

文章编号: 1007-7294(2024)05-0748-12

# 围缘扁钢加强的开圆孔无限平板应力解析算法

王小明, 王红旭

(中国舰船研究设计中心, 武汉 430064)

**摘要:** 为了研究围缘扁钢加强的开圆孔无限平板应力解析计算方法, 近似认为围缘扁钢区域的平均应力处于广义平面应力状态。运用复变函数论的方法, 将应力函数表示为两个待定的解析函数; 列出围缘扁钢的边界条件、围缘扁钢与平板之间的应力连接条件和位移连接条件, 求出应力函数, 根据求出的应力函数便可求出应力。为了描述围缘扁钢减缓孔口应力集中的效果, 提出围缘扁钢加强系数的定义。算例计算表明: 本文提出的解析算法计算结果与有限元法计算结果吻合良好, 围缘扁钢加强的开圆孔无限平板应力普遍小于开圆孔无限平板应力, 围缘扁钢加强效果明显; 相同体积的加强构件, 围缘扁钢的加强效果优于环形加厚板。

**关键词:** 应力集中; 开孔加强板; 复变函数论方法; 应力解析算法; 加强系数

**中图分类号:** O348 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.1007-7294.2024.05.011

## Analytical calculation method of stress for circular holed infinite plate reinforced with rim bar

WANG Xiao-ming, WANG Hong-xu

(China Ship Development and Design Center, Wuhan 430064, China)

**Abstract:** In order to investigate the analytical calculation method of stress for circular holed infinite plate reinforced with rim bar, the average stress of rim bar region was regarded in the generalized plane stress state approximately and stress function was expressed as two undetermined holomorphic complex functions by complex analysis method in elasticity. The stress function as well as stress was solved through rim bar boundary condition, stress and displacement connection condition between rim bar and panel. Reinforcement coefficient of rim bar was proposed to describe the effect of the rim bar on alleviating stress concentration. Calculation examples demonstrate that the evaluation results of this proposed method have a good agreement with those of FEM, and that the reinforcement effect of the rim bar is obvious since the stress of circular holed infinite plate with rim bar is less than that of infinite plate absent of rim bar generally. Rim bar reinforcement effect is superior to annular additional thick plate in the case of maintaining the same volume of reinforcement components.

**Key words:** stress concentration; holed panel with reinforcement; complex variable function theory method; analytic calculation method of stress; reinforcement coefficient

## 0 引言

在船舶甲板和舱壁上会经常开设各种大小的孔口, 如人孔、减轻孔、梯孔和管路穿越孔等。这些

收稿日期: 2023-11-21

基金项目: 中国船舶重工集团联合基金项目(\*\*\*1B04010101)

作者简介: 王小明(1981-), 男, 博士, 高级工程师, 通讯作者, E-mail: wangxiaoming2001@126.com。

开孔的出现,将导致孔口附近应力集中,削弱船体结构强度。于是人们就想方设法地补强开口附近的结构,常见的方法有在开口附近增加加强筋、在开口附近采用加厚板和在开口边缘焊接围缘扁钢。其实,在开口附近采用环形加厚板与在开口边缘焊接围缘扁钢的效果是相似的。众所周知,单向均匀拉伸(压缩)作用下,圆形开孔无限平板的应力集中系数是3。人们自然非常关心开孔板加强之后的应力集中系数,即焊接围缘扁钢或采用环形加厚板之后的应力集中系数。船舶甲板在总纵弯曲作用下,或者受拉,或者受压,它受的拉伸或压缩未必是均匀的,但是,在一个舱室内或10倍孔径范围内,我们可以近似认为均匀拉伸,因为总纵弯矩沿船长方向变化是连续的。孔口的应力集中系数的计算其实质是孔口附近应力的计算,需要研究围缘扁钢加强的开孔无限平板应力的计算方法,这对船舶结构设计是具有实用价值的。

开孔板应力计算方法在上个世纪一直是个研究热点,涌现出了许多研究成果,其中最为著名的是两本专著,分别是前苏联科学家 Muskhelishvili<sup>[1]</sup>撰写的《Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity》和前苏联学者 Savin<sup>[2]</sup>发表的《Stress Concentration around Holes》。近年来,各向同性材料孔口应力计算方法的研究中有四类研究热点:(1) 各种不同开孔形状的平板在单向(或双向)均匀拉伸作用下的应力计算方法,比如研究岩石的学者<sup>[3-8]</sup>应用共形映射的方法研究岩石裂纹的演化过程;(2) 开孔无限平板在不同载荷下的应力计算方法,如 Sharma<sup>[9-10]</sup>采用 Muskhelishvili 复变函数的方法,结合柯西积分提出了多边形、摆线形开孔无限平板受任意平面力下的应力计算方法,还有 Lu 等<sup>[11]</sup>研究了椭圆开孔板上同时作用单向均匀拉力和集中力状态下的应力计算方法;(3) 多孔无限平板单向(双向)均匀拉伸下的应力计算方法,如 Kumari 等<sup>[12]</sup>用双极坐标的方法研究了开双圆孔的无限平板在纵向、横向和双向均匀拉伸下的应力计算方法, Lu、Zeng 等<sup>[13-14]</sup>采用复变函数的方法推导出均匀拉伸、剪切和孔边外力作用下的开双孔(椭圆孔或圆形孔)无限平板的应力计算方法;(4) 开孔有限平板单向(双向)均匀拉伸下的应力计算方法,如潘祖兴<sup>[15-17]</sup>提出了一种新的求解含任意开孔形状有限板的平面应力分布问题和弯曲应力分布问题的半解析方法;此外,以船舶上的开口为契机,宋竞正等<sup>[18]</sup>运用复变函数论方法推演了非圆形孔口无限平板的应力计算公式。上述孔口的加强方式除了在孔边缘焊接扁钢外,也可以是在前面提到的在开孔附近增加加强筋,即在孔的两侧沿受拉(或受压)方向加设纵向加强筋,还可以是在孔附近贴一块覆板。对于这3种加强方式, Cheng 等<sup>[19]</sup>采用数值仿真计算,以及试验验证的方式研究了不同加强方式的开孔板和无加强开孔板的应力集中系数、弹塑性极限强度的变化规律。相比之下,围缘扁钢加强的开孔无限平板应力解析计算方法的文献非常匮乏。船舶上的开孔不仅有圆形开孔,还有方形开孔和椭圆形开孔等,这些开孔的加强方式都可以在孔口周围焊接围缘扁钢,而围缘扁钢加强的圆形开孔无限平板的应力解析算法,是其他形状开孔平板应力计算方法的基础,因为一旦圆形开孔无限平板应力计算问题解决了,其他形状的开孔应力计算问题都可以运用共形映射的数学工具得到解决,即可以把非圆形开孔通过映射函数转换成圆形开孔,围缘扁钢的形状也同步映射转换,在映射平面把问题解决后再返回到物理平面,达到解决实际问题的目的。因此,本文将研究围缘扁钢加强的开圆孔无限平板应力解析计算方法。

