

文章编号: 1007-7294(2024)03-0400-09

基于POD和DMD的60°交叉管绕流分析

张 焱, 杨青青, 唐也婷, 王天源

(中国海洋大学 工程学院, 山东 青岛 266100)

摘要: 本文利用本征正交分解(Proper Orthogonal Decomposition, POD)和动力学模态分解(Dynamic Mode Decomposition, DMD)分析雷诺数 $Re=200$ 时三维60°交叉管在间隙比 $G=4$ 下的涡量数据, 并探究尾涡的演变规律。分析结果表明: 尾流场中的涡流尺度及重要程度随频率增加而减小, 少数低频模态便可主导大尺度流动现象, 而高频模态主要丰富尾流场中的小尺度湍流细节; 上下游圆柱的涡结构以0.19 Hz的频率从两圆柱脱落, 并在相同的频率下以平行形态向下游演变; 上游圆柱脱落涡与下游圆柱的相互作用导致下游圆柱涡激振动明显, 并产生多个高频升力频谱峰值。

关键词: 降阶模型; 交叉双管; 尾涡

中图分类号: TV131 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.1007-7294.2024.03.008

Analysis of flow past two circular cylinders crossing in 60 degrees based on POD and DMD

ZHANG Qin¹, YANG Qing-qing¹, TANG Ye-ting¹, WANG Tian-yuan¹

(College of Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

Abstract: In this paper, to study the evolution pattern of wake vortices past two crossing cylinders in 60 degrees arrangement at the gap ratio of $G=4$ and the Reynolds number of $Re=200$, proper orthogonal decomposition (POD) and dynamic mode decomposition (DMD) were employed to analyze the magnitude vorticity data. The analysis results indicate that the spatial scale of wake vortices decreases with the frequency increasing. The large-scale flow phenomena in the wake can be approximately reconstructed by a few low-frequency modes, while high-frequency modes mainly enrich the small-scale turbulence details. Wake vortices shed from upstream and downstream cylinders at a frequency of 0.19 Hz and propagate toward downstream in parallel morphology with the same frequency. The interaction of the vortex shedding from upstream cylinder on the downstream cylinder causes a significant vortex-induced vibration (VIV) on the downstream cylinder and results in multiple peaks in its lift coefficient spectrum.

Key words: reduced order model; two crossing circular cylinders; wake vortex

0 引 言

圆柱绕流作为流体力学中的经典问题, 在工程应用领域十分广泛, 如热力管道、桩基础及风或水流中的桁架结构等。当流体流经圆柱表面并从边界层分离, 随之产生的涡脱落现象是导致尾流场复

收稿日期: 2023-09-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51979260); 中国博士后科学基金资助项目(2019M652481)

作者简介: 张 焱(1986-), 男, 博士, 副教授;

王天源(1996-), 男, 博士研究生, 通讯作者, E-mail: wangtianyuan@stu.ouc.edu.cn。

杂的主因。而雷诺数 Re 是影响圆柱尾流形态的关键因素。Zdravkovich^[1]通过实验发现:单圆柱尾流形态随雷诺数 Re 改变明显,圆柱尾流在 $40 < Re < 150$ 时为两排周期性摆动和交替脱落的旋涡,即卡门涡街;当 $150 < Re < 300$,流态从层流向紊流转变;当 $300 < Re < 2 \times 10^5$,涡街演变为紊流。目前,大多数多管圆柱绕流问题的研究对象多为双平行圆柱在不同排列方式下的尾流形态^[2-3],针对交叉双管的研究相对较少。Zhao 和 Lu^[4]发现,在不同雷诺数 Re 及间隙比 G 下,垂直交叉管的间隙流存在尾涡 TV、项链涡 NV 及间隙涡脱落 SG 三种形态,远离间隙处存在 K、P 两种涡脱落形态,这些形态均与圆柱上的力系数相关。在失稳机制最丰富的过渡阶段 ($Re=200$),张焱等对 60°交叉管尾流在不同间隙比下的上述涡形态进行了识别分析。

传统的涡识别方法(如 Q 准则、 λ_2 方法^[5]等)呈现的流场具有时空耦合性,尤其对于严重失稳的流场,在小尺度涡结构的干扰下难以捕获主导流场演变的关键流态。针对传统涡识别方法的局限性,诸如本征正交分解(POD)^[6-7]和动力学模态分解(DMD)^[8]等降阶模型(ROMs),可分别从空间正交性和频率独立性角度降维分解复杂流场并提取关键模态信息。

王智慧等^[9]利用 DMD 提取了椭圆柱尾流中的相干结构,结果表明大振幅模态包含了流场的主要信息。孙婉容等^[10]利用 DMD 重建单、双圆柱流场时发现,模态分解结果和重建精度取决于数据量。袁猛等^[11]利用 DMD 方法分析并列双圆柱尾流场的涡量数据,发现增加奇异值的截断阶数并不能对流场预测效果起到积极作用。Sakai 等^[12]利用 POD 和 DMD 分析了单、串联及并排圆柱尾流,发现间隙比 G 影响尾流模态的对称性。Bai 等^[13]通过 POD 对比了波形和光滑圆柱的三维 POD 模态特征,发现仅凭少量低阶模态便可近似重建尾流场。Sirisup 等^[14]提取了交错圆柱三维尾流场的主导 POD 模态,并探究了上、下游圆柱尾流形态对温度场分布的影响。现阶段,POD 和 DMD 常用于分析二维圆柱尾流,尚未涉及三维交叉管算例。基于张焱等^[15]通过直接数值模拟(DNS)获取的数值结果,本文利用 POD 和 DMD 对比分析 60°交叉管在 $Re=200$ 、 $G=4$ 下的涡量数据以探究其尾流演变规律。

1 模态分解方法

POD^[6,7]和 DMD^[8]可通过降维分解方式识别时空耦合尾流场无法呈现的流动信息,本章简要回顾了 POD 和 DMD 的基本理论,具体理论可见相应引用文献。

1.1 POD 方法

POD 本质上是对快照矩阵 X 的空间协方差矩阵 $R = XX^T$ 执行特征值分解(EVD)以寻求可最佳表示给定流场数据的基函数,等同于在最小二乘意义上对快照矩阵 X 执行奇异值分解(SVD):

$$X = U\Sigma V^T \quad (1)$$

式中, $U = [u_1, u_2, \dots, u_m