

文章编号: 1007-7294(2025)08-1319-11

基于 Ritz–Legendre 谱方法的锥柱球组合结构 水下振动分析方法

张 帅, 周福昌, 李 佩, 王志朋

(武汉第二船舶设计研究所, 武汉 430064)

摘要: 针对组合壳结构的振动问题不易获得解析解, 同时求解其强耦合声振控制方程难度较大的现状, 本文提出一种 Ritz–Legendre 谱方法研究水下锥–柱–球组合壳的振动特性。基于 Reissner 壳体理论、虚拟弹簧技术以及相邻子壳的位移与转角协调关系, 建立锥–柱–球组合壳的理论模型。引入 Legendre–Gauss 谱单元避免法向导数不连续的问题, 离散 Kirchhoff–Helmholtz 边界积分方程, 构建水下外声场理论模型。由傅里叶转换和耦合表面欧拉方程, 得到水下组合壳的耦合振动控制方程。与 FEM 仿真结果的对比分析, 验证了本文方法的收敛性、可靠性和正确性。该方法可为工程应用设计阶段提供理论参考。

关键词: 锥–柱–球壳; Ritz–Legendre 谱方法; 自由振动; 受迫振动; 半解析法

中图分类号: U661.44 文献标识码: A doi: 10.3969/j.issn.1007-7294.2025.08.014

Vibration characteristics analysis of underwater combined shells based on Ritz–Legendre spectral element method

ZHANG Shuai, ZHOU Fu–chang, LI Pei, WANG Zhi–peng

(Wuhan Second Ship Design and Research Institute, Wuhan 430064, China)

Abstract: In view of the fact that it is difficult to obtain analytical solutions for vibration problems of combined shells and it is hard to solve strongly coupled acoustic and vibration control equations, a Ritz–Legendre spectral element method was proposed to discuss the vibration characteristics of underwater conical–cylindrical–spherical shells. Based on Reissner shell theory, virtual spring technology and the displacement angle relationship of adjacent subshells, the theoretical structural model of the combined shells was established. The Legendre spectral element method was introduced to avoid the problem of discontinuity of normal derivative and discretize the Kirchhoff–Helmholtz boundary integral equation, then the theoretical model of underwater external sound field was constructed. Based on Fourier transform and coupled surface Euler equation, the coupled vibration control equation of underwater combined shells was obtained. Compared with FEM simulation results, the convergence, reliability and correctness of this method were verified. This method can provide theoretical reference for engineering application in the design stage.

Key words: conical–cylindrical–spherical shell; Ritz–Legendre spectral element method; free vibration; forced vibration; semi-analytical method

收稿日期: 2025-02-17

基金项目: 国防科技创新特区项目(23-TQ02-03-ZT-01-007)

作者简介: 张 帅(1993-), 男, 博士, 工程师, 通讯作者, E-mail: 906497365@qq.com。

0 引言

组合壳作为一种经典实用的结构,在船舶建造、航空航天、桥梁管道等多种工程项目的设计制造中得到广泛应用。在船舶工业领域,重流体介质中的结构振动与声辐射是热门的研究方向。以形如锥-柱-球组合而成的水下航行器为例,其外壳与外流场会形成一个复杂的流-固-声耦合物理系统,该系统的低频振动和噪声辐射与航行器的隐身性紧密相关。因此,如何准确地预报此类问题已成为近些年较为重要的一个课题。由于组合壳结构不容易获得解析解,同时求解其强耦合声振控制方程难度较大,现有关于组合壳结构振动的研究多集中在轻流体介质中,从机理上分析重流体介质中组合壳的振动及声辐射问题的方法较少。综上所述,针对水下组合壳结构的振动问题,开展理论研究具有重要的学术及工程应用价值。

近几十年来,已有不少科研人员针对简单结构的振动或声辐射问题进行了相关的研究。Li^[1]提出了一种改进的傅里叶级数法研究两端简支梁的振动特性,此方法计算结果准确可靠,为研究复杂边界的壳类结构提供了重要的参考价值;王献忠等^[2]以碳玻混杂纤维复合材料板为对象,开展了试验模型的模态、振动和噪声试验测试,试验表明提高碳玻两种纤维的分散度能有效降低结构的振动和声辐射;李凯等^[3]综合考虑剪切变形和转动惯量,建立了计及静水压力的厚球壳声振耦合模型,分析了厚壁几何特征和静水压力对大潜深球壳声振特性的影响;叶海林等^[4]基于模态叠加法理论,采用 l_1 范数稀疏解方法,探究了影响水下双层圆柱壳振动声辐射的因素及规律;吴江海等^[5]通过阻抗综合法,建立了管路-支撑-圆柱壳耦合结构振动计算模型,分析了该结构的振动功率流和声辐射特性;白振国等^[6]采用虚源法建立了浅水环境中二维圆柱壳的振动声辐射数学物理模型,初步计算了浅水对圆柱壳振动声辐射的影响规律;Guo^[7]研究了流体负载作用下弹性波在锥壳上的传播和辐射特性;李天匀等^[8]基于波传播法建立了静水压力下圆锥壳声-固耦合振动模型,通过 Galerkin 法求解了不同静水压下的频率特性。

相比简单结构的振声性能分析而言,针对复杂组合壳结构的振动或声辐射研究则少了许多。Irie 等^[9]采用传递矩阵法研究了截顶圆锥-圆柱组合壳的振型及固有频率;Su 等^[10]基于一阶剪切理论,采用 FSE 法讨论了多种边界条件下锥壳、柱壳、球壳组合结构的自由振动特性;瞿叶高等^[11]提出了一种改进的变分法来分析加环肋的锥柱组合壳的自由振动;邓乃旗等^[12]基于半解析半数值法研究了水中环肋锥柱结合壳在低频范围内的结构振动特性;Caresta 等^[13]基于波动法和幂级数法分析了潜艇的结构和声学响应,通过与 FEM 方法计算结果的对比,验证了方法的正确性。