# 1 围缘扁钢加强的开圆孔无限平板应力

## 1.1 开圆孔无限平板应力函数

如图1所示,无限平板中心位置开设一半径为 $r$ 的圆孔,板受单向拉伸,无限远处拉应力为 $p$ ,与 $x$ 轴平行。关于这一问题的应力集中求解方法很成熟,可以采用极坐标方法,也可以采用 Muskhelishvili 提出的复变函数方法,用柯西积分的常规推导过程在文献[1]、[2]和[20]中都有详细阐述,这里提出一种简便推导方法,同时也为后面的应用提供基础。

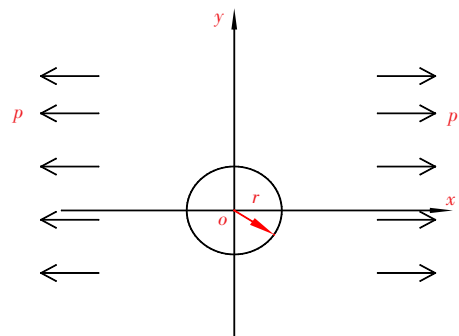


图1 开孔无限平板

Fig.1 Infinite plate with a hole

用复变函数求解平面应力问题归结为求解两个解析函数  $\phi_0(z)$  和  $\psi_0(z)$ 。

对于图1的开孔应力集中问题,可以假设  $\phi_0(z)$  和  $\psi_0(z)$  有以下形式:

$$\phi_0(z) = \frac{1}{4}pz + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{-n}}{z^n} \tag{1}$$

$$\psi_0(z) = -\frac{r^2}{z} \phi_0'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{-n}}{z^n} - \frac{1}{2}pz \tag{2}$$

式中,  $z$  为复数变量,  $z=x+iy$ ,  $i$  为虚数单位;  $p_{-n}$  和  $q_{-n}$  为洛朗级数的系数。

式(1)、(2)满足无限远处条件,即满足

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (\sigma_y + \sigma_x) = 2 \lim_{z \rightarrow \infty} [\phi_0'(z) + \overline{\phi_0'(z)}] = p \tag{3}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (\sigma_y - \sigma_x + i2\tau_{xy}) = 2 \lim_{z \rightarrow \infty} [\bar{z}\phi_0''(z) + \psi_0'(z)] = -p \tag{4}$$

式中,  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  分别是平板上各点的  $x$  向应力和  $y$  向应力,  $\tau_{xy}$  是平板上作用于  $x$  轴法平面且方向平行于  $y$  轴方向的剪应力,  $\phi_0'(z) = d\phi_0(z)/dz$ ,  $\phi_0''(z) = d^2\phi_0(z)/dz^2$ 。

孔口边缘应力边界条件为

$$\overline{\phi_0(z)} + \bar{z}\phi_0'(z) + \psi_0(z) = 0, |z| = r \tag{5}$$

式中,  $\bar{z} = r^2/z$ 。将式(1)~(2)代入式(5),得

$$\frac{1}{4}p \frac{r^2}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} p_{-n} \frac{z^n}{r^{2n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{-n}}{z^n} - \frac{1}{2}pz = 0 \tag{6}$$

比较式(6)等号两侧  $z^{-k}$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) 的系数,可以求出洛朗级数的系数

$$p_{-1} = pr^2/2, q_{-1} = -pr^2/4 \tag{7}$$

从式(6)还可解出

$$p_{-n} = q_{-n} = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \tag{8}$$

式(7)、(8)代回式(1)、(2),得

$$\phi_0(z) = pz/4 + pr^2/(2z) \tag{9}$$

$$\psi_0(z) = -pz/2 - pr^2/(2z) + pr^4/(2z^3) \tag{10}$$

### 1.2 围缘扁钢加强圆孔边缘后的应力

对于图2所示用围缘扁钢加强的开孔板,将板划分为2个区域,区域1是围缘扁钢所在圆环区域,区域2则是板上除区域1的面积域,区域1和区域2在图2上标识为①和②。

区域②受到面内的均匀拉力,拉应力在厚度方向上不变,因此区域②处于平面应力状态;区域①仅在区域①与区域②交界面的厚度范围内(即图2中厚度  $t$  范围内)受力,因此并非处于严格意义的平面应力状态。引入平均正应力  $\sigma_i$  和平均剪应力  $\tau_{ij}$ ,则可以近似认为,区域①的围缘扁钢处于广义平面应力状态。为了使这种假设不至于导致太大的误差,应保证扁钢高度与平板厚度之比不大于3,这一点已经被文献[21-22]的实验所证实。

$$\sigma_i(x, y) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sigma_{i0}(x, y, Z) dZ \tag{11}$$

$$\tau_{ij}(x, y) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tau_{ij0}(x, y, Z) dZ \tag{12}$$

式中,  $\sigma_{i0}(x, y, Z)$ 、 $\tau_{ij0}(x, y, Z)$  分别是围缘扁钢中各点的真实正应力和真实剪应力;  $Z$  为垂向坐标,使用大写  $Z$  是为了区别于复数  $z$ ;  $T$  为围缘扁钢的高度。

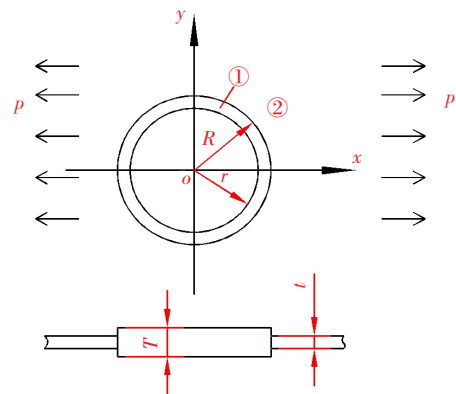


图2 围缘扁钢加强的开孔无限平板  
Fig.2 Infinite plate with a hole reinforced by rim flat bar

区域①是一个圆环区域,则应力函数在区域1上可展开为洛朗级数,表示为

$$\phi_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \tag{13}$$

$$\psi_1(z) = -\frac{r^2}{z} \phi_1'(z) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n \tag{14}$$

区域②是一个带孔的无限区域,则其应力函数也应满足无限远处条件式(3)~(4),则可以设为

$$\phi_2(z) = \frac{1}{4} p z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{-n}}{z^n} \tag{15}$$

$$\psi_2(z) = -\frac{R^2}{z} \phi_2'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{-n}}{z^n} - \frac{1}{2} p z \tag{16}$$

