

文章编号: 1007-7294(2025)04-0610-09

船舶结构 NURBS 等几何参数化水平集 拓扑优化方法

汪雪良^{1,2}, 陈 帅^{1,2}, 刘 辉³, 张世林⁴, 李政杰^{1,2}, 李 飞^{1,2},
赵 南^{1,2}, 祝雪峰^{4,5}

(1. 中国船舶科学研究中心, 江苏 无锡 214082; 2. 深海技术科学太湖实验室, 江苏 无锡 214082;
3. 武汉大学 土木建筑工程学院, 武汉 430072; 4. 大连理工大学 运载工程与力学学部, 辽宁 大连
116024; 5. 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 针对复杂船舶结构“几何建模-结构分析-优化设计”相互割裂, 交互繁琐低效, 以及传统拓扑优化方法难于实现 CAD 和 CAE 无缝融合等问题, 本文提出基于非均匀有理 B 样条 (NURBS) 的等几何参数化水平集结构拓扑优化方法, 并用于二维和三维拓扑优化。对于三维复杂结构, 将船舶结构数模浸入到三变量 NURBS 三维实体结构中, 然后通过光线追踪算法来快速确定设计域、边界和载荷施加区域的相关单元、控制点等几何信息, 进而建立基于 NURBS 和浸入方法的等几何参数化水平集拓扑优化方法。该方法克服了传统的等几何拓扑优化受限于规则 NURBS 拓扑的限制, 可处理复杂 CAD 模型。数值算例表明相较于传统的等几何 SIMP 方法, 该算法计算效率可提升 30% 以上。

关键词: 等几何分析; 拓扑优化; 参数化水平集; NURBS; 船舶结构

中图分类号: TP391.41 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.1007-7294.2025.04.009

Topology optimization of NURBS-based isogeometric parameterized level set for complex ship structures

WANG Xue-liang^{1,2}, CHEN Shuai^{1,2}, LIU Hui³, ZHANG Shi-lin⁴, LI Zheng-jie^{1,2},
LI Fei^{1,2}, ZHAO Nan^{1,2}, ZHU Xue-feng^{4,5}

(1. China Ship Scientific Research Center, Wuxi 214082, China; 2. Taihu Laboratory of Deepsea Technology Science, Wuxi 214082, China; 3. School of Civil Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China; 4. Faculty of Vehicle Engineering and Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 5. State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, Dalian 116024, China)

Abstract: In this paper, a NURBS-based geometric parametric level set topology optimization method is proposed to address the challenges faced by the traditional topology optimization method in seamlessly integrating CAD and CAE and dealing with the fragmentation between geometric modeling, structural analysis, and optimization design for complex ship structures. Firstly, the ship structure is immersed in a three-variable NURBS 3D solid structure. Then, a ray-tracing-algorithm is employed to quickly determine the

收稿日期: 2024-10-19

基金项目: 国家重点研发计划项目(2024YFE0104300; 2021YFB3300601; 2021YFC2802300); 船舶总体性能创新研究
开放基金(12322204)

作者简介: 汪雪良(1977-), 男, 博士, 研究员; 陈 帅(1996-), 男, 硕士, 工程师;

刘 辉(1985-), 男, 博士, 副教授, 博士生导师;

祝雪峰(1979-), 男, 博士, 副教授, 博士生导师, 通讯作者, E-mail: xuefeng@dlut.edu.cn.

relevant geometric information of the design domain, boundary, and load application area, such as units and control points, in order to establish the NURBS-based geometric parametric level set topology optimization method. By this method, the limitations of traditional NURBS-based topology optimization, which is restricted by regular NURBS topology, are overcome. The method can handle any complex CAD model. It is demonstrated through numerical examples that the computational efficiency of the algorithm can be improved by more than 30% compared to the traditional geometric SIMP method.

