}{\cosh(jkh)} \cos(jkx) \quad (39)$$

$$w_\eta = \sum_{j=1}^M B_j \frac{\sinh(jk(\eta+h))}{\cosh(jkh)} \sin(jkx) \quad (40)$$

将式(39)~(40)代入式(16)、式(17)和式(38)构成的方程组中, 即可获得流函数波浪理论的解析解。

1.3 求解算法

牛顿法是一种高精度求解非线性方程组的方法, 但需要初始解驱动, 对初始解的要求相对苛刻。而遗传算法是用于求解最优化问题的常用算法, 可以给定变量的取值范围, 但在处理复杂问题时求解精度不高。使用遗传算法求解非线性方程组的思想与高卫峰等(2021)^[15] 类似。本文综合遗传和牛顿两种方法的特点, 用以求解流函数波浪理论的解析解, 该方法的算法流程及细节详见附录1。解析解的 $\bar{u}$ 、 R 、 A_j 可直接作为双层 Boussinesq 方程流函数的初始解, B_j 可通过下式转换为方程流函数的初始解, 即

$$B_j = \frac{\cosh(jk(\eta+h))}{\cosh(jkh)} \times \frac{B_j}{p_j + jk\eta q_j + \frac{1}{2}(jk\eta)^2 p_j + \frac{1}{6}(jk\eta)^3 q_j} \quad (41)$$

2 数值分析

下文中将 Liu 等^[5] 提出的双层 Boussinesq 方程简称为模型 1; 将刘忠波等^[14] 提出的最高阶空间导数为 5 阶的双层 Boussinesq 方程简称为模型 2; 将刘必劲等^[16] 和 Madsen 等^[13] 在其工作中给出的最高阶空间导数为 3 阶和 5 阶的单层 Boussinesq 方程简称为模型 3 和模型 4。使用同样的方法可获得所有模型的流函数解。下文计算中, 模型 1 中的 α 和 β 的取值为 0.1053 和 0.3947; 模型 2 中 α 和 β 取值为 0.06 和 0.44。

2.1 模型 1 和模型 2 的流函数解

下面计算中, 各模型 L 和 M 的取值不变, 分别取 π 和 20。为了量化模型流函数解与解析解的差异, 本文引入了 Gobbi(1999)等^[17] 提出的重合度, 具体公式如下

$$d_i = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{2M+1} [y(j) - y_d(j)]^2}{\sum_{j=1}^{2M+1} [|y(j) - Y_d| + |y_d(j) - Y_d|]^2}$$

(42)

$$Y_d = \frac{\sum_{j=1}^{2M+1} y_d(j)}{2M+1}$$

(43)

式中: d_i 为重合度, y_d 为解析解, y 为模型流函数解。

在 $kh = 10$ 时, 表 1 中给出了模型 1 和模型 2 与解析解在波面、波面水平速度和垂向速度的重合度。由表可见, 模型 1、模型 2 与解析解的重合度较高, 模型 2 的性能略优于模型 1。随 H/L 增加, 模型 1 和模型 2 与解析解的重合度开始减小, 波面重合度要高于速度分量的重合度。在 H/L 为 0.137 和 0.138 时, 模型 1 和模型 2 达到波陡上界。

图 2 和图 3 给出了模型 1 和模型 2 取各自波陡上界时的流函数解, 包括波面以及水体速度的垂向空间分布, 其中(a)、(c)为模型流函数解, (b)、(d)为解析解。由图 2、3 可知: 模型流函数解与解析解基