式中,  $a_n, b_n, \alpha_{-n}$  和  $\beta_{-n}$  为洛朗级数的系数。  $r$  也是开孔边缘设置围缘扁钢后的扁钢内半径,  $R$  为围缘扁钢的外半径,如图2所示。

孔边(围缘扁钢上)没有外力作用,应满足自由表面边界条件,即应力为0,

$$\overline{\phi_1(z)} + z\overline{\phi_1'(z)} + \psi_1(z) = 0, \quad (|z| = r) \tag{17}$$

注意到在围缘扁钢的内边界上有  $\bar{z} = r^2/z$ ,把式(13)、(14)代入式(17),有

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{a_n} \frac{r^{2n}}{z^n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n = 0, \quad (|z| = r) \tag{18}$$

由式(18)解出

$$b_n = -\frac{\overline{a_{-n}}}{r^{2n}} \tag{19}$$

区域①和区域②的交界面有应力连接条件和位移连接条件,对于应力结合条件,近似认为

$$T \left[ i \int_L (\bar{X}_1 + i\bar{Y}_1) ds \right] = t \left[ i \int_L (\bar{X}_2 + i\bar{Y}_2) ds \right], \quad (|z| = R) \tag{20}$$

式中,  $\bar{X}_1, \bar{Y}_1$  分别表示交界面上区域①上的  $x$  向平均应力和  $y$  向平均应力,  $\bar{X}_2, \bar{Y}_2$  则分别是交界面上区域②上的  $x$  向应力和  $y$  向应力,  $t$  为平板厚度。

式(20)取共轭即为

$$t \left[ \overline{\phi_2(z)} + z\overline{\phi_2'(z)} + \psi_2(z) \right] = T \left[ \overline{\phi_1(z)} + z\overline{\phi_1'(z)} + \psi_1(z) \right], \quad (|z| = R) \tag{21}$$

令  $s = T/t (1 \leq s \leq 3)$ ,则式(21)成为

$$\overline{\phi_2(z)} + z\overline{\phi_2'(z)} + \psi_2(z) = s \left[ \overline{\phi_1(z)} + z\overline{\phi_1'(z)} + \psi_1(z) \right], \quad (|z| = R) \tag{22}$$

位移结合条件为

$$\bar{u}_1 + i\bar{v}_1 = \bar{u}_2 + i\bar{v}_2, \quad (|z| = R) \tag{23}$$

式中,  $\bar{u}_1, \bar{v}_1$  分别是交界面上区域①上的  $x$  向位移和  $y$  向位移,  $\bar{u}_2, \bar{v}_2$  分别是交界面上区域②上的  $x$  向位移和  $y$  向位移。

平面应力状态下,材料参数  $k = (3 - \mu)/(1 + \mu)$ ,则式(23)取共轭后化为

$$k \overline{\phi_2(z)} - z\overline{\phi_2'(z)} - \psi_2(z) = k \overline{\phi_1(z)} - z\overline{\phi_1'(z)} - \psi_1(z), \quad (|z| = R) \tag{24}$$

式(22)与式(24)相加,得

$$(k + s) \overline{\phi_1(z)} + (s - 1) \left[ z\overline{\phi_1'(z)} + \psi_1(z) \right] = (k + 1) \overline{\phi_2(z)}, \quad (|z| = R) \tag{25}$$

在此式中,  $\bar{z} = R^2/z$ ,式(13)~(16)、(19)代入式(25)有

$$\begin{aligned} (k + 1) \left[ \frac{1}{4} p \frac{R^2}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\alpha_{-n}}}{R^{2n}} z^n \right] &= (k + s) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{a_n} \frac{R^{2n}}{z^n} + \\ (s - 1) (R^2 - r^2) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n + 2) \overline{a_{n+2}} z^n - (s - 1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{a_{-n}} \frac{z^n}{r^{2n}}, & \quad (|z| = R) \end{aligned} \tag{26}$$

式(13)~(16)、(19)代入式(22),得

$$\frac{1}{4} p \frac{R^2}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\alpha_{-n}}}{R^{2n}} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{-n}}{z^n} - \frac{1}{2} p z + s \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{a_{-n}}}{r^{2n}} z^n - (R^2 - r^2) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n+2) a_{n+2} z^n - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{a_n} \frac{R^{2n}}{z^n} \right] = 0, \quad (|z|=R) \quad (27)$$

因为常数项  $a_0$ 、 $b_0$  不影响应力分布,但影响位移分布,则在  $\phi_1(z)$ 、 $\psi_1(z)$  中的常数  $a_0$  和  $b_0 - 2r^2 a_2$  应当满足

$$b_0 - 2r^2 a_2 = \frac{3 - \mu}{1 + \mu} \bar{a}_0 \quad (28)$$

式(26)~(27)取  $z^{-2}$  项系数左右端相等,则解出

$$a_2 = \beta_{-2} = 0, \quad b_{-2} = 0 \quad (29)$$

回到式(19)、式(28)中,不妨设  $a_0 = 0$ 、 $b_0 = 0$ ,正好满足这两个等式。

式(26)~(27)取  $z^2$  项系数和  $z^{-4}$  项的系数,等式两端相等,可以列出方程:

$$\left[ r^4(k+s) - R^4 \right] \overline{a_{-2}} + 4(s-1)(R^2 - r^2) R^4 r^4 a_4 - r^4(k+1) \overline{\alpha_{-2}} = 0 \quad (30)$$

$$s(R^4 - r^4) \overline{a_{-2}} - 4s(R^2 - r^2) R^4 r^4 a_4 + r^4 \overline{\alpha_{-2}} = 0 \quad (31)$$

$$2(s-1)(R^2 - r^2) a_{-2} + [r^8(s-1) - R^8(k+s)] \overline{a_4} = 0 \quad (32)$$

$$2s(R^2 - r^2) \overline{a_{-2}} + s(r^8 - R^8) \overline{a_4} + \beta_{-4} = 0 \quad (33)$$

由式(30)~(33)联立,解出

$$a_{-2} = \alpha_{-2} = 0, \quad a_4 = \beta_{-4} = 0, \quad b_2 = b_{-4} = 0 \quad (34)$$

同样式(26)~(27)中取  $z^{-5}$  项系数和  $z^3$  项系数,等式左右两端相等,同样可以列出方程,解出

$$a_{-3} = a_3 = 0, \quad \beta_{-5} = 0, \quad \alpha_{-3} = 0, \quad b_3 = b_{-5} = 0 \quad (35)$$