Key words: isogeometric analysis; topology optimization; parameterized level set; NURBS; complex ship structure

0 引言

传统拓扑优化方法,不论是隐式方法(如 SIMP, ESO, LSM 等^[1])还是显式方法(如 MMC/MMV, 几何映射法等^[2-3]),均采用有限元分析方法对结构进行分析,但有限元的低阶形函数会导致数值不稳定及计算精度低等问题。此外,复杂结构在进行拓扑优化之前还需花费大量时间来划分网格。因此,亟需发展高效、高精度、以及可处理复杂结构的新型拓扑优化方法。近年来,基于等几何分析的拓扑优化方法成为结构优化领域研究热点,该方法采用 NURBS 或 T 样条等高阶连续的基函数来离散求解微分方程,具有较高的计算精度^[4-5],且能够克服传统优化方法无法实现“几何建模-结构分析-优化设计”之间无缝融合的缺陷。

基于上述情形,国内外学者开始研究基于等几何分析的拓扑优化方法, Jahangiry 等^[6-7]提出了二维等几何水平集拓扑优化方法; Dijk 和王曦等^[8-9]提出三维等几何参数化水平集拓扑优化方法; 王选等^[10]提出了基于 NURBS 插值的三维渐进结构优化方法; Zhang 等^[11]提出了基于 MMV 的显式等几何拓扑优化方法; Hou^[12]提出了基于 MMC 的显式等几何拓扑优化方法; 刘宏亮等^[13]提出了等几何应力约束水平集拓扑优化方法,考虑了实际问题中应力水平的限制,以避免应力集中或应力过高导致的结构断裂和疲劳破坏等现象。

虽然已有学者将传统的拓扑优化方法用等几何分析方法实现,但由于 NURBS 基函数不能局部加密的缺点,仍局限于处理规则拓扑结构,难于处理复杂的工程结构。鉴于此,本文提出一种基于浸入思想的 NURBS 等几何参数化水平集拓扑优化方法,该方法克服了等几何拓扑优化方法中不能局部加密的问题,因而可处理复杂 CAD 模型。

1 非均匀有理 B 样条理论

在等几何分析中,由 B 样条构造非均匀有理 B 样条(NURBS)是数值离散化的常用方法。由 n 个样条基函数组成的节点向量 $\boldsymbol{\eta}$, 是表示曲线参数坐标的非递减实数序列:

$$\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n+p+1}\} \quad (1)$$

式中, p 是 B 样条的阶数。样条参数定义域总区间 $[\eta_1, \eta_{n+p+1}]$, 其中 $[\eta_i, \eta_{i+1}]$ 为节点区间。给定一个节点向量, B 样条基函数按照 Cox-de Boor 公式递归定义。

对于零阶($p=0$),

$$B_{i,p}(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \eta_i \leq \eta \leq \eta_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

对于非零阶($p>0$),

$$B_{i,p}(\eta) = \frac{\eta - \eta_i}{\eta_{i+p} - \eta_i} B_{i,p-1}(\eta) + \frac{\eta_{i+p+1} - \eta}{\eta_{i+p+1} - \eta_{i+1}} B_{i+1,p-1}(\eta) \quad (3)$$

基于张量积形式,构造二维 B 样条基函数为

$$B_{i,p}^{j,q}(\eta, \zeta) = B_{i,p}(\eta) B_{j,q}(\zeta) \quad (4)$$

其中, $B_{i,p}(\eta)$ 和 $B_{j,q}(\zeta)$ 分别为对应于节点向量 $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n+p+1}\}$ 和 $H = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{m+q+1}\}$ 的 p 阶和 q 阶

的单变量 B 样条基函数。NURBS 基函数是从 B 样条中通过赋予每个基函数一个正权值 w_i 来获得的:

$$N_{i,p}(\eta) = \frac{B_{i,p}(\eta)w_i}{\sum_{j=1}^n B_{j,p}(\eta)w_j} \quad (5)$$

通过张量积公式, 构造二维 NURBS 基函数为

$$N_{i,p}^{j,q}(\eta, \zeta) = \frac{B_{i,p}(\eta)B_{j,q}(\zeta)w_{i,j}}{\sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^m B_{k,p}(\eta)B_{t,q}(\zeta)w_{k,t}} \quad (6)$$