表 1 模型 1、模型 2 与解析解的重合度

Tab.1 Index of agreement between Model 1, Model 2 and the analytical solutions

H/L	模型1			模型2		
	波面重合度 n	波面水平速度重合度 u_n	波面垂直速度重合度 w_n	波面重合度 n	波面水平速度重合度 u_n	波面垂直速度重合度 w_n
0.130	$1-4.45 \times 10^{-7}$	$1-1.57 \times 10^{-5}$	$1-2.12 \times 10^{-5}$	$1-3.36 \times 10^{-7}$	$1-1.19 \times 10^{-5}$	$1-1.61 \times 10^{-5}$
0.131	$1-8.09 \times 10^{-7}$	$1-2.21 \times 10^{-5}$	$1-2.86 \times 10^{-5}$	$1-6.28 \times 10^{-7}$	$1-1.63 \times 10^{-5}$	$1-2.18 \times 10^{-5}$
0.132	$1-1.51 \times 10^{-6}$	$1-3.17 \times 10^{-5}$	$1-3.93 \times 10^{-5}$	$1-1.21 \times 10^{-6}$	$1-2.25 \times 10^{-5}$	$1-2.99 \times 10^{-5}$
0.133	$1-2.87 \times 10^{-6}$	$1-4.67 \times 10^{-5}$	$1-5.49 \times 10^{-5}$	$1-2.39 \times 10^{-6}$	$1-3.15 \times 10^{-5}$	$1-4.14 \times 10^{-5}$
0.134	$1-5.63 \times 10^{-6}$	$1-7.05 \times 10^{-5}$	$1-7.82 \times 10^{-5}$	$1-4.80 \times 10^{-6}$	$1-4.47 \times 10^{-5}$	$1-5.81 \times 10^{-5}$
0.135	$1-1.14 \times 10^{-5}$	$1-1.11 \times 10^{-4}$	$1-1.14 \times 10^{-4}$	$1-9.91 \times 10^{-6}$	$1-6.47 \times 10^{-5}$	$1-8.29 \times 10^{-5}$
0.136	$1-2.45 \times 10^{-5}$	$1-1.83 \times 10^{-4}$	$1-1.75 \times 10^{-4}$	$1-2.13 \times 10^{-5}$	$1-9.70 \times 10^{-5}$	$1-1.21 \times 10^{-4}$
0.137	$1-5.82 \times 10^{-5}$	$1-3.34 \times 10^{-4}$	$1-2.95 \times 10^{-4}$	$1-4.99 \times 10^{-5}$	$1-1.58 \times 10^{-4}$	$1-1.88 \times 10^{-4}$
0.138	—	—	—	$1-1.48 \times 10^{-4}$	$1-3.25 \times 10^{-4}$	$1-3.49 \times 10^{-4}$

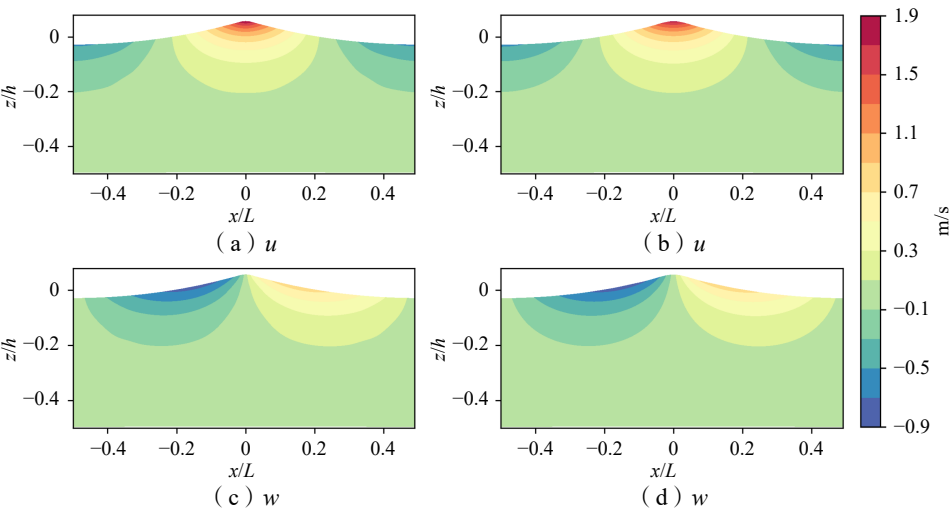


图 2 模型 1 流函数解与解析解的对比 ($H/L=0.137$)

Fig.2 Comparison of the stream-function solutions of Model 1 and the analytical solutions ($H/L=0.137$)

本一致。实际上,模型 1、模型 2 在波峰处的水平速度与解析解间的误差分别约为 7.4% 和 5%(可参考图 4),增大波陡误差将更大,这或许是模型不能收敛的主因。