再分别取  $z^{-6}$  系数和  $z^4$  系数列出方程,可以求出系数

$$a_{-4} = a_6 = 0, \quad \beta_{-6} = 0, \quad \alpha_{-4} = 0, \quad b_4 = b_{-6} = 0 \quad (36)$$

式(26)~(27)中取  $1/z$  的系数,有

$$\left[ R^2(k+s) - r^2(s-1) \right] \overline{a_1} + (s-1)(R^2 - r^2) a_1 = \frac{pR^2(k+1)}{4} \quad (37)$$

$$s(R^2 - r^2) (\overline{a_1} + a_1) - \beta_{-1} = \frac{1}{4} pR^2 \quad (38)$$

式(37)和式(38)联立,解出

$$a_1 = \frac{(k+1)pR^2}{4[(k+s)R^2 + (R^2 - 2r^2)(s-1)]} \quad (39)$$

$$\beta_{-1} = \frac{pR^2[(2s-1)kR^2 + R^2 - 2r^2(ks+1)]}{4[(k+s)R^2 + (R^2 - 2r^2)(s-1)]} \quad (40)$$

在式(26)~(27)中取  $z$  的系数和  $z^{-3}$  的系数,则可列出方程:

$$\left[ R^2(k+s) - r^2(s-1) \right] \overline{a_{-1}} + 3(s-1)(R^2 - r^2) R^2 r^2 a_3 - r^2(k+1) \overline{\alpha_{-1}} = 0 \quad (41)$$

$$s(R^2 - r^2) \overline{a_{-1}} - 3s(R^2 - r^2) R^2 r^2 a_3 + r^2 \overline{\alpha_{-1}} = \frac{pR^2 r^2}{2} \quad (42)$$

$$(s-1)(R^2 - r^2) \overline{a_{-1}} + (s-1)r^6 a_3 - R^6(k+s) a_3 = 0 \quad (43)$$

$$s(R^2 - r^2) a_{-1} + s(r^6 - R^6) \overline{a_3} + \beta_{-3} = 0 \quad (44)$$

由式(41)~(44)解出

$$a_{-1} = \frac{(k+1)pR^2r^2[r^6(s-1) - R^6(k+s)]}{6(ks+1)(s-1)(R^2-r^2)R^2r^2 + 2[(ks+1)R^2 - kr^2(s-1)][r^6(s-1) - R^6(k+s)]} \quad (45)$$

$$a_3 = -\frac{(k+1)(s-1)(R^2-r^2)pR^2r^2}{6(ks+1)(s-1)(R^2-r^2)R^2r^2 + 2[(ks+1)R^2 - kr^2(s-1)][r^6(s-1) - R^6(k+s)]} \quad (46)$$

$$\beta_{-3} = -\frac{(k+1)^2(R^2-r^2)pR^8r^2s}{6(ks+1)(s-1)(R^2-r^2)R^2r^2 + 2[(ks+1)R^2 - kr^2(s-1)][r^6(s-1) - R^6(k+s)]} \quad (47)$$

$$\alpha_{-1} = \frac{pR^2}{2} + 3s(R^2-r^2)R^2a_3 - \frac{s(R^2-r^2)}{r^2}a_{-1} \quad (48)$$

将式(45)和式(46)代入式(48)中,可以求出 $\alpha_{-1}$ 的表达式,该表达式太冗长和繁琐,在此不详细列出。

由式(19)和式(39)可以求出 $b_{-1}$ ,

$$b_{-1} = -r^2\bar{a}_1 = -\frac{(k+1)pR^2r^2}{4[(k+s)R^2 + (R^2-2r^2)(s-1)]} \quad (49)$$

再由式(19)和式(45)有

$$b_1 = \frac{(k+1)pR^2[R^6(k+s) - r^6(s-1)]}{6(ks+1)(s-1)(R^2-r^2)R^2r^2 + 2[(ks+1)R^2 - kr^2(s-1)][r^6(s-1) - R^6(k+s)]} \quad (50)$$

由式(19)和式(46)得

$$b_{-3} = \frac{(k+1)(s-1)(R^2-r^2)pR^2r^8}{6(ks+1)(s-1)(R^2-r^2)R^2r^2 + 2[(ks+1)R^2 - kr^2(s-1)][r^6(s-1) - R^6(k+s)]} \quad (51)$$

综合上面的推演, $\phi_1(z)$ 、 $\psi_1(z)$ 、 $\phi_2(z)$ 、 $\psi_2(z)$ 级数表达式中,系数不为零的仅有 $\alpha_{-1}$ 、 $\alpha_1$ 、 $\alpha_3$ 、 $a_{-1}$ 、 $a_1$ 、 $a_3$ 、 $b_{-3}$ 、 $b_{-1}$ 、 $b_1$ 、 $\beta_{-1}$ 和 $\beta_{-3}$ 。

可以通过式(26)~(27)继续计算级数的其他系数,依次取 $z^{-(n+2)}$ 项系数和 $z^n$ 项系数,等式左右两端相等,其中 $n \geq 1$ ,则可以分别列方程求出 $a_{-n}$ 、 $a_{n+2}$ 、 $\alpha_{-n}$ 和 $\beta_{-(n+2)}$ ,同时,由式(19)还可以求出 $b_n$ 和 $b_{-(n+2)}$ ,这样就可以把所有的级数系数都一一求出。通过上述运算,可以证明,除前面所列的系数不为零外,其余系数都为零。

回到式(13)~(16),根据上述演算,式(13)~(16)可以写成

$$\phi_1(z) = a_{-1}/z + a_1z + a_3z^3 \quad (52)$$

$$\psi_1(z) = (r^2a_{-1} - r^6\bar{a}_3)/z^3 - 2r^2a_1/z - (3r^4a_3 + \bar{a}_{-1})z/r^2 \quad (53)$$

$$\phi_2(z) = pz/4 + \alpha_{-1}/z \quad (54)$$

$$\psi_2(z) = (4\beta_{-1} - pR^2)/(4z) + (R^2\alpha_{-1} + \beta_{-3})/z^3 - pz/2 \quad (55)$$

式中, $a_{-1}$ 、 $a_3$ 是实数,共轭复数与其自身相等。

两个区域的应力函数分别求解之后,由应力函数求笛卡尔直角坐标系中的应力时则可以采用下列公式<sup>[1]</sup>:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\phi_1'(z) + \overline{\phi_1'(z)}] \quad (56)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + i2\tau_{xy} = 2[\bar{z}\phi_1''(z) + \psi_1'(z)] \quad (57)$$