式中, $w_{i,j}$ 是对应于张量积 $B_{i,p}(\eta)B_{j,q}(\zeta)$ 的权重值。

2 水平集拓扑优化方法

在水平集方法中, 结构边界 $\partial\Omega$ 隐式表示为高一维水平集函数 $\Phi(x, t)$ 的零水平集, 它是 Lipschitz 连续的, 其中 t 是伪时间。在参考域 $D \subset \mathbb{R}^d$ ($d=2$ 或 3) 上定义水平集函数 $\Phi(x, t)$, 用水平集表示的二维模型如图 1 所示。结构水平集的数学表达式为

$$\begin{cases} \Phi(x, t) > 0 \Leftrightarrow x \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \Phi(x, t) = 0 \Leftrightarrow x \in \Gamma \\ \Phi(x, t) < 0 \Leftrightarrow x \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (7)$$

水平集函数 $\Phi(x, t)$ 对伪时间 t 求导, 得到 Hamilton-Jacobi 方程:

$$\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} - v_n |\nabla \Phi(x, t)| = 0 \quad (8)$$

且 $\Phi(x, t) = \Phi_0(x)$

式中, 法向速度 $v_n = (\partial x / \partial t) \cdot (\nabla \Phi / |\nabla \Phi|)$ 是初始水平集函数。求解 Hamilton-Jacobi 偏微分方程, 使边界沿法线方向移动。

3 基于 NURBS 的等几何参数化水平集拓扑优化方法

在传统的水平集方法中, 水平集模型数学上通常表示为 Hamilton-Jacobi 偏微分方程。然而, 求解 Hamilton-Jacobi 方程是困难和耗时的。为了解决这个问题, 可采用参数化水平集方法, 也就是将 Hamilton-Jacobi 问题转换为常微分方程。有几种不同的插值函数可用于此参数化, 例如, 线性 B 样条基函数、全局支撑径向基函数和紧支撑径向基函数。这些方法都是基于设计域中的插值点, 由于控制点不一定在设计域中, 因此不适用于等几何插值。在基于 NURBS 的参数化水平集方法中, 可以将原始偏微分方程转换为一组更易于数值求解的常微分方程。该方法的核心思想是使用 NURBS 基函数(而不是插值)以参数化方式表示水平集函数:

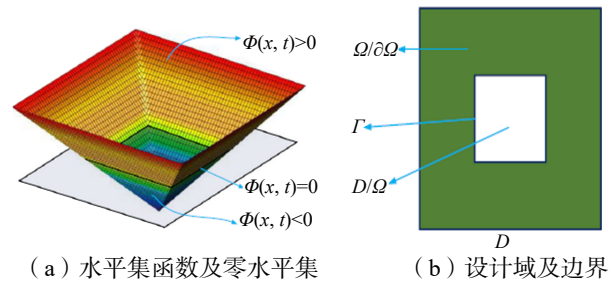
$$\Phi(x, t) = N(x)^T \varphi(t) = \sum_i N_i(x) \varphi_i(t) \quad (9)$$

式中, $\varphi_i(t)$ 是与第 i 个格点相关的扩充系数, $N_i(x)$ 为 NURBS 对应的基函数。参数化后, 空间和时间相关的水平集函数被分为空间相关项 $N_i(x)$ 和时间相关项 $\varphi_i(t)$, 并且在优化过程中仅更新后者。将式(9)代入式(8), Hamilton-Jacobi 偏微分方程改写为

$$N(x)^T \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} - v_n |(\nabla N(x))^T \varphi(t)| = 0 \quad (10)$$

式中, v_n 是扩充系数对时间的导数, 即

$$v_n = \frac{N(x)^T}{|(\nabla N(x))^T \varphi(t)|} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} \quad (11)$$



(a) 水平集函数及零水平集

(b) 设计域及边界

图 1 二维设计域及水平集模型

Fig.1 Two-dimensional design domain and level set model

采用参数坐标 η 和 ζ ，利用控制点对设计域的水平集函数进行插值，式(9)可表示为

$$\phi(x, t) = \phi(x(\eta, \zeta), t) = \sum_i N_i(\eta, \zeta) \phi_i(t) \quad (12)$$

式中， $N_i(\eta, \zeta)$ 是影响 (η, ζ) 的第 i 个控制点的基函数。与传统有限元方法相比，等几何分析的 NURBS 基函数指的是控制点而不是节点，不像拉格朗日有限元基函数那样具有插值性。两者对应为不同二次形式的空间离散化如图 2 所示，可以看出，在等几何分析中，自由度数量要小得多，且影响一个单元的控制点不一定在单元域内，也可能在问题域外。