现有文献中对复杂组合壳在重流体介质中的振动特性的研究较少。部分研究此类问题的文献也多采用数值方法或者传统边界元法进行计算,无法回避传统边界元单元节点处的法向导数不连续的问题,现有关于水下组合壳振动的半解析方法有待进一步完善。

本文以锥-柱-球组合壳结构为研究对象,基于 Reissner 壳体理论得到各子壳能量方程,选取勒让德正交多项式和傅里叶级数的组合形式作为位移惩罚函数,采用虚拟弹簧技术计算边界和相邻子壳处的势能关系,建立组合壳的结构模型;然后,采用 Legendre-Gauss 谱单元避免法向导数不连续的问题,离散 Kirchhoff-Helmholtz 边界积分方程,得到水下的声场模型;接着,通过外部流体声压对结构的外力功将结构和声场进行耦合,得到重流体环境中的流-固-声耦合模型;最后,采用里兹法求解强耦合控制方程,即可得到所需的物理量。通过与 FEM 数值软件结果的比较,验证本文方法的收敛性和准确性。

1 理论分析

1.1 理论模型描述

本文研究的锥-柱-球组合壳正剖面示意图如图 1 所示。用正交坐标系 (α_i, β_i, z_i) 描述组合壳,其中

α 、 β 、 z 分别表示母线方向、周向方向以及径向方向； u_i 、 v_i 、 w_i 分别表示各子壳每个方向上的中面位移； L_i 、 h_i 分别表示壳体的长度和厚度，下标 $i=z$ 、 c 、 s 分别表示圆锥壳、圆柱壳和球壳；截顶圆锥壳的小端半径为 R_1 ，大端半径为 R_2 ，半锥角为 γ_0 ；圆柱壳的半径为 R_2 ，球壳的半径为 R_2 ，半开角为 ϕ_0 。假设各子壳厚度相等，均由各向同性且匀质等厚的同种材料构成，弹性模量、泊松比、密度分别为 E 、 μ 、 ρ 。由参考文献[14]可知，当圆柱壳在水下潜深超过 5 倍半径时，自由液面的影响可以忽略；当圆柱壳位于大潜深区域内，流体静压的影响才较为明显。本文讨论的工况不在二者范围之内，因此忽略了自由液面和流体静压对结构的影响。

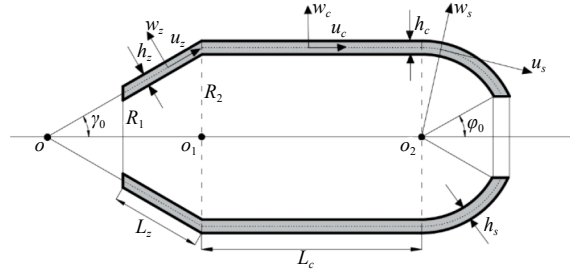


图 1 锥-柱-球组合壳正剖面示意图

Fig.1 Schematic diagram of normal section of conical-cylindrical-spherical combined shells

1.2 结构模型

根据图 1 所示的组合壳几何模型，可将整个结构划分为三个子壳：圆锥壳、圆柱壳以及球壳。根据经典 Reissner 壳体理论^[15]，可以得到各子壳上任意一点的应变与位移的方程：

$$\varepsilon_{\alpha i} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{v_i}{A_i B_i} \frac{\partial A_i}{\partial \beta_i} + \frac{w_i}{R_{\alpha i}} \quad (1)$$

$$\varepsilon_{\beta i} = \frac{u_i}{A_i B_i} \frac{\partial B_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{B_i} \frac{\partial v_i}{\partial \beta_i} + \frac{w_i}{R_{\beta i}} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{\alpha \beta i} = \frac{A_i}{B_i} \frac{\partial}{\partial \beta_i} \left(\frac{u_i}{A_i} \right) + \frac{B_i}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{v_i}{B_i} \right) \quad (3)$$

$$k_{\alpha i} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{u_i}{R_{\alpha i}} - \frac{1}{A_i} \frac{\partial w_i}{\partial \alpha_i} \right) + \frac{1}{A_i B_i} \left(\frac{v_i}{R_{\beta i}} - \frac{1}{B_i} \frac{\partial w_i}{\partial \beta_i} \right) \frac{\partial A_i}{\partial \beta_i} \quad (4)$$

$$k_{\beta i} = \frac{1}{A_i B_i} \left(\frac{u_i}{R_{\alpha i}} - \frac{1}{A_i} \frac{\partial w_i}{\partial \alpha_i} \right) \frac{\partial B_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{B_i} \frac{\partial}{\partial \beta_i} \left(\frac{v_i}{R_{\beta i}} - \frac{1}{B_i} \frac{\partial w_i}{\partial \beta_i} \right) \quad (5)$$

$$\tau_{\alpha \beta i} = \frac{A_i}{B_i} \frac{\partial}{\partial \beta_i} \left(\frac{u_i}{A_i R_{\alpha i}} - \frac{1}{A_i} \frac{\partial w_i}{\partial \alpha_i} \right) + \frac{B_i}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{v_i}{B_i R_{\beta i}} - \frac{1}{B_i} \frac{\partial w_i}{\partial \beta_i} \right) \quad (6)$$