工程中常用的屈服准则是 Von Mises 屈服准则,这样 Mises 应力就是一项重要的评价标准。平面应力状态下,Mises 应力计算方法如下:

$$\sigma_{mises} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (58)$$

### 1.3 围缘扁钢的加强作用

围缘扁钢的加强作用体现在其对孔边应力集中的减小,最直接的判断/评估方法就是与开孔无限

光板对比,计算孔边缘位置上应力减小的百分比,由此定义围缘扁钢加强系数  $C_f$  为

$$C_f = \frac{\Delta\sigma_{\max}}{p} = \frac{[\sigma_{\text{mises}}(z) - \sigma_{\text{1mises}}(z)]_{\max}}{p} \quad (59)$$

式中,  $\sigma_{\text{mises}}(z)$  为开孔无限光板  $z$  点的 Mises 应力,  $\sigma_{\text{1mises}}(z)$  是区域①或区域②上同样位置处的 Mises 应力。

## 2 算例验证与计算

### 2.1 围缘扁钢的退化

可以设想当围缘扁钢的高度  $T$  慢慢减小,直至其高度与平板厚度相等即  $T=t$ ,这等于是一种特殊的围缘扁钢,或者说此时的问题就是普通开圆孔光板问题,这时有

$$s = T/t = 1 \quad (60)$$

以  $s=1$  代入式(39)~(40),得

$$a_1 = p/4 \quad (61)$$

$$\beta_{-1} = pR^2/4 - pr^2/2 \quad (62)$$

以  $s=1$  代入式(45)~(48),得

$$a_{-1} = pr^2/2, a_3 = 0 \quad (63)$$

$$\beta_{-3} = pr^2(R^2 - r^2)/2, \alpha_{-1} = pr^2/2 \quad (64)$$

将式(61)、式(63)代入式(52)~(53),将式(62)、式(64)代入式(54)、式(55),得

$$\phi_1(z) = \phi_2(z) = pr^2/(2z) + pz/4 \quad (65)$$

$$\psi_1(z) = \psi_2(z) = pr^4/(2z^3) - pr^2/(2z) - pz/2 \quad (66)$$

将式(65)~(66)与式(9)~(10)对比,可发现退化的情形就是开孔无限平板的应力函数解答,两者完全吻合。

### 2.2 计算参数

下面通过一系列的算例来说明围缘扁钢对开孔板的加强作用。为了便于后面叙述表达,分别给每个算例取名。算例1:普通开孔无限平板受单向拉伸,开孔半径为  $r=1$  m,如图1所示;算例2:在普通开孔无限平板的开孔边缘用围缘扁钢加强,但是同样保证围缘扁钢圆环的内径(区域1的内径)为  $r=1$  m,围缘扁钢的外径为  $R=1.04$  m,即扁钢外径与内径之比  $e=R/r=1.04$ ,围缘扁钢高度与平板厚度之比  $s=T/t=3$ ,如图2所示;算例3:在算例2的基础上修改参数,比率  $e=1.06$ ,其余条件都与算例2相同;算例4:在算例2的基础上修改参数,比率  $s=2$ ,比率  $e=1.06$ ,其余条件都与算例2相同。上述4个算例中的板和围缘扁钢材料都相同,弹性模量  $E=2.1 \times 10^{11}$  Pa,泊松比  $\mu=0.3$ ,无限远处均匀单向拉伸应力  $p=1$  MPa。求解上述4个算例中平板和围缘扁钢的应力分布。

### 2.3 有限元验证

扁钢的高度  $T$  逐渐减小,直至扁钢高度  $T$  与平板厚度  $t$  相等,这时扁钢加强的开孔无限平板就退化为普通开孔无限平板。第2.1节中对这种扁钢加强开孔板单向均匀拉伸作用下的应力函数完成了推演,用本文方法计算的区域①和区域②结果一致,并且与公认的应力函数也完全相同。这说明在这种特殊情况下,本文方法是正确的。

除了这种特殊情形,扁钢高度  $T$  与平板厚度  $t$  不相等,目前尚无公开的试验数据可供参考和对比。因此对于上述4个算例,分别采用本文方法和有限元方法进行计算。对于算例1,运用有限元方法计算时,同样认为它是特殊的扁钢加强板,即扁钢高度  $T$  与平板厚度  $t$  的比率  $s=1$ ,扁钢的外半径  $R$  与内半径  $r$  比率  $e=1.04$ 。

有限元算法中,平板和扁钢都采用了 ANSYS 软件中的 4 节点的弹性壳单元 shell63,模型为 20 m×20 m 的方形板中央开有半径 1 m 的圆孔。先建立整体模型,网格较粗,最大的网格为 500 mm×500 mm;然后再建立圆环的子模型,内半径为 1 m,外半径 2 m,最大的网格为 34.91 mm×19.2 mm。整体模型和子模型都采用四边形映射网格,且越靠近圆孔位置网格越小。

图 3 和图 4 分别给出了算例 1 和算例 2 运用两种算法算出的 Mises 应力对比,每个算例中都分别计算了两个区域的 Mises 应力,即  $\rho=1$  区域①(扁钢)Mises 应力和  $\rho=1.0784$  区域②(平板)Mises 应力。两个算例对应的两种算法的 Mises 应力结果非常接近,仅在应力集中的位置有较小误差。算例 1 中的本文算法结果与文献[1]和[20]等公认算法是一致的,而图 3 显示有限元算法与公认算法吻合接近,所以这也验证了有限元算法在单元选择和网格划分上是正确的。图 5 和图 6 分别给出了算例 3 和算例 4 运用两种算法算出的 Mises 应力对比,同样计算了  $\rho=1$  区域①(扁钢)Mises 应力和  $\rho=1.0976$  区域②(平板)Mises 应力。图 4~6 显示本文算法与有限元算法的 Mises 应力吻合一致,这就验证了本文算法与有限元算法是比较接近的,误差较小。