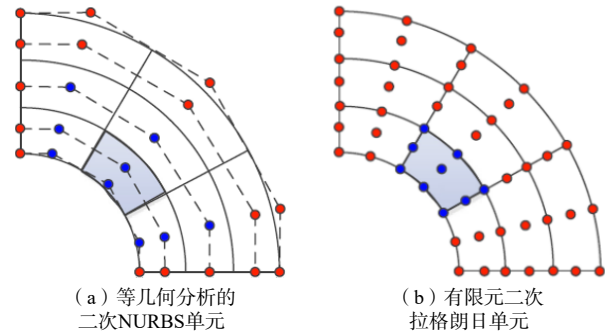


图 2 四分之一圆环模型的等几何分析和有限元空间离散
Fig.2 Spatial discretization of the quarter-ring model for isogeometric and finite element units respectively

基于 NURBS 参数化的最小柔顺性优化问题的流程如图 3 所示。虚线内的方框表示循环中的主要步骤，当两次迭代之间目标函数的变化小于指定的容差时，即获得最优拓扑。

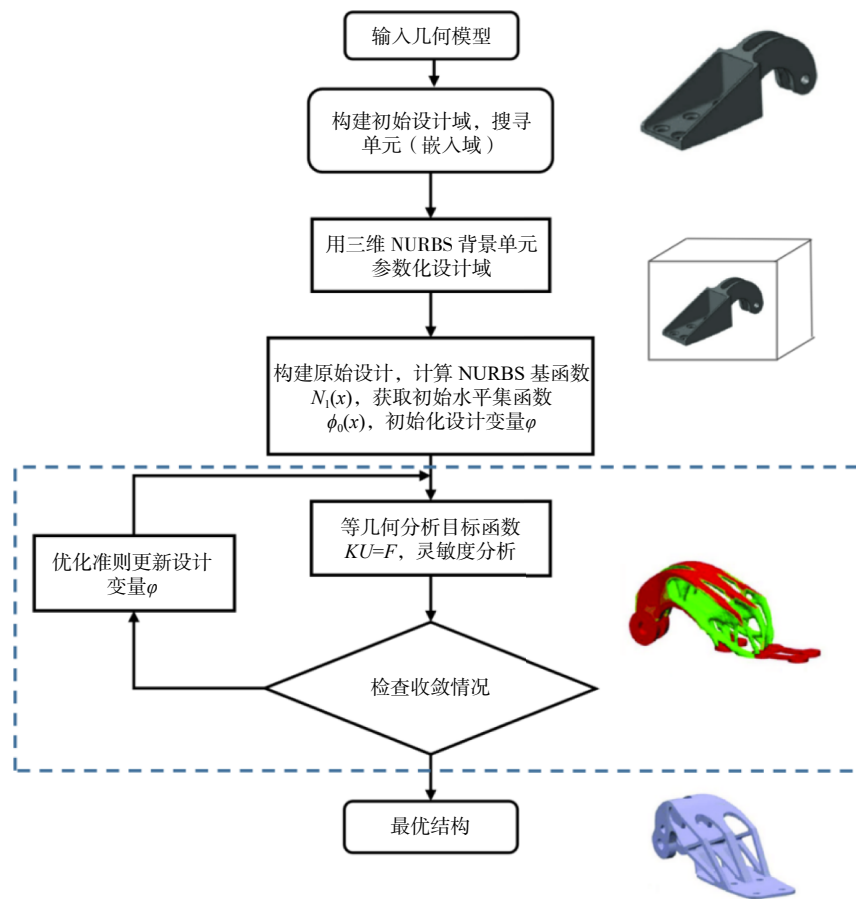


图 3 等几何水平集拓扑优化分析流程
Fig.3 Flow chart of topology optimization analysis of isogeometric level set method

4 数值算例

为了证明基于等几何的水平集拓扑优化的性能，本章给出了 2 个平面问题算例和 2 个三维问题算

例。在除了最后一个算例外的其余算例中,弹性模量和泊松比分别设定为 1 Pa 和 0.3。假设点荷载大小为 $P=1$ N。Heaviside 函数的近似宽度被认为是 $\Delta = 0.2 \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, 其中 Δx 和 Δy 分别是 x 和 y 方向上的控制点距离。此外,松弛参数为 $\epsilon=0.01$ 。时间步长被认为是 $\Delta t = \frac{\beta \Delta x}{|v_{\max}|}$, 其中 v_{\max} 是边界上的最大速度, β 是调整收敛速度的移动极限因子,并且在所有算例中都设置为 0.3。