式中， $\varepsilon_{\alpha i}$ 、 $\varepsilon_{\beta i}$ 、 $\varepsilon_{\alpha \beta i}$ 、 $k_{\alpha i}$ 、 $k_{\beta i}$ 、 $\tau_{\alpha \beta i}$ 分别表示线应变、切应变、曲率改变量以及扭率改变量， A_i 、 B_i 为拉梅系数， $R_{\alpha i}$ 、 $R_{\beta i}$ 为 α_i 和 β_i 的曲率半径。

由式(1)~(6)可以得到各子壳的势能 U_i 和动能 T_i 如下：

$$U_i = \frac{K_i}{2} \iint_s \left[(\varepsilon_{\alpha i})^2 + (\varepsilon_{\beta i})^2 + 2\mu \varepsilon_{\alpha i} \varepsilon_{\beta i} + \frac{1-\mu}{2} (\varepsilon_{\alpha \beta i})^2 \right] A_i B_i dS + \frac{D_i}{2} \iint_s \left[(k_{\alpha i})^2 + (k_{\beta i})^2 + 2\mu k_{\alpha i} k_{\beta i} + \frac{1-\mu}{2} (\tau_{\alpha \beta i})^2 \right] A_i B_i dS \quad (7)$$

$$T_i = \frac{\rho h_i}{2} \iint_s \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 \right] A_i B_i dS \quad (8)$$

式中， $K_i = E h_i / (1 - \mu^2)$ 和 $D_i = E h_i^3 / [12(1 - \mu^2)]$ 分别为子壳的薄膜刚度和弯曲刚度。

在得到各子壳的势能和动能之后，本文引入惩罚函数法^[16]来计算结构连接与边界处的势能问题。采用三组平动弹簧和一组转动弹簧来保证相邻子壳位移与转角的连续性，还可以通过改变两端边界处的四组弹簧刚度值来模拟两端复杂的边界条件。

储存在截顶圆锥壳小端和球壳开口处的弹簧势能分别为

$$V_{bz} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[k_{zu0} u_z^2 + k_{zv0} v_z^2 + k_{zw0} w_z^2 + k_{z\theta 0} \left(\frac{\partial w_z}{\partial x_z} \right)^2 \right] \Big|_{\alpha_z=0} R_1 d\theta \quad (9)$$

$$V_{bs} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[k_{sul} u_s^2 + k_{svl} v_s^2 + k_{swl} w_s^2 + k_{stl} \left(\frac{\partial w_s}{\partial x_s} \right)^2 \right] \Big|_{\alpha_s = \theta_0} R_2 \sin \theta d\theta \quad (10)$$

储存在圆锥壳与圆柱壳、圆柱壳与球壳连接处的弹簧势能分别为

$$V_{zc} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ k_{zcu} [u_c - (u_z \cos \gamma_0 - w_z \sin \gamma_0)]^2 + k_{zcv} (v_c - v_z)^2 + k_{zcw} [w_c - (u_z \sin \gamma_0 + w_z \cos \gamma_0)]^2 + k_{zc\theta} (\partial w_c / \partial x_c - \partial w_z / \partial x_z)^2 \right\} \Big|_{\alpha_z = L_c, \alpha_c = 0} R_2 d\theta \quad (11)$$

$$V_{cs} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ k_{csu} (u_c - u_s)^2 + k_{csv} (v_c - v_s)^2 + k_{csw} (w_c - w_s)^2 + k_{cs\theta} [\partial w_c / \partial x_c - (\partial w_s / \partial \varphi - u_s) / R_2]^2 \right\} \Big|_{\alpha_c = L_c, \alpha_s = 0} R_2 d\theta \quad (12)$$

式中, u_z 、 v_z 、 w_z 、 u_c 、 v_c 、 w_c 、 u_s 、 v_s 、 w_s 分别表示相应位置处圆锥壳、圆柱壳以及球壳的中面位移; k_{zu0} 、 k_{zv0} 、 k_{zw0} 、 $k_{z\theta0}$ 分别表示截顶圆锥壳小端的三组平动和一组转动弹簧的刚度值; k_{sul} 、 k_{svl} 、 k_{swl} 、 k_{stl} 分别表示球壳开口处的三组平动和一组转动弹簧的刚度值; k_{zcu} 、 k_{zcv} 、 k_{zcw} 、 $k_{zc\theta}$ 分别表示锥-柱壳连接处的三组平动和一组转动弹簧的刚度值; k_{csu} 、 k_{csv} 、 k_{csw} 、 $k_{cs\theta}$ 分别表示柱-球壳连接处的三组平动和一组转动弹簧的刚度值。

本文选用正交区间[-1,1]上权函数为 1 的勒让德多项式构造位移惩罚函数,是因为其本身具有优良的数学性质^[17],同时能够满足后续结构与声场的适配要求,其表达式具体如下:

$$u_i(\alpha_i, \beta_i, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N T_m(\alpha_i) [U_{imn}^c \cos(n\beta_i) + U_{imn}^s \sin(n\beta_i)] e^{j\omega_i t} \quad (13)$$

$$v_i(\alpha_i, \beta_i, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N T_m(\alpha_i) [V_{imn}^c \cos(n\beta_i) + V_{imn}^s \sin(n\beta_i)] e^{j\omega_i t} \quad (14)$$

$$w_i(\alpha_i, \beta_i, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N T_m(\alpha_i) [W_{imn}^c \cos(n\beta_i) + W_{imn}^s \sin(n\beta_i)] e^{j\omega_i t} \quad (15)$$

$$\begin{cases} T_0(\alpha_i) = 1 \\ T_1(\alpha_i) = \alpha_i \\ (m+1)T_{m+1}(\alpha_i) = (2m+1)\alpha_i T_m(\alpha_i) - mT_{m-1}(\alpha_i) \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (16)$$