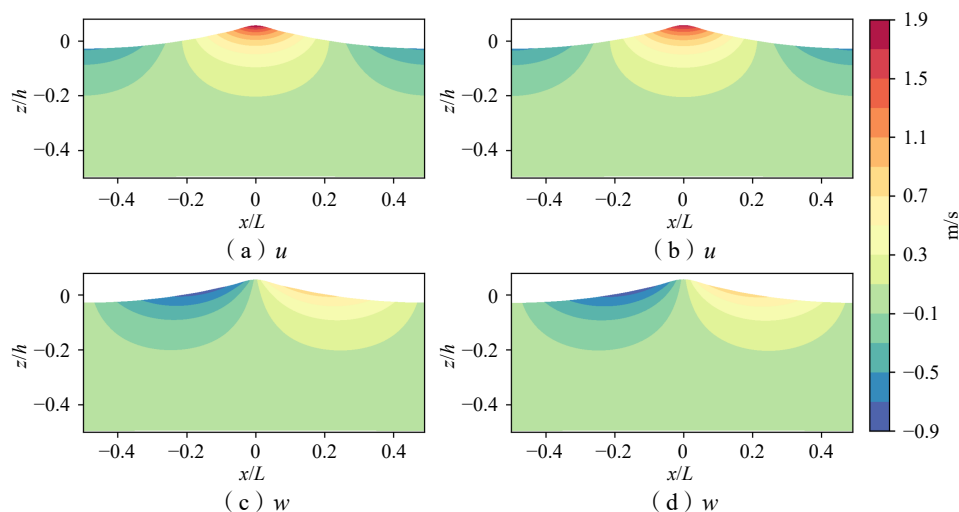


图3 模型2 流函数解与解析解的对比 ($H/L=0.138$)

Fig.3 Comparison of the stream-function solutions of Model 2 and the analytical solutions ($H/L=0.138$)

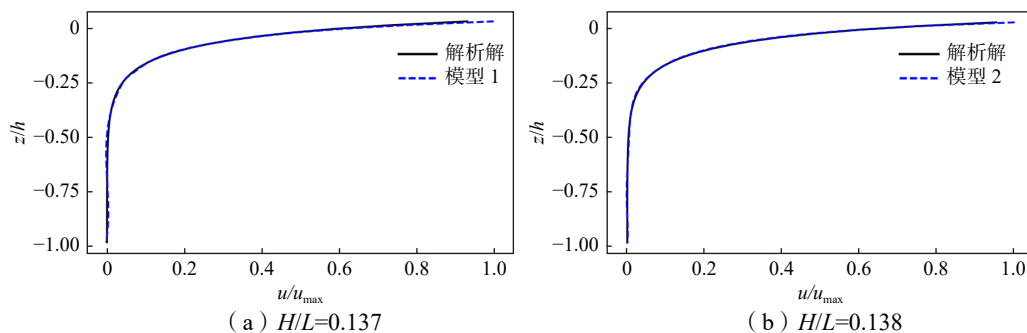


图4 模型1 与模型2 在波峰处水平速度的垂直剖面

Fig.4 Vertical profile of horizontal velocity at wave crest for Model 1 and Model 2

2.2 单层和双层 Boussinesq 方程的对比

将模型 1 和模型 3、模型 2 和模型 4 分别进行对比,可分析单层和双层 Boussinesq 方程的性能差异。模型 1/3 和模型 2/4 的 H/L 分别取 0.13 和 0.135。表 2 给出了各模型波面与解析解的重合度。结果表明,在单层方程适用水深范围内,双层方程的性能比单层方程更优;随着水深的增加,单层方程的性能随 kh 增加而快速下降。模型 3 和模型 4 的 kh 极限值分别约为 12 和 25;而模型 1 和模型 2 的 kh 极限值分别约为 75 和 250。