算例 1: 如图 4 所示,采用上述算法研究在端部中心承受点荷载的悬臂梁的拓扑优化问题,其目标函数为柔顺度最小化。 L/H 等于 2, 其中 $L=5$ m, $H=2.5$ m。为了离散设计域,使用了一个具有 1326 个控制点的 NURBS 面片, NURBS 基函数的阶数为 2 阶。对于两个方向,表示物体的节点向量为 $\eta = \{0, 0, 0, 0.0204, \dots, 0.9796, 1, 1, 1\}$ 和 $\xi = \{0, 0, 0, 0.0416, \dots, 0.9583, 1, 1, 1\}$, 体积分数取 45%。图 5 表示初始拓扑结构,图 6 为其所对应的三维水平集函数,图 7 为优化后的平面拓扑结构。

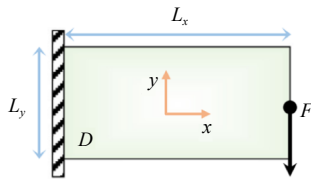


图 4 二维等几何 NURBS 参数化水平集拓扑优化 (算例 1)
Fig.4 Topology optimization of 2D isogeometric NURBS parameterized level set for Example 1

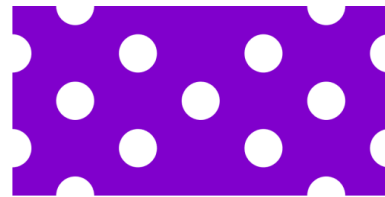


图 5 初始平面拓扑结构 (算例 1)
Fig.5 Initial 2D topology for Example 1

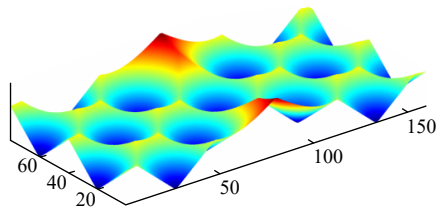


图 6 初始拓扑结构对应的水平集函数 (算例 1)
Fig.6 Level-set function corresponding to the initial topology



图 7 优化后平面拓扑结构 (算例 1)
Fig.7 Plane topology after optimization for Example 1

算例 2: 在这个例子中,研究了所提出的方法在曲线设计域(四分之一环)中获得最佳拓扑的能力,目标函数仍是柔顺度最小,如图 8 所示。在四分之一环的底部进行固定约束,在顶部施加一个载荷,在一定材料量下寻求刚度最大化的结构。用一个具有 861 个控制点 NURBS 面片离散设计域,其中 NURBS 基函数的阶数为 2 阶,在两个方向上,所采用的等间距节点向量为 $\eta = \{0, 0, 0, 0.0256, \dots, 0.949, 1, 1, 1\}$ 和 $\xi = \{0, 0, 0, 0.0526, \dots, 0.947, 1, 1, 1\}$, 体积分数定为 35%。图 9 表示初始拓扑结构,图 10 为其所对应的三维水平集函数,图 11 为算例 2 优化后的最优拓扑结构,图 12 表示最优结构对应的三维水平集函数。

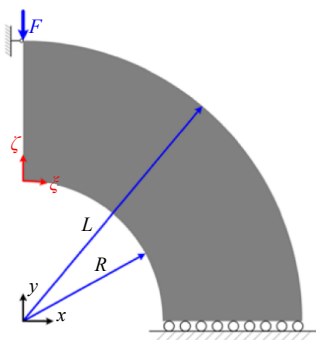


图 8 二维等几何 NURBS 参数化水平集拓扑优化 (算例 2)
Fig.8 Topology optimization of 2D isogeometric NURBS parameterized level-sets for Example 2