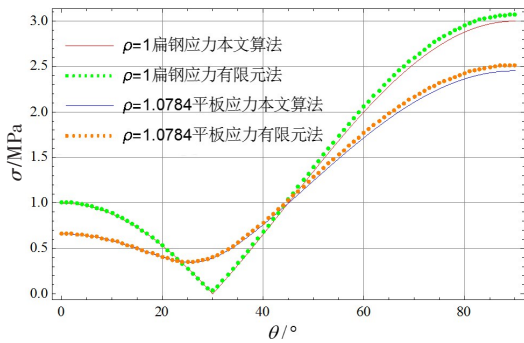


图3 算例1本文方法与有限元法对比

Fig.3 Results of the proposed method and FEM for Computational Example 1

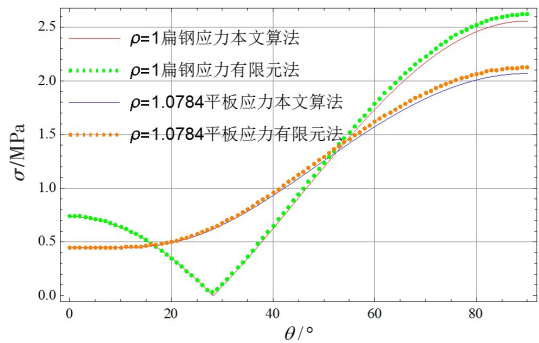


图4 算例2本文方法与有限元法对比

Fig.4 Results of the proposed method and FEM for Computational Example 2

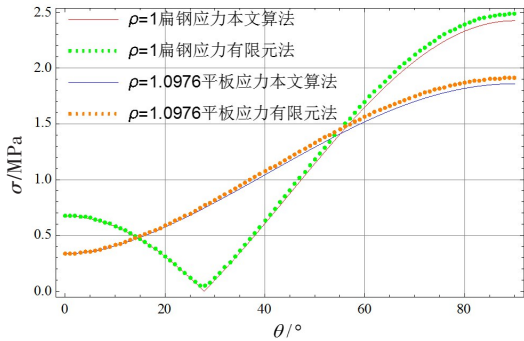


图5 算例3本文方法与有限元法对比

Fig.5 Results of the proposed method and FEM for Computational Example 3

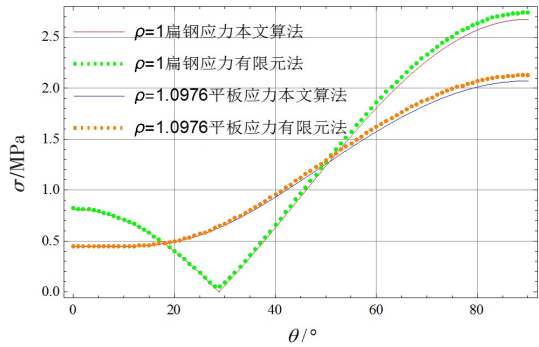


图6 算例4本文方法与有限元法对比

Fig.6 Results of the proposed method and FEM for Computational Example 4

### 2.4 计算结果与分析

计算方法可以完全套用前面推导的公式,即式(52)~(58)。这里通过曲线图(等值线图)来比较上述 4 个算例中的应力分布。

图 7 表示的是上述四个算例中极半径  $\rho=1$  的圆周上的 Mises 应力分布,对于算例 1 而言,就是孔边缘的 Mises 应力分布,对于算例 2、3 和 4 则是指围缘扁钢内边缘上的应力分布。从图上可以看出,围缘扁钢对开孔板的应力集中有明显的改善作用,并且在绝大部分位置上,围缘扁钢加强后的 Mises 应力都小于没有加强的光板应力。

图 8 绘制了平板圆周上的 Mises 应力,即上述算例中平板上极半径  $\rho=1.06$  的圆周上的 Mises 应力

分布。围缘扁钢在这些位置上减小应力的作用也很明显,能够“削峰填谷”,使得平板上的应力分布更加均匀,虽然有些位置扁钢加强后其应力反而变大,但并非是平板上的最大应力值。

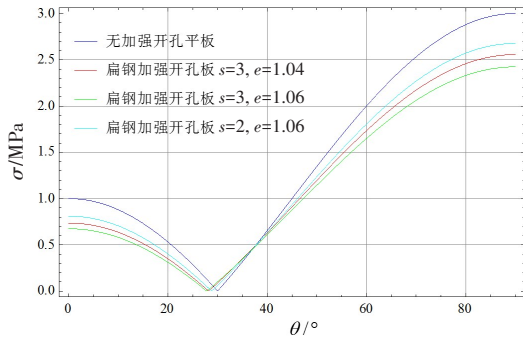


图7 四个算例围缘扁钢内圆周上 Mises 应力分布  
Fig.7 Mises stress distribution along rim bar inner circle in 4 computational examples

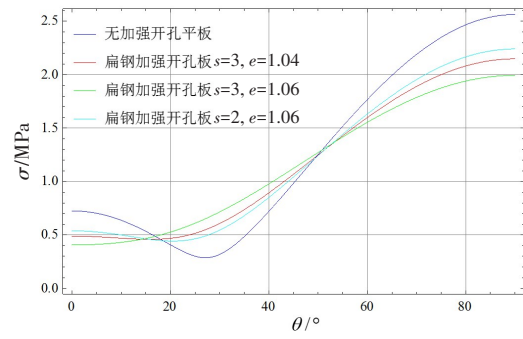


图8 四个算例中平板上 rho=1.06 圆周 Mises 应力分布  
Fig.8 Mises stress distribution along rho=1.06 circumference of the plate in 4 computational examples

通过前面的公式推导知道,区域①(扁钢区域)的应力状态近似为平面应力状态,即扁钢高度上的平均应力认为是平面应力状态,区域②(平板区域)上的应力则不需要引入平均应力,直接处于平面应力状态。因为区域①引入了计算假设,因此,平板与扁钢材料相同的前提下,在平板与扁钢的交接面上,区域①与区域②的应力也并非完全相等,存在误差,即从平板质点过渡到扁钢质点上应力曲线是不连续的。如图9所示,算例2、算例3和算例4的应力曲线在 y=R 的位置应力分布不连续,出现间断点。相比之下,算例1全部是平板区域,没有扁钢,其应力分布是连续的,同时从图上也可看出,增加扁钢后的应力有明显减小。图10反映了算例2、算例3和算例4中交界面上区域①和区域②的 Mises 应力分布,图中也表明区域①和区域②上交接点的应力不完全相等,并且区域①的应力要普遍小于区域②的应力。根据应变连续性原则,相同材料的结构交界点应力应当完全相等,而这种偏差正是引入扁钢的平均应力处于广义平面应力状态这一假设所导致的。从图9和图10来看,这种偏差大小各点并不一致,整体规律是 s 越大,则两个区域交接面的应力最大偏差也越大。

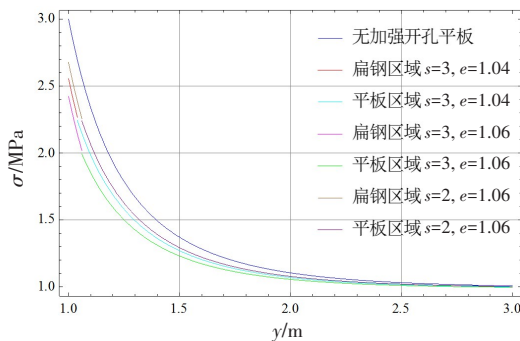


图9 四个算例沿 y 轴的 Mises 应力分布  
Fig.9 Mises stress distribution along y axis in 4 computational examples