式中, $T_m(\alpha_i)$ 表示第 m 阶勒让德多项式, M 、 N 分别表示勒让德多项式的阶数和周向波数的截断数, U_{imn}^c 、 U_{imn}^s 、 V_{imn}^c 、 V_{imn}^s 、 W_{imn}^c 、 W_{imn}^s 表示广义待定系数, j 为虚数单位, ω_i 为角频率, t 为时间。

1.3 声场模型

锥柱球组合壳的声场柱坐标系如图 2 所示,其中原点 O 位于圆柱壳几何轴线的中心。根据 Kirchhoff-Helmholtz 边界积分方程^[18],场点 P 的声压可以表示为

$$C(P)p(P) = \int_S \left[p(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} - G(P, Q) \frac{\partial p(Q)}{\partial n_Q} \right] dS(Q) \quad (17)$$

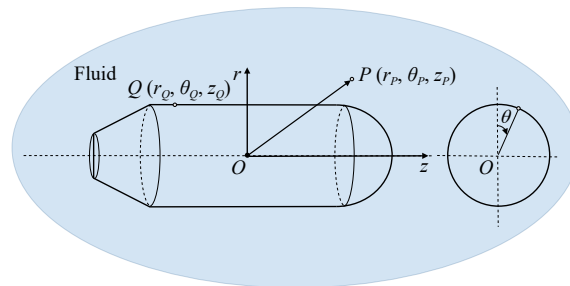


图 2 锥柱球组合壳声场坐标示意图

Fig.2 Sound field coordinate diagram of conical-cylindrical-spherical combined shells

$$C(P) = \begin{cases} 0 & P \in V_a \\ 1 & P \in V_b \\ 1/2 & P \in S_q \\ 1 + \int_S \frac{\partial}{\partial n_Q} \left(\frac{1}{4\pi r_{PQ}} \right) dS(Q) & P \in S_{q0} \end{cases} \quad (18)$$

式中, $Q(r_Q, \theta_Q, z_Q)$ 为结构表面一点, $P(r_p, \theta_p, z_p)$ 为声场任意一点, $G(P, Q)$ 为自由空间格林函数, n_Q 为 Q 点的外法线方向, V_a 表示组合壳内部区域, V_b 表示流场域, S_q 表示组合壳的光滑表面, S_{q0} 表示组合壳的边缘或拐角, r_{PQ} 表示 P 点与 Q 点的空间距离。

自由空间的格林函数方程如下:

$$G(P, Q) = \frac{e^{-jk_f r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}} \quad (19)$$

式中, $k_f = \omega/c_f$ 表示波数, ω 表示圆频率, c_f 表示流体声速。

由几何关系可知:

$$r_{PQ} = \sqrt{r_Q^2 + r_p^2 - 2r_Q r_p \cos(\theta_Q - \theta_p) + (z_Q - z_p)^2} \quad (20)$$

对于轴对称结构的辐射问题, 可以将结构表面压力 $p(r, \theta, z)$ 和径向位移 $w(r, \theta, z)$ 展开为周向角度的傅里叶级数:

$$p(r, \theta, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(r, z) e^{in\theta} \quad (21)$$

$$w(r, \theta, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_n(r, z) e^{in\theta} \quad (22)$$

结构表面的声压 $p(Q)$ 与其表面的位移 $w(Q)$ 满足欧拉方程:

$$\frac{\partial p(Q)}{\partial n_Q} = \rho_f \omega^2 w(Q) \quad (23)$$

式中, ρ_f 表示流体的密度。

将式(19)、(21)、(22)、(23)代入到式(17):

$$C(P) \sum_n p_n(P) e^{in\theta_p} = \sum_n \int_S \left[p_n(Q) \frac{\partial G}{\partial n_Q} - \rho_f \omega^2 w(Q) G \right] e^{in(\beta+\theta_p)} dS(Q) \quad (24)$$

式中, $\beta = \theta_Q - \theta_p$ 。

对格林函数以及其法向导数进行傅里叶变换:

$$g_n = \int_0^{2\pi} G(P, Q) e^{in\beta} d\beta \quad (25)$$

$$h_n = \int_0^{2\pi} \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} e^{in\beta} d\beta \quad (26)$$

将式(25)~(26)代入式(24), 化简得到

$$C(P) p_n(P) = \int_\Gamma [p_n(Q) h_n - w_n(Q) g_n] r_Q d\Gamma \quad (27)$$

式中, Γ 为锥-柱-球组合壳的母线, g_n 和 h_n 分别为格林函数及其法向导数的积分。

为了求解公式(27), 需要对其进行离散。为了使计算过程简便可行, 保证结果准确可靠, 此处沿着锥-柱-球组合壳母线方向, 将每个子壳均划分为 N_s 段, 且每段结构与谱边界单元在几何上保持一致。由于分段导致相同子壳相邻两段之间产生的势能, 可以参照式(11)得到。

本文选用 Legendre-Gauss 单元作为谱单元, 不仅能保证所取谱点对应于高斯勒让德求积公式的求值点, 而且可以避开传统边界单元节点处的法向导数不连续的问题^[19]。第 k 个谱单元上的局部物理量可以表示为

$$r_k(\zeta) = \sum_{i=0}^l N_i(\zeta) r_{ik} \quad (28)$$

$$z_k(\zeta) = \sum_{i=0}^l N_i(\zeta) z_{ik} \quad (29)$$

$$p_k(\zeta) = \sum_{i=0}^l N_i(\zeta) p_{ik} \quad (30)$$

$$N_i(\zeta) = \prod_{j=0, j \neq i}^l \frac{\zeta - \zeta_j}{\zeta_i - \zeta_j} \quad (31)$$