图 9 初始平面拓扑结构 (算例 2)
Fig.9 Initial topology for Example 2

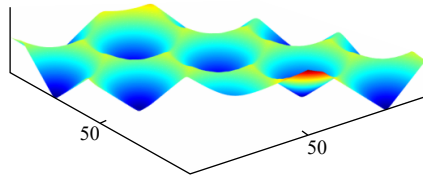


图 10 初始拓扑结构对应的水平集函数 (算例 2)
Fig.10 Level-set function corresponding to the initial topology for Example 2



图 11 优化后的最优拓扑结构 (算例 2)
Fig.11 Optimal topology after optimization for Example 2

算例 3: 设计域如图 13 所示, 在一个 3 维悬臂梁的末端中心施加一个载荷, 寻求在一定材料量下刚度最大化的结构。该设计域被划分为 $32 \times 8 \times 16$ 个 NURBS 单元, NURBS 基函数阶数为 2 阶, 体积分数设置为 35%, 其中 3 个方向的等距节点向量为 $\eta = \{0, 0, 0, 0.0204, \dots, 0.9796, 1, 1, 1\}$, $\xi = \{0, 0, 0, 0.0416, \dots, 0.9583, 1, 1, 1\}$, $\zeta = \{0, 0, 0, 0.0523, \dots, 0.9126, 1, 1, 1\}$, 图 14 为算例 3 的 NURBS 水平集拓扑优化结构。

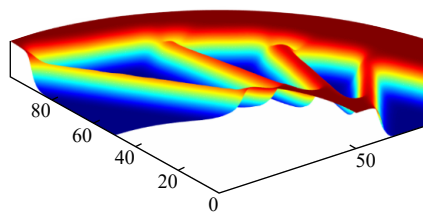


图 12 优化后拓扑结构对应的三维水平集函数 (算例 2)
Fig.12 3D level-set function corresponding to the optimized topology for Example 2

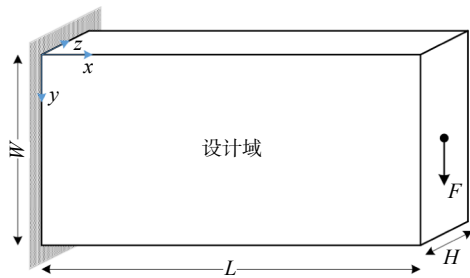


图 13 三维等几何 NURBS 参数化水平集拓扑优化 (算例 3)
Fig.13 Topology optimization of 3D isogeometric NURBS parameterized level-sets for Example 3

表 1 表示本文方法所得结果与有限元水平集拓扑优化方法的对比情况。在约束载荷设置相同的情况下, 等几何水平集拓扑优化方法相较于传统水平集方法, 达到同等优化结果时所需的自由度更少, 耗时更短, 效率提升约 30% 以上。

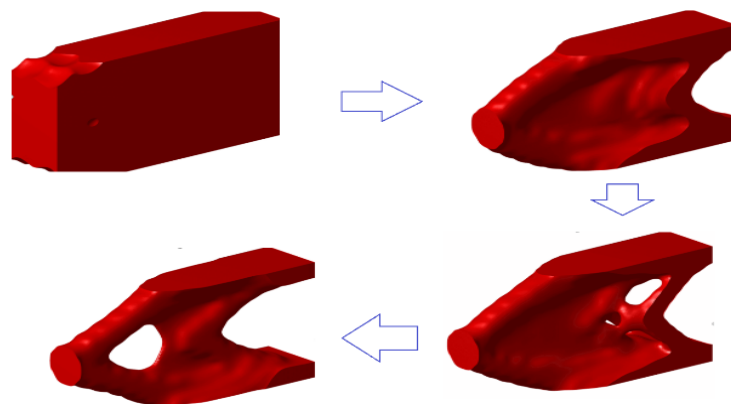


图 14 三维等几何 NURBS 水平集拓扑优化结果 (算例 3)
Fig.14 Topology optimization results of 3D isogeometric NURBS level set

表 1 同等自由度下等几何水平集拓扑优化和有限元水平集拓扑优化效率对比

Tab.1 Comparison of topology optimization efficiencies between isogeometric level-set and finite element level-set with the same degree of freedom