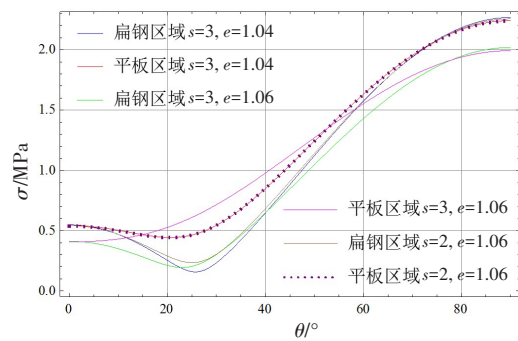


图10 算例2、算例3和算例4板筋交接面上的 Mises 应力分布  
Fig.10 Mises stress distribution on the intersecting surface of the plate and steel flat for Computational Examples 2, 3 and 4

式(59)定义了围缘扁钢的加强系数,但是其中的最大值  $\Delta\sigma_{\max}$  在哪个位置尚需确定,想用严谨的数学方法来计算  $\Delta\sigma$  的最大值及其位置是比较困难的,因为其中有非常复杂的复数运算,且函数在有些位置偏导数不存在,故目前仅能通过几个特例来说明达到最大值的位置。图11展示了算例2、算例3和算例4围缘扁钢内圆周上的 Mises 应力与算例1开孔平板内圆周应力相比其应力减少量的分布曲线,即  $\Delta\sigma$  沿圆周的分布。图12则是算例2开孔附近的平板区域相对于算例1减小的应力等值

线,也就是平板区域的 $\Delta\sigma$ 等值线。从这两张图上可以判断, $\Delta\sigma$ 取得最大值的位置为 $z=ir$ ,正是平板圆孔上应力最大点的位置。因此,对于单向均匀受拉的围缘扁钢加强开圆孔的平板,其围缘扁钢加强系数可以写成

$$C_f = \frac{\sigma_{mises}(ir) - \sigma_{1mises}(ir)}{p} \tag{67}$$

从式(67)可以判断 $C_f$ 的取值范围为 $0 \leq C_f \leq 2$ ,并且,围缘扁钢对开孔光板上的应力最大点所起的应力集中改善作用最为明显。

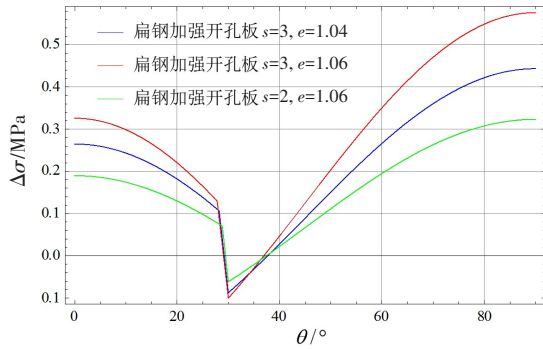


图11 算例2、算例3和算例4中孔边 $\Delta\sigma$ 分布  
Fig.11  $\Delta\sigma$  distribution on hole edge for Computational Examples 2, 3 and 4

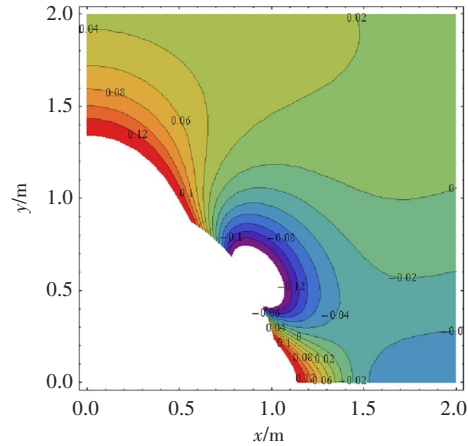


图12 算例2平板区域 $\Delta\sigma$ 分布  
Fig.12  $\Delta\sigma$  distribution on plate area for Computational Example 2  
(\*注:等值线上标注数字单位为MPa。)

对于船舶上的减轻孔,本来就是为了减少重量的,用围缘扁钢加强后,是否还有减重效果?这就启发人们关注围缘扁钢增加重量与围缘扁钢加强系数的变化规律。围缘扁钢绝对重量不便于应用,因此可以采用围缘扁钢增加的体积百分数,即研究围缘扁钢增加的体积百分数与围缘扁钢加强系数的变化规律。围缘扁钢增加的体积百分数 $V_p$ 可以用下面的方法计算:

$$V_p = \frac{\pi r^2 (e^2 - 1)(s - 1)t}{\pi r^2 t} = (e^2 - 1)(s - 1) \tag{68}$$

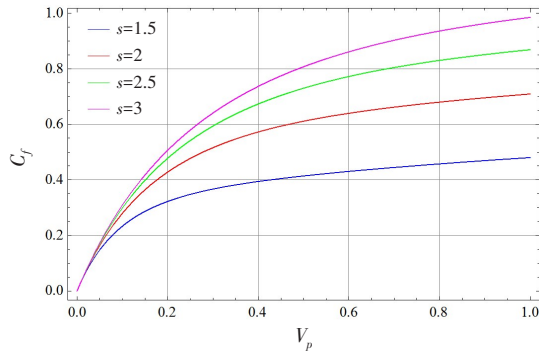
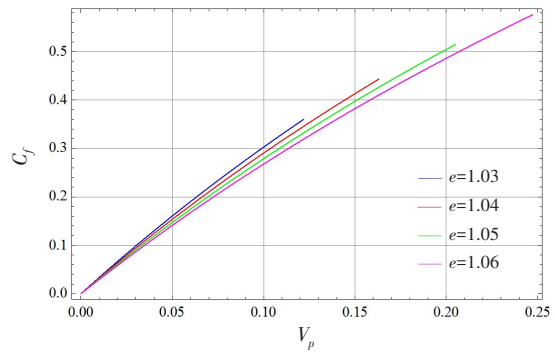
若开孔目的完全是为了减轻重量,即纯减轻孔,则 $V_p < 1$ 是有减轻效果, $V_p = 1$ 没有减轻效果,开孔减少的重量与围缘扁钢增加的重量相当, $V_p > 1$ 则反而起到增重效果。下面就分别计算上述算例2、算例3和算例4的加强系数和对应的体积百分数,计算结果列于表1中。从表中可以初步看出,围缘扁钢的体积百分数越大,则加强系数越大,即围缘扁钢体积越大,加强效果越明显。图13和图14分别列出了 $s$ 不变和 $e$ 不变时的 $C_f-V_p$ 曲线。通过这两组曲线可以看出,围缘扁钢加强系数随扁钢体积的增加而增大;保持 $s$ 不变,不断增加扁钢体积,加强系数增长速率会越来越小;保持 $e$ 不变,增加扁钢体积,则加强系数增长速度保持不变;增设相同体积的围缘扁钢, $s$ 越大, $e$ 越小,则加强系数越大。