式中, $r_k(\zeta)$ 、 $z_k(\zeta)$ 、 $p_k(\zeta)$ 、 r_k 、 z_k 、 p_k 分别为第 k 个单元上任一点和谱点的 r 坐标值、 z 坐标值和声压值, $N_i(\zeta)$ 为形函数, $l+1$ 和 ζ_i 分别为对应 Legendre 多项式的次数和根, ζ 为局部坐标自变量参数。

将式(28)~(31)代入式(27), 经过化简可以得到声场控制方程:

$$\mathbf{C} \mathbf{p}_n = \mathbf{H}_n \mathbf{p}_n - \mathbf{G}_n \mathbf{w}_n \quad (32)$$

式中, \mathbf{C} 表示几何系数矩阵, \mathbf{H}_n 和 \mathbf{G}_n 分别表示与声压有关的系数矩阵和与径向位移有关的系数矩阵, \mathbf{p}_n 和 \mathbf{w}_n 分别表示声压系数向量和位移系数向量。

1.4 声固耦合模型

在重流体环境中, 求解结构的振动以及声学问题时, 必须考虑流体声压与结构的相互作用。由功能关系得到所有谱单元上流体声压对结构的功 W_{fa} :

$$W_{fa} = \sum_{k=1}^{N_s} \iint_{sk} (\mathbf{W}_n^T \mathbf{P}_n) dS \quad (33)$$

本文采用简谐点激励分析锥-柱-球组合壳的振动特性。点激励力对结构的功 W_{fe} 可以表示如下:

$$W_{fe} = \iint_s (F_{u_i} u_i + F_{v_i} v_i + F_{w_i} w_i) \delta(\alpha_i - \alpha_{fe}, \beta_i - \beta_{fe}) d\alpha_i d\beta_i \quad (34)$$

式中, \mathbf{W}_n^T 和 \mathbf{P}_n 表示位移和声压的装配矩阵, F_{u_i} 、 F_{v_i} 、 F_{w_i} 分别是点激励在轴向、周向、径向的分力, δ 表示狄拉克函数, $(\alpha_{fe}, \beta_{fe})$ 是点激励施加的位置坐标。

至此, 可以得到水下锥-柱-球组合壳的拉格朗日能量方程:

$$\Lambda = \sum_{k=1}^{N_s} (U_{ik} - T_{ik}) + \sum_{k=1}^{N_s-1} V_{ik} + V_{zc} + V_{cs} + V_{bz} + V_{bs} \quad (35)$$

式中, U_{ik} 、 T_{ik} 分别表示分段后每段子壳的应变能和动能, V_{ik} 表示分段后相同子壳相邻两段之间的势能。

根据里兹法和哈密顿原则, 相关待定系数可以通过数学变分的过程得到:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (36)$$

然后可以得到锥-柱-球组合壳的流-固-声耦合控制方程:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{F}_a) \mathbf{q} = \mathbf{F}_e \quad (37)$$

式中, \mathbf{q} 表示全局待定系数向量, \mathbf{K} 为结构的刚度矩阵, \mathbf{M} 为结构的质量矩阵, \mathbf{F}_e 表示广义力向量, \mathbf{F}_a 表示流体声压作用矩阵。

求解公式(37)即可得到水下锥-柱-球结构的自由振动以及受迫振动特性。

2 数值计算与讨论

本章通过一些数值算例来验证本文方法计算水下锥-柱-球组合壳振动问题的收敛性及正确性。取无量纲频率 $\Omega = \omega R_2 [\rho(1-\mu^2)/E]^{0.5}$, 无量纲平动弹簧刚度参数 $\Gamma_{it} = k_i R_i^3/D$, 无量纲转动弹簧刚度参数

$\Gamma_{ir}=K_r R_i/D$ 。 k_t 、 K_r 分别表示三组平动和一组转动弹簧的刚度值, R_i 为子壳半径, D_i 为弯曲刚度。四组弹簧无量纲刚度值及其对应的边界条件如表 1 所示。表中 F 表示自由边界, S 表示硬筒支边界, C 表示固支边界。锥柱球组合壳两端沿圆周方向线性分布一周的线弹簧, 如图 3 所示, Γ_{iu0} 、 Γ_{iv0} 、 Γ_{iw0} 、 $\Gamma_{i\theta0}$ 分别表示限制锥壳端轴向、周向、法向以及转角的无量纲平动弹簧刚度参数, Γ_{iu1} 、 Γ_{iv1} 、 Γ_{iw1} 、 $\Gamma_{i\theta1}$ 分别表示限制球壳端轴向(母线方向)、周向、法向以及转角的无量纲平动弹簧刚度参数。当上述刚度参数分别选取表 1 中的数值时, 即可实现不同边界条件的模拟。

表 1 弹簧无量纲刚度值及相应的各种边界条件

Tab.1 Non-dimensional spring stiffness value and corresponding boundary conditions

边界条件	弹簧无量纲刚度参数			
	Γ_{iu0} , Γ_{iu1}	Γ_{iv0} , Γ_{iv1}	Γ_{iw0} , Γ_{iw1}	$\Gamma_{i\theta0}$, $\Gamma_{i\theta1}$
F	0	0	0	0
S	10^3	10^3	10^3	0
C	10^3	10^3	10^3	10^3

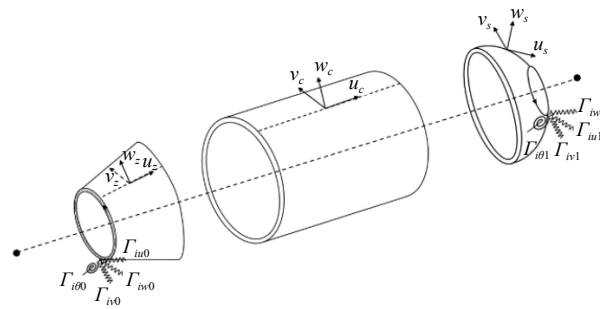


图 3 锥柱球组合壳两端边界条件示意图

Fig.3 Schematic diagram of boundary conditions at both ends of conical-cylindrical-spherical combined shells