表 2 不同模型波面与解析解的重合度

Tab.2 Index of agreement of surface elevation between different models and the analytical solution

kh	模型1	模型3	kh	模型2	模型4
3	$1 - 5.67 \times 10^{-7}$	$1 - 8.00 \times 10^{-7}$	10	$1 - 9.91 \times 10^{-6}$	$1 - 1.22 \times 10^{-5}$
6	$1 - 3.36 \times 10^{-7}$	$1 - 1.76 \times 10^{-6}$	15	$1 - 9.89 \times 10^{-6}$	$1 - 1.36 \times 10^{-5}$
8	$1 - 3.89 \times 10^{-7}$	$1 - 8.84 \times 10^{-5}$	20	$1 - 1.11 \times 10^{-5}$	$1 - 3.30 \times 10^{-5}$
10	$1 - 4.45 \times 10^{-7}$	$1 - 8.32 \times 10^{-5}$	25	$1 - 1.03 \times 10^{-5}$	$1 - 2.47 \times 10^{-4}$
12	$1 - 5.04 \times 10^{-7}$	$1 - 6.10 \times 10^{-4}$	30	$1 - 1.04 \times 10^{-5}$	—
75	$1 - 9.03 \times 10^{-4}$	—	250	$1 - 5.59 \times 10^{-4}$	—

图 5 和图 6 给出了解析解和各模型流函数解在波峰处水平速度剖面以及 0.15L 处垂向速度剖面的比较结果。模型 1、模型 2 与解析解的重合度很高, 仅在静止水位处存在微小的差异。而模型 3、模型 4 与解析解存在一定差异。

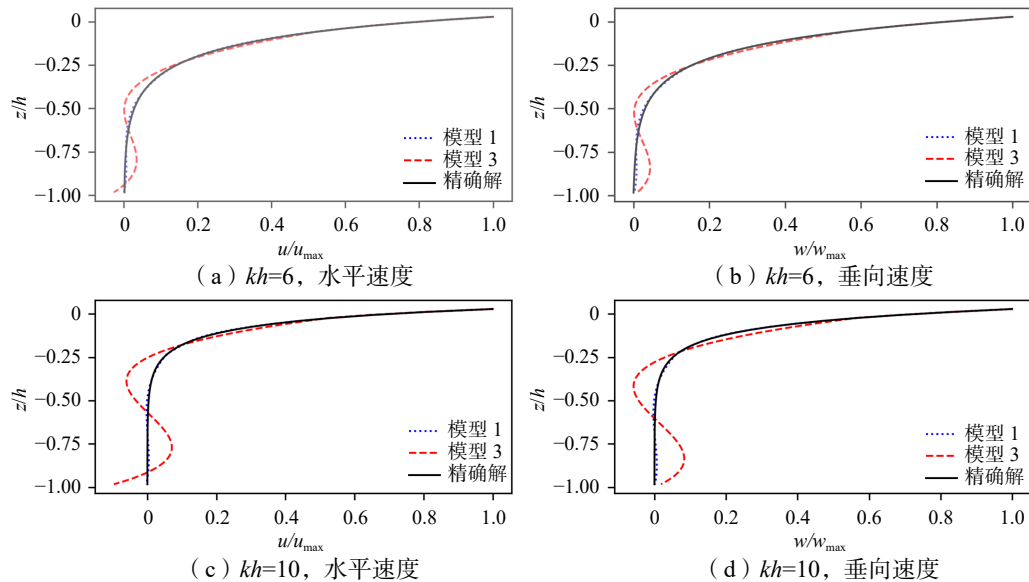


图 5 模型 1、模型 3 水平速度和垂向速度的垂直剖面

Fig.5 Vertical profiles of horizontal and vertical velocities of Model 1 and Model 3