这些规律就启发人们,在采用加强措施时,相同体积的加强构件,围缘扁钢的加强效果要比加厚的效果更好。

表1 各算例加强系数计算结果

Tab.1 Evaluation results of reinforcement coefficient for each computational example

参数	围缘扁钢加强开孔板	围缘扁钢加强开孔板	围缘扁钢加强开孔板
	$s=3, e=1.04$	$s=3, e=1.06$	$s=2, e=1.06$
$V_p$	0.163	0.247	0.124
$C_f$	0.443	0.576	0.323

图13 扁钢高度不变的  $C_f-V_p$  曲线Fig.13  $C_f-V_p$  curve for fixed steel flat thickness图14 扁钢内外径不变的  $C_f-V_p$  曲线Fig.14  $C_f-V_p$  curve for fixed inner radius and outer radius of steel flat rim

### 3 结 论

通过对围缘扁钢加强的无限平板应力的解析计算方法研究,得到以下结论:

(1) 围缘扁钢高度不大于3倍平板厚度的情况下,近似认为围缘扁钢区域的平均应力也处于平面应力状态。采用复变函数论方法,将扁钢区域和平板区域的应力函数分别表示成两个解析函数的洛朗级数形式,其级数系数待定;运用边界条件、扁钢与平板交界面的应力连接和位移连接条件,列出一系列方程组,求出洛朗级数的系数,则可确定两个区域的应力函数,从而求出应力。通过特例(即扁钢高度与平板厚度相同)验算,该方法是有用的。

(2) 分别运用本文方法和有限元法计算不同规格的扁钢加强的开圆孔无限平板应力,发现本文解析算法计算结果与有限元计算结果吻合良好;通过对比围缘扁钢加强的开圆孔无限平板应力与开圆孔无限光板应力发现,增设围缘扁钢后,孔边应力都有所减小,扁钢改善应力集中的效果明显。

(3) 以扁钢减少应力的最大值为出发点,评价扁钢的改善应力集中的作用,定义了扁钢加强系数。通过研究加强系数随扁钢体积变化规律得出,若保持加强构件体积相同的条件,则围缘扁钢的加强效果要优于环形加厚板。

### 参 考 文 献:

- [1] Muskhelishvili N I. Some basic problems of mathematical theory of elasticity[M]. Groningen, Holland: Noordhoff Publishing Company, 1953.
- [2] Savin G N. Stress concentration around holes[M]. New York: Pergamon Press, 1961.
- [3] Zeng Wei, Yang Shengqi, Tian Wenling. Experimental and numerical investigation of brittle sandstone specimens containing different shapes of holes under uniaxial compression[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2018, 200: 430-450.
- [4] Wu Hao, Zhao Guoyan, Liang Weizhang. Investigation of cracking behaviour and mechanism of sandstone specimens with a hole under compression[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2019, 163: 105084.
- [5] Wu Hao, Kulatilake P H S W, Zhao Guoyan, et al. A comprehensive study of fracture evolution of brittle rock containing an inverted U-shaped cavity under uniaxial compression[J]. Comput. Geotech. 2019, 116: 103219.
- [6] Weng Lei, Xie Xiaofeng, Li Xibing, et al. Fracture evolution around a cavity in brittle rock under uniaxial compression and coupled static-dynamic loads[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering. 2018, 51(2): 531-545.
- [7] Cao Wenzhuo, Zhou Zhiyong, Tan Lihai, et al. Fracture evolution and failure behaviour of marble specimens containing rectangular cavities under uniaxial loading[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2017, 184: 183-201.
- [8] Zhao Guoyan, Liang Weizhang, Wu Hao. Mechanical properties and fracture characteristics of pre-holed rocks subjected to

- uniaxial loading: A comparative analysis of five hole shapes[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2020, 105: 102433.
- [9] Sharma D S. Stress distribution around polygonal holes[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2012, 65: 115–124.
- [10] Sharma D S. Stresses around hypotrochoidal hole in infinite isotropic plate[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, 105: 32–40.
- [11] Lu Aizhong, Zhang Ning, Zeng Guisen. Minimizing stress concentrations around an elliptical hole by concentrated forces acting on the uniaxially loaded plate[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2017, 30: 318–326.
- [12] Kumari S, Uphadhyay A K, Shukla K K. Stress analysis for an infinite plate with circular holes[J]. *Materials Today: Proceedings*, 2017, 4: 2323–2332.
- [13] Lu Aizhong, Xu Zhen, Zhang Ning. Stress analytical solution for an infinite plane containing two holes[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, 128–129: 224–234.
- [14] Zeng Xiangtai, Lu Aizhong, Zhang Ning. Analytical stress solution for an infinite plate containing two oval holes[J]. *European Journal of Mechanics/A Solids*, 2018, 67: 291–304.
- [15] 潘祖兴. 开孔板结构应力及稳定性半解析分析方法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2012.  
Pan Zuxing. Semi-analytical methods for stress and stability analyses of perforated plates[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2012. (in Chinese)
- [16] Pan Zuxing, Cheng Yuansheng, Liu Jun. Stress analysis of a finite plate with a rectangular hole subjected to uniaxial tension using modified stress functions[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013, 75: 265–277.
- [17] Pan Zuxing, Cheng Yuansheng, Liu Jun. A semi-analytical analysis of the elastic buckling of cracked thin plates under axial compression using actual non-uniform stress distribution[J]. *Thin-Walled Structures*, 2013, 73: 229–241.
- [18] 宋竞正, 李 鸿, 何蕴增, 等. 船体结构非圆孔口问题的复变函数解[J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2004, 25(5): 558–562.  
Song J Z, Li H, He Y Z, et al. The complex variable function solution for curvilinear hole problems of ship[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2004, 25(4): 558–562.
- [19] Cheng Bin, Wang Jianlei, Peng Shi. Improving the compression behaviors of perforated plates with slotted holes using strengthening stiffeners[J]. *J. Struct. Eng.*, 2015, 141(12): 04015048.
- [20] 徐芝纶. 弹性力学(第三版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989.  
Xu Zhilun. *Mechanics of elasticity (Third edition)*[M]. Beijing: Higher Education Press, 1989. (in Chinese)
- [21] Seika M, Ishi M. Photoelastic investigation of the maximum stress in a plate with reinforced circular hole under uniaxial tension[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1964, 31: 701–702.
- [22] Seika M, Amano A. The maximum stress in a wide plate with a reinforced circular hole under uniaxial tension—Effects of a boss with fillet[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1967, 3: 232–233.