2.1 方法收敛性分析

首先验证本文方法的收敛性。以锥-柱-球组合壳结构在真空中的自由振动为例验证本文方法的收敛性。选取组合壳的几何参数和材料参数如下: $R_1=0.4\text{ m}$, $R_2=1\text{ m}$, $L_c=1.2\text{ m}$, $L_s=2.5\text{ m}$, $h_z=h_c=h_s=0.01\text{ m}$, $\gamma_0=30^\circ$, $\phi_0=30^\circ$, $E=210\text{ GPa}$, $\mu=0.3$, $\rho=7800\text{ kg/m}^3$ 。取子壳分段数 $N_s=4$, 改变 M 大小得到不同阶数的固有频率, 同时采用 FEM 法进行了结果对比验证, 具体如表 2 所示。其中相对误差公式为 $Error=|f_p-f|/f\times 100\%$, f_p 和 f 分别表示本文方法和 FEM 方法的计算结果。

表 2 真空锥-柱-球组合壳自由振动前八阶无量纲频率

Tab.2 First eight dimensionless frequencies of free vibration of conical-cylindrical-spherical shells with C-C boundary condition

边界条件	模态阶数	固有频率					
		$M\times N$				FEM	Error
		3×10	4×10	5×10	6×10		
C-C	1	0.079 96	0.079 64	0.079 52	0.079 48	0.079 52	0.047%
	2	0.085 37	0.085 16	0.085 10	0.085 09	0.085 07	0.027%
	3	0.100 44	0.099 85	0.099 57	0.099 45	0.099 54	0.091%
	4	0.108 99	0.108 85	0.108 81	0.108 81	0.108 73	0.071%
	5	0.143 48	0.143 38	0.143 35	0.143 35	0.143 20	0.100%
	6	0.147 23	0.145 86	0.145 07	0.144 70	0.144 79	0.062%
	7	0.169 10	0.168 37	0.168 16	0.168 10	0.168 10	0.001%
	8	0.181 14	0.180 23	0.179 75	0.179 59	0.179 67	0.045%

分析表 2 数据可知, 锥-柱-球组合壳自由振动的无量纲固有频率随截断数 M 的增大而逐渐趋于稳定, 最终收敛结果与 FEM 的计算结果吻合较好。可以发现, 当 $M=6, N=10$ 时已满足计算精度的要求, 因此在后文计算中位移惩罚函数的截断数取上述数值。另外, 从图 4 可以看出, 本文方法得到的振型与 FEM 所得基本一致, 表明该方法对于求解真空中组合壳结构的振动问题具有较高的准确性和适用性, 能够为后文计算组合壳的强耦合模态提供技术支持。

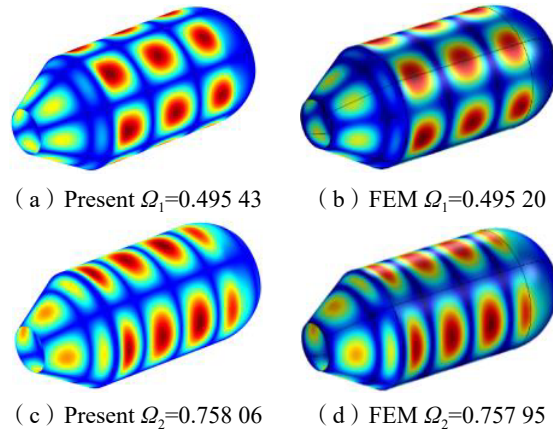


图 4 真空中 C-C 边界下两种方法部分固有频率的振型对比图

Fig.4 Comparison of vibration modes of partial natural frequencies of two methods under C-C boundary in vacuum

2.2 水下锥-柱-球组合壳的自由振动分析

组合壳的模型参数与 2.1 节相同。海水的密度和声速分别为 $\rho_f=1025 \text{ kg/m}^3, C_f=1500 \text{ m/s}$ 。声学边界单元上的 r 坐标、 z 坐标和声压均采用 $l=2$ 的 Legendre-Gauss 单元展开。组合壳两端没有封口, 假设两端有虚拟的刚性声障板保证整个结构闭合。经本文方法和 FEM 计算, 得到水下锥-柱-球组合壳在 F-F 和 S-S 边界条件下的前 8 阶无量纲固有频率, 具体如表 3 所示(自由振动的刚体模态已剔除)。

表 3 水下锥-柱-球组合壳自由振动前八阶无量纲频率

Tab.3 First eight dimensionless frequencies of free vibration of underwater conical-cylindrical-spherical combined shells

模态 m	边界条件					
	F-F			S-S		
	Present	FEM	Error 1	Present	FEM	Error 2
1	0.013 21	0.013 53	2.422%	0.039 58	0.039 95	0.934%
2	0.020 49	0.020 72	1.145%	0.045 17	0.045 76	1.304%
3	0.039 42	0.039 88	1.181%	0.045 58	0.046 02	0.963%
4	0.039 92	0.040 32	1.013%	0.060 29	0.060 97	1.130%
5	0.045 30	0.045 75	1.002%	0.061 37	0.061 87	0.809%
6	0.054 17	0.054 73	1.028%	0.082 39	0.081 90	0.588%
7	0.061 07	0.061 87	1.305%	0.084 27	0.085 39	1.329%
8	0.078 26	0.078 92	0.849%	0.096 97	0.097 38	0.416%