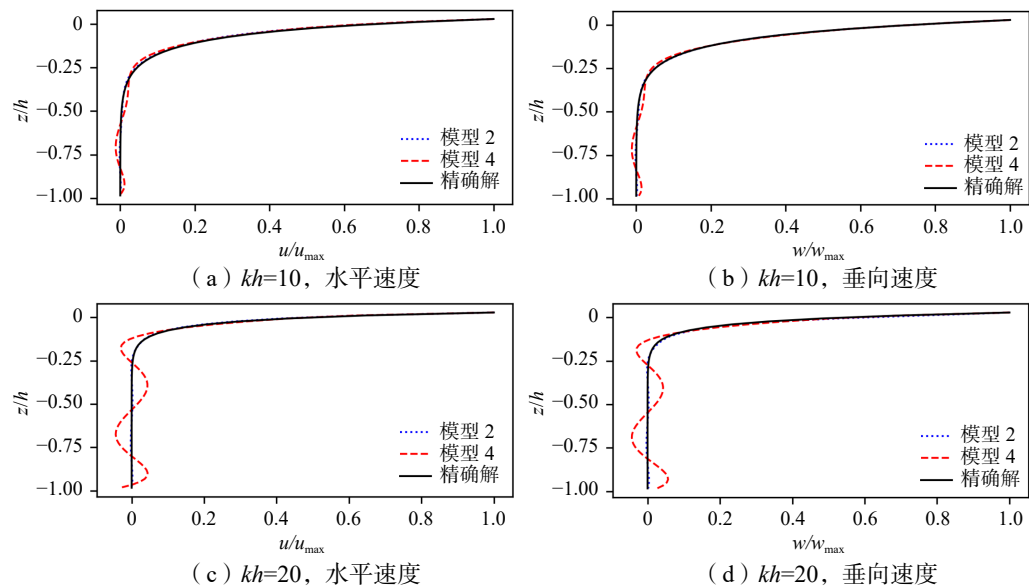


图 6 模型 2、模型 4 水平速度和垂向速度的垂直剖面

Fig.6 Vertical profiles of horizontal and vertical velocities of Model 2 and Model 4

2.3 波面速度公式中最高阶导数的影响

本小节以模型 1 和模型 3 为例, 分析波面水平速度和垂向速度公式中最高阶导数对 Boussinesq 型水波方程性能的影响。表 3 给出了将导数阶数扩展至 5 阶、7 阶时, 模型流函数解与解析解在波面的重合度。模型 1 和模型 3 中 kh 分别取 10 和 6。由表 3 可知: 提升波面速度公式中最高阶导数的阶数能进一步提升方程的非线性, 模型 1 和模型 3 的波陡上界可提升至 0.138。与从 3 阶到 5 阶相比, 5 阶到 7 阶提升较少。而 3 阶到 5 阶也仅是微弱的提升, 因此实际应用中 3 阶方程是性价比相对较高的选择。

表3 模型1、模型3的波面与解析解的重合度

Tab.3 Index of agreement of surface elevation between numerical (Model 1/3) and analytical solutions

H/L	模型1		模型3		
	5阶	7阶	3阶	5阶	7阶
0.1300	$1-3.73 \times 10^{-7}$	$1-3.38 \times 10^{-7}$	$1-1.76 \times 10^{-6}$	$1-1.77 \times 10^{-6}$	$1-1.85 \times 10^{-6}$
0.1310	$1-6.99 \times 10^{-7}$	$1-6.28 \times 10^{-7}$	$1-2.61 \times 10^{-6}$	$1-2.09 \times 10^{-6}$	$1-2.09 \times 10^{-6}$
0.1320	$1-1.34 \times 10^{-6}$	$1-1.20 \times 10^{-6}$	$1-4.31 \times 10^{-6}$	$1-2.74 \times 10^{-6}$	$1-2.53 \times 10^{-6}$
0.1330	$1-2.63 \times 10^{-6}$	$1-2.36 \times 10^{-6}$	$1-7.75 \times 10^{-6}$	$1-4.09 \times 10^{-6}$	$1-3.42 \times 10^{-6}$
0.1340	$1-5.27 \times 10^{-6}$	$1-4.74 \times 10^{-6}$	$1-1.50 \times 10^{-5}$	$1-7.02 \times 10^{-6}$	$1-5.31 \times 10^{-6}$
0.1350	$1-1.09 \times 10^{-5}$	$1-9.81 \times 10^{-6}$	$1-3.17 \times 10^{-5}$	$1-1.37 \times 10^{-5}$	$1-9.45 \times 10^{-6}$
0.1360	$1-2.35 \times 10^{-5}$	$1-2.13 \times 10^{-5}$	$1-7.58 \times 10^{-5}$	$1-2.98 \times 10^{-5}$	$1-1.91 \times 10^{-5}$
0.1370	$1-5.61 \times 10^{-5}$	$1-5.12 \times 10^{-5}$	$1-2.73 \times 10^{-4}$	$1-7.68 \times 10^{-5}$	$1-4.40 \times 10^{-5}$
0.1375	$1-9.93 \times 10^{-5}$	$1-9.15 \times 10^{-5}$	—	$1-1.50 \times 10^{-4}$	$1-7.99 \times 10^{-5}$
0.1380	$1-1.84 \times 10^{-4}$	$1-1.71 \times 10^{-4}$	—	—	$1-1.34 \times 10^{-4}$