方法	自由度	耗时/s	柔顺度	迭代步数
等几何 (IGA)	12 158	31	91	112
有限元 (FEA)	13 761	52	91	198

算例 4: 该算例聚焦于某三体船舱段结构的连接桥的优化设计。如图 15 所示, 此三体船舱段上部共有 2 个连接桥结构, 其中连接桥被设置为设计域, 边界条件施加于片体。取连接桥设计域的二分之一部分进行拓扑优化设计, 设计目标函数是刚度最大化, 材料属性如表 2 所示。

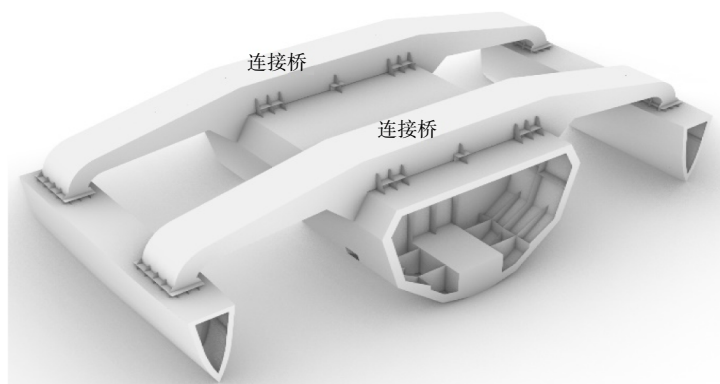


图 15 三体船舱段结构连接桥示意图

Fig.15 Schematic diagram of connection bridge in trimaran cabin structure

表 2 船体材料属性

Tab.2 Material properties of the ship

材料型号	弹性模量 /MPa	泊松比	σ_m /MPa	$\sigma_{p0.2}$ /MPa	σ_{sw} /MPa
5083-H116	7000	0.3	305	215	125

由于设计域是非规则形状, 我们需要将其浸入到一个三变量 NURBS 背景样条网格中, 通过光线追踪算法提取与设计域相交的单元和控制点。如图 16 所示, 该模型被浸入到一个三变量 NURBS 背景样条网格中。根据船舶结构规范进行设计, 在船体与水面接触区域施加总横中垂剪力 1681.94 kN, 将主船体舱段两个侧面固定。图 17 表示三维嵌入域结构二分之一连接桥控制点, 蓝色控制点是连接桥设计域激活控制点, 红色部分是下方非设计域控制点。

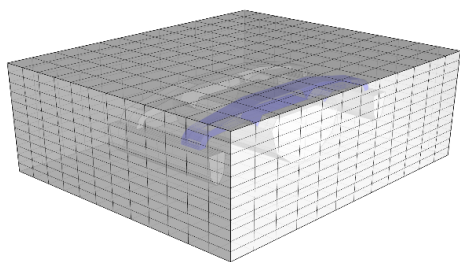


图 16 用于参数化和计算的背景 NURBS 样条网格

Fig.16 Background NURBS spline grid for parameterization and calculation

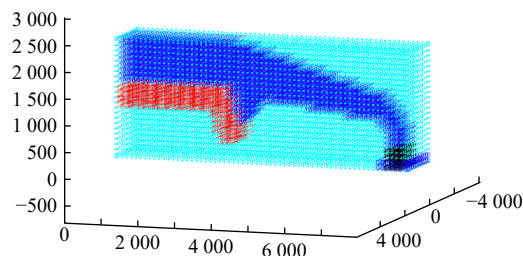


图 17 二分之一连接桥控制点 (蓝色控制点是连接桥设计域激活控制点, 红色部分是下方非设计域控制点)

Fig.17 Control points for half connection bridge (The blue area denotes the active control points of the bridge design domain, and the red part represents control points in lower non-design domain)

图 18 表示优化后连接桥的最优拓扑结构,图 19 表示重构后连接桥结构和整体三体船模型。根据计算结果,刚度较未优化模型提升了 56%。

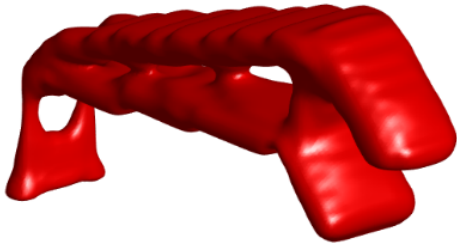


图 18 二分之一连接桥优化后的拓扑结果
Fig.18 Topology of half bridge after optimization

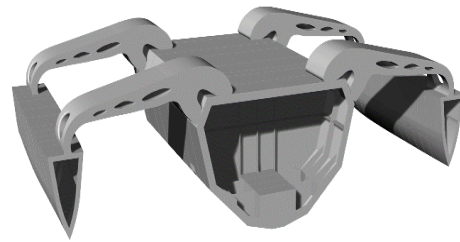


图 19 重构后含四个连接桥的整体 CAD 模型
Fig.19 Overall CAD model with four bridges after reconstruction