由表 3 的数据可以看出, F-F 和 S-S 边界条件下两种方法求得的无量纲频率相差较小, 表明了本文方法的准确性。图 5 给出了 S-S 边界条件下, 水下组合壳的某阶振型对比图, 可以发现二者吻合较好, 表明了本文方法的可靠性。另外, 对比表 2 和表 3 中的误差可以发现, 水下的结构固有频率的误差相比真空中要大, 这是由于二者动力学控制方程不一样导致的, 真空中的动力学方程属于线性方程可通过传统的特征值方法直接求出, 而水下的动力学方程属于非线性方程, 需要通过迭代或者搜根的方式求

出,因此在计算精度上会有一些的差别。

将 S-S 边界下水中和空气中的固有频率进行比较,如图 6 所示,可以发现重流体介质对结构的振动具有显著的影响。水中组合壳结构振动的固有频率明显小于同阶空气中的固有频率,这是由于附连水效应导致的。本文方法可为准确分析附连水效应,揭示其物理机理提供参考价值。

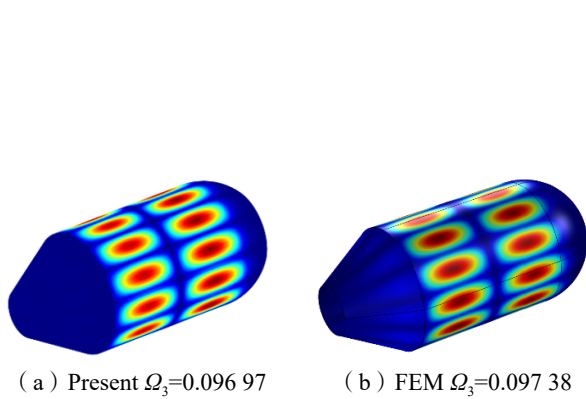


图 5 水中 S-S 边界下两种方法某阶固有频率的振型对比图

Fig.5 Comparison of vibration modes of natural frequency of two methods under S-S boundary in water

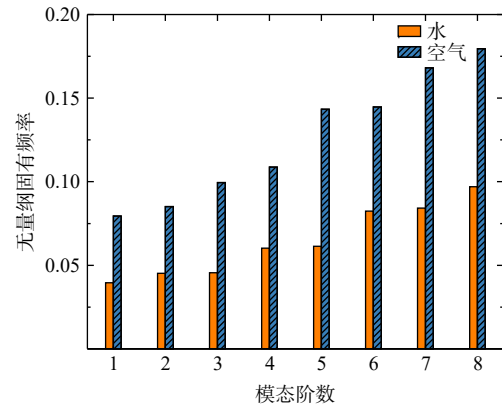


图 6 S-S 边界水中和空气中前 8 阶固有频率对比图

Fig.6 First eight-order dimensionless frequencies of conical-cylindrical-spherical combined shells in water and air

2.3 水下锥-柱-球组合壳的受迫振动分析

组合壳的模型参数可以参照 2.2 节。在 1.1 节物理模型的局部坐标系下,选取观测点 $A(5/6L_z, 0)$ 、 $B(\pi/6, 0)$, 分别位于锥壳和球壳上。单位简谐点激励 $F_e = e^{i\omega t}$, 沿柱壳 z_c 负方向作用于 $C(1/2L_c, 0)$ 点处。取组合壳的边界条件为 S-C, 简谐激励力频率为 1~100 Hz, 扫频间隔为 1 Hz。定义径向位移级 $W = 20 \log_{10}(|w|/w_0)$, 参考位移 $w_0 = 10^{-12}$ m。观测点 A、B 点的谐响应如图 7 所示。

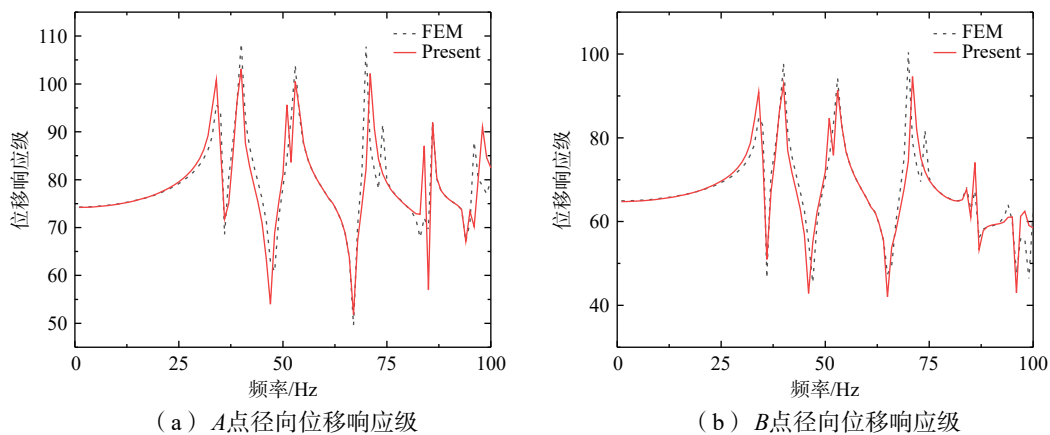


图 7 S-C 边界水下锥-柱-球组合壳的受迫振动响应

Fig.7 Forced vibration response of conical-cylindrical-spherical combined shells with S-C boundary condition in water