2.4 色散系数对双层 Boussinesq 方程计算结果的影响

图7给出了模型1(图7(a))、模型2(图7(b))在不同 α 下的波面与对应解析解的绝对误差,其坐标轴进行了无因次化处理。绝对误差的计算公式为: $\text{err}(x) = |\eta(x) - \eta_*(x)| \div \max(\text{err})$, η_* 表示解析解的波面。模型1和模型2的 H/L 、 kh 分别取0.135、10。由图6可知,模型1更容易受 α 的影响,当模型1中 α 取0.1时,其计算结果最优,半波长内误差和为0.285 m。模型2中误差和最小的 α 为0.12,误差和为0.247 m;其次为0.06,误差和为0.249 m。

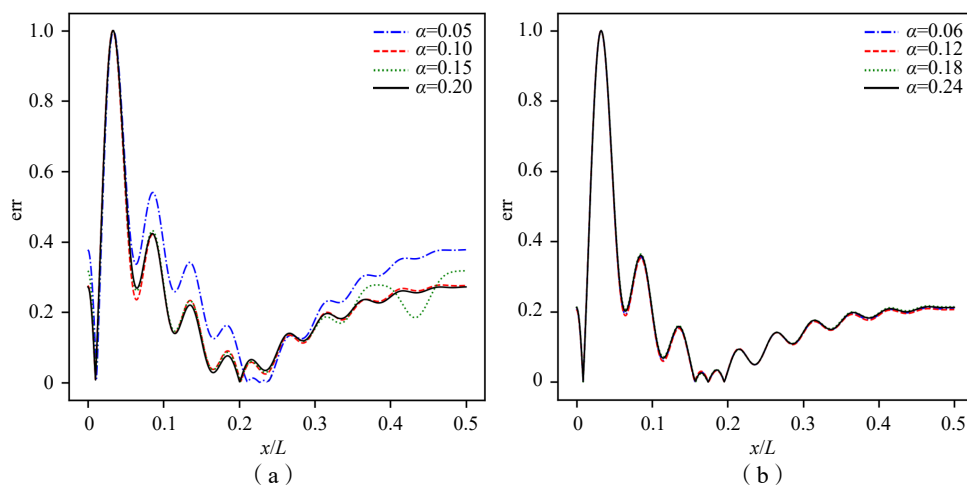


图7 模型1、2的波面与解析解的绝对误差

Fig.7 Absolute errors between numerical (Model 1/2) and analytical solutions for the surface elevation

3 结 论

本文利用遗传算法和牛顿法相结合的方法,给出了最高空间导数阶数为3阶和5阶的双层 Boussinesq 方程的流函数解,并将这些结果与相应解析解(流函数波浪理论)进行比较,得到的主要结论如下:

(1)最高导数阶数为3阶和5阶的双层 Boussinesq 方程的非线性波陡上界可达0.137和0.138。5阶方程的性能略优于3阶方程。而现有文献中通过数值模拟求解的最大 H/L 为0.123,还未达其上界。这表明现有的数值模拟方法,还有进一步的提升空间。

(2)在单层和双层 Boussinesq 方程均适用的 kh 取值情况下,双层 Boussinesq 方程的性能更优。最

高导数为 3 阶和 5 阶的单层 Boussinesq 方程的 kh 适应极限值约为 12、25; 而相应双层方程的 kh 适应极限误差值约为 75、250。

(3) 将最高导数为 3 阶的 Boussinesq 型水波方程中波面速度公式的最高阶导数提升至 5 阶、7 阶, 可进一步提升方程的非线性性能。单层和双层 Boussinesq 方程的波陡上界均可提升至 0.138。但随着最高阶导数的提升, 方程性能的提升将逐渐减少。从实际应用的角度出发, 3 阶方程的性价比会更高。

综上, 最高导数为 3 阶的双层 Boussinesq 方程(模型 1)更有利于工程实践, 但本文研究主要是在平底下进行的理论分析, 下一步将结合本文研究内容, 有针对性地对双层 Boussinesq 水波方程进行高精度求解, 并应用到变水深情况, 以期工程实践提供更多参考。

参 考 文 献:

- [1] Peregrine D H. Long waves on a beach[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, 27(4): 815–827.
- [2] Witting J M. A unified model for the evolution nonlinear water waves[J]. *Journal of Computational Physics*, 1984, 56(2): 203–236.
- [3] Madsen P A, Murray R, Sørensen O R. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics[J]. *Coastal Engineering*, 1991, 15(4): 371–388.
- [4] Nwogu O. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation[J]. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 1993, 119(6): 618–638.
- [5] Liu Z B, Fang K Z. A new two-layer Boussinesq model for coastal waves from deep to shallow water: Derivation and analysis[J]. *Wave Motion*, 2016, 67: 1–14.
- [6] Liu Z B, Fang K Z, Cheng Y Z. A new multi-layer irrotational Boussinesq-type model for highly nonlinear and dispersive surface waves over a mildly sloping seabed[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2018, 842: 323–853.
- [7] Kirby J T. Boussinesq models and their application to coastal processes across a wide range of scales[J]. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 2016, 142(6): 03116005.
- [8] 孙家文, 房克照, 刘忠波, 等. 关于 Boussinesq 型水波方程理论和应用研究的综述[J]. *海洋学报*, 2020, 42(5): 1–11.
Sun J W, Fang K Z, Liu Z B, et al. A review on the theory and application of Boussinesq-type equations for water waves[J]. *Acta Oceanologica Sinica*, 2020, 42(5): 1–11. (in Chinese)
- [9] Fang K Z, Liu Z B, Wang P, et al. Modeling solitary wave propagation and transformation over complex bathymetries using a two-layer Boussinesq model[J]. *Ocean Engineering*, 2022, 265: 112549.
- [10] 刘必劲, 张振伟, 刘忠波. 深水聚焦波群的双层 Boussinesq 数值模拟[J]. *船舶力学*, 2022, 26(9): 1268–1277.
Liu B J, Zhang Z W, Liu Z B. Numerical simulation of deep-water focusing wave group based on two-layer Boussinesq equation[J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2022, 26(9): 1268–1277. (in Chinese)
- [11] Liu Z B, Fang K Z. Numerical verification of a two-layer Boussinesq-type model for surface gravity wave evolution[J]. *Wave Motion*, 2019, 85: 98–113.
- [12] Otta A K, Schäffer H A. Finite-amplitude analysis of some Boussinesq-type equations[J]. *Coastal Engineering*, 1999, 36(4): 323–341.
- [13] Madsen P A, Bingham H B, Liu H. A new Boussinesq method for fully nonlinear waves from shallow to deep water[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2002, 462: 1–30.
- [14] 刘忠波, 房克照, 孙昭晨. 适合极端深水的双层高阶 Boussinesq 水波方程[J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2016, 37(8): 997–1002.
Liu Z B, Fang K Z, Sun Z C. Two-layer high-order Boussinesq model for water waves in extremely deep water[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2016, 37(8): 997–1002. (in Chinese)
- [15] 高卫峰, 罗宇婷, 原杨飞. 求解非线性方程组的智能优化算法综述[J]. *控制与决策*, 2021, 36(4): 769–778.
Gao W F, Luo Y T, Yuan Y F. Overview of intelligent optimization algorithms for solving nonlinear equation systems[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(4): 769–778. (in Chinese)
- [16] 刘必劲, 张振伟, 刘忠波, 等. 基于 Boussinesq 水波模型的聚焦波模拟[J]. *海洋学报*, 2021, 43(3): 31–39.
Liu B J, Zhang Z W, Liu Z B, et al. Simulating the evolution of a focused wave group by a Boussinesq-type model[J]. *Haiyang Xuebao*, 2021, 43(3): 31–39. (in Chinese)
- [17] Gobbi M F, Kirby J T. Wave evolution over submerged sills: Tests of a high-order Boussinesq model[J]. *Coastal Engineering*, 1999, 37(1): 57–96.

附录 1:

遗传算法是模拟自然选择、优胜劣汰、种群繁衍的进化算法,在最优化问题中应用广泛。本文需要求解 $2M+2$ 个非线性方程,设其为 $F(x) = 0$ 。将方程组求解问题转为各方程总误差绝对值最小的优化问题,即 $\min |F(x)|$,其最优解应为 0。由于遗传算法只能求极大化问题,需要将 $1/|F(x)|$ 作为种群中各染色体的适应度值。算法流程图及细节如下图所示:

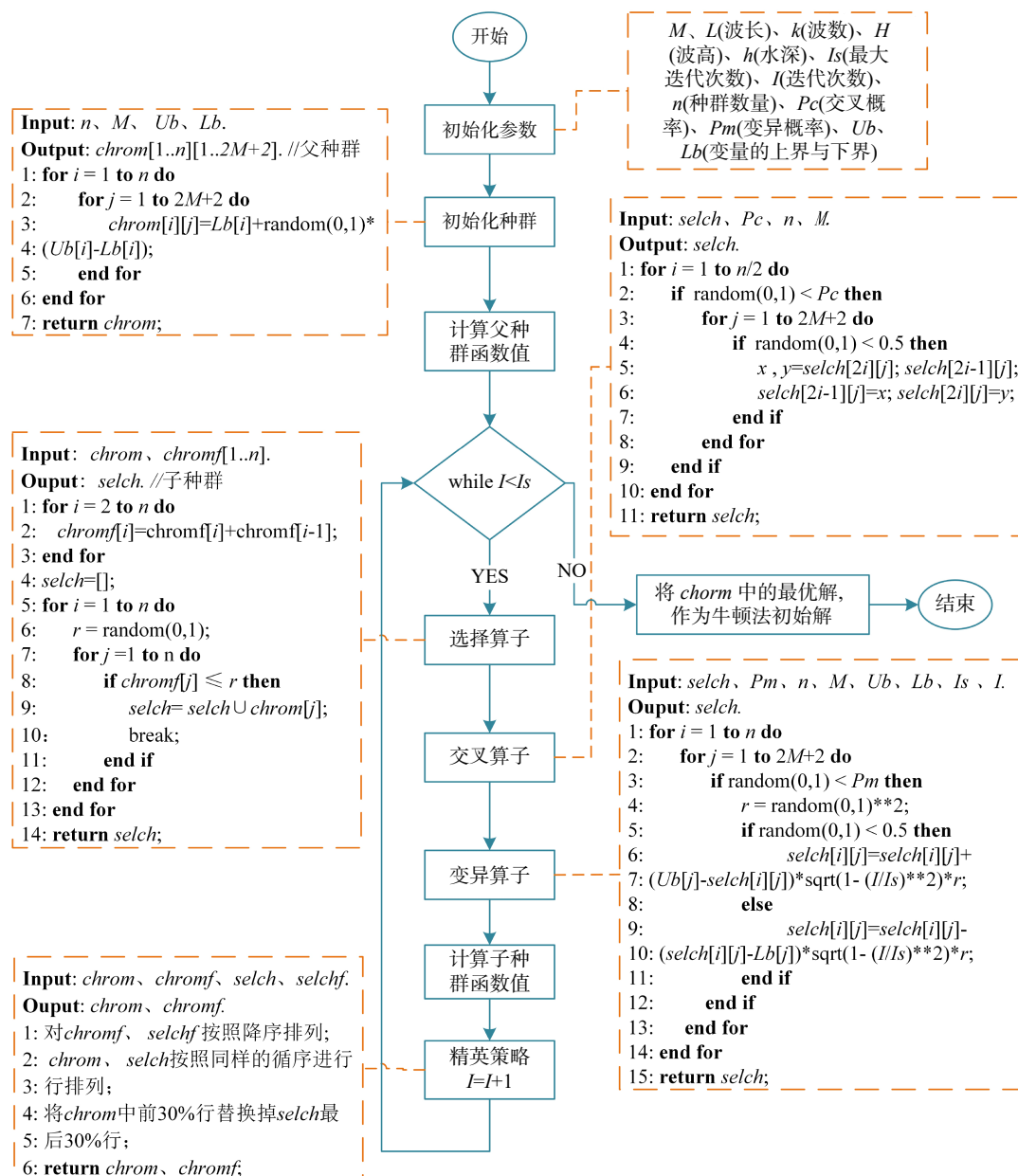


图 8 遗传-牛顿算法流程图及伪代码

Fig.8 Flow chart and pseudo-code of genetic Newtonian algorithm