5 结 语

在本文中,等几何分析(IGA)被用于水平集拓扑优化中,使用 NURBS 基函数对水平集函数进行参数化,NURBS 基函数也用于分析,将水平集函数的控制点作为优化问题的设计变量,通过求解 Hamilton-Jacobi 方程来更新相应的控制网格。本文方法能够在一定的材料量下找到刚度最大化的结构,在避免应力集中的情况下找到重量最小的方案。相对于基于有限元的方法,本文提出的方法能使用更少的离散化点和设计变量来获得平滑且明确定义的边界,该方法继承了 IGA 的优点,相同精度下计算效率更高。后续我们将基于层次截断 THB 样条来研究可局部加密的复杂结构等几何参数化水平集方法,并将其用于复杂船舶结构轻量化拓扑优化中。

参 考 文 献:

- [1] Sigmund O, Maute K. Topology optimization approaches: A comparative review[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, 48(6).
- [2] Zhang W, Yuan J, Zhang J, et al. A new topology optimization approach based on Moving Morphable Components (MMC) and the ersatz material model[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, 53.
- [3] Norato J A, Bell B K, Tortorelli D A. A geometry projection method for continuum-based topology optimization with discrete elements[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, 293: 306–327.
- [4] 刘宏亮, 祝雪峰, 杨迪雄. 基于等几何分析的结构优化设计研究进展[J]. *固体力学学报*, 2018, 39(3): 20.
Liu H L, Zhu X F, Yang D X. Research progress of structure optimization design based on isogeometric analysis[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2018, 39(3): 20.
- [5] 李丁丁, 张维声, 郭旭, 等. 基于等几何分析剪裁技术的显式结构拓扑优化[C]//2018年全国固体力学学术会议, 2018.
Li D D, Zhang W H, Guo X, et al. Explicit structure topology optimization based on isogeometric analysis and tailoring technology[C]//National Conference on Solid Mechanics, 2018.
- [6] Jahangiry H A, Tavakkoli S M. An isogeometrical approach to structural level set topology optimization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 319.
- [7] Jahangiry H A, Gholhaki M, Naderpour H, et al. Isogeometric level set topology optimization for elastoplastic plane stress problems[J]. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2021, 17(2): 947–967.
- [8] Dijk N P, Maute K, Langelaar M, et al. Level-set methods for structural topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, 48(3): 437–472.
- [9] 王曦, 赵重年, 李昊天, 等. 几种主要拓扑优化建模方法的分析对比及展望[J]. *装备制造技术*, 2019(2): 4.

- Wang X, Zhao C N, Li T H, et al. Analysis, comparison and prospect of several main topology optimization modeling methods[J]. *Equipment Manufacturing Technology*, 2019(2): 4.
- [10] 王 选, 祝雪峰, 胡 平, 等. 基于 NURBS 插值的三维渐进结构优化方法[J]. *计算力学学报*, 2016, 33(4): 7.
Wang X, Zhu X F, Hu P, et al. 3D progressive structure optimization method based on NURBS interpolation[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, 33(4): 7.
- [11] Zhang W, Li D, Kang P, et al. Explicit topology optimization using IGA-based moving morphable void (MMV) approach[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 360: 112685.
- [12] Hou W, Gai Y, Zhu X, et al. Explicit isogeometric topology optimization using moving morphable components[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 326: 694–712.
- [13] 刘宏亮, 杨迪雄. 基于 IGA-SIMP 法的连续体结构应力约束拓扑优化[J]. *计算力学学报*, 2018, 35(2): 8.
Liu H L, Yang D X. Stress-constrained topology optimization of continuum structures based on IGA-SIMP method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2018, 35(2): 8.