由图 7 可见,本文方法和 FEM 得到的 A、B 两点的频响曲线,除了少数峰值因数值误差有些出入外,绝大部分都吻合较好,证明了该方法的适用性和准确性。

3 结 语

本文提出了一种 Ritz-Legendre 谱方法对水下锥-柱-球组合壳的自由及受迫振动问题进行了分

析。首先,基于 Reissner 壳体理论和虚拟弹簧技术建立了组合壳的结构模型,然后引入 Legendre 谱单元法离散 Kirchhoff-Helmholtz 边界积分方程,得到声场控制方程。Legendre-Gauss 谱单元具有方便求解积分、避免节点处的法向导数不连续的优点。最后,采用里兹法求解耦合控制方程,可以得到所需组合壳的相关物理量,将本文计算的频率、振型以及谐响应曲线与 FEM 数值软件结果进行对比,能够清楚地看到吻合较好,从而验证了本文方法的收敛性和准确性,即 Ritz-Legendre 谱方法求解水下组合壳的振动问题具有很好的收敛性、适应性和准确性。研究结果可为进一步进行水下复杂结构的声辐射研究提供方法依据。

参 考 文 献:

- [1] Li Wen L. Free vibrations of beams with general boundary conditions[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 237(4): 709-725.
- [2] 王献忠,左营营,陈哲,等. 碳玻混杂纤维层复合板的声振特性试验研究[J]. *中国造船*, 2020, 61(2): 125-135.
Wang X Z, Zuo Y Y, Chen Z, et al. Experimental study on vibration and acoustic response of hybrid carbon-glass laminate plates[J]. *Shipbuilding of China*, 2020, 61(2): 125-135. (in Chinese)
- [3] 李凯,俞孟萨. 大潜深耐压球壳结构的声耦合特性研究[J]. *船舶力学*, 2022, 26(4): 584-594.
Li K, Yu M S. Vibro-acoustic coupling analysis of deep submerged spherical shells[J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2022, 26(4): 584-594. (in Chinese)
- [4] 叶海林,陈美霞,陶襄樊. 基于 l_1 范数稀疏解的水下双层圆柱壳振动声辐射预报影响因素研究[J]. *船舶力学*, 2019, 23(2): 234-244.
Ye H L, Chen M X, Tao X F. Research on influencing factors of reconstruction of vibration and sound for double cylindrical shell underwater based on l_1 -norm sparse solution[J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2019, 23(2): 234-244. (in Chinese)
- [5] 吴江海,尹志勇,孙玉东,等. 管路-圆柱壳耦合振动功率流与声辐射特性研究[J]. *中国造船*, 2021, 62(2): 145-153.
Wu J H, Yin Z Y, Sun Y D, et al. Research on vibration power flow and radiated sound of coupled vibration of pipeline and cylindrical shell[J]. *Shipbuilding of China*, 2021, 62(2): 145-153. (in Chinese)
- [6] 白振国,吴文伟,左成魁,等. 有限水深环境圆柱壳声辐射及传播特性[J]. *船舶力学*, 2014, 18(2): 180-192.
Bai Z G, Wu W W, Zuo C K, et al. Sound radiation and spread characteristics of cylindrical shell in finite depth water[J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2014, 18(2): 180-192. (in Chinese)
- [7] Guo Y P. Fluid-loading effects on waves on conical shells[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1995, 97(2): 1061-1066.
- [8] 李天匀,郭文杰,朱翔,等. 水下圆锥壳临界载荷-频率特性分析[J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2015, 36(6): 746-749.
Li T Y, Guo W J, Zhu X, et al. Frequency characteristic analysis of critical loads for a submerged conical shell[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2015, 36(6): 746-749. (in Chinese)
- [9] Irie T, Yamada G, Muramoto Y. Free vibration of joined conical-cylindrical shells[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1984, 95(1): 31-39.
- [10] Su Z, Jin G Y. Vibration analysis of coupled conical-cylindrical-spherical shells using a Fourier spectral element method[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2016, 140(5): 3925-3940.
- [11] 瞿叶高,华宏星,孟光,等. 基于区域分解的圆锥壳-圆柱壳-圆锥壳组合结构自由振动[J]. *振动与冲击*, 2012, 031(22): 1-7.
Ju Y G, Hua H X, Meng G, et al. A domain decomposition method for free vibration analysis of a joined conical-cylindrical-conical shell[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, 031(22): 1-7. (in Chinese)
- [12] 邓乃旗,陈美霞,谢坤,等. 水中环肋锥柱结合壳的振动特性分析[J]. *中国造船*, 2015(1): 122-131.
Deng N Q, Chen M X, Xie K, et al. Vibration analysis of a ring-stiffened cone-cylinder combined shell submerged in water[J]. *Shipbuilding of China*, 2015(1): 122-131. (in Chinese)
- [13] Caresta M, Kessissoglou N J. Acoustic signature of a submarine hull under harmonic excitation[J]. *Applied Acoustics*, 2010, 71(1): 17-31.

- [14] 王 鹏, 李天匀, 朱 翔, 等. 有限潜深状态下圆柱壳固有振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2017, 36(15): 146–151.
Wang P, Li T Y, Zhu X, et al. Natural vibration characteristics analysis for an immersed cylindrical shell with a limited diving depth[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(15): 146–151. (in Chinese)
- [15] Leissa A W. Vibration of shells[M]. DC: NASA SP-288, 1973.
- [16] Monterrubio L E. Free vibration of shallow shells using the Rayleigh-Ritz method and penalty parameters[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2009, 223(10): 2263–2272.
- [17] Jeffrey A. Handbook of mathematical formulas and integrals[J]. American Journal of Physics, 1995, 64(3): 350–351.
- [18] Soenarko B. A boundary element formulation for radiation of acoustic waves from axisymmetric bodies with arbitrary boundary conditions[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1993, 93(2): 631–639.
- [19] Gottlieb D, Orszag S A. Numerical analysis of spectral methods: Theory and applications[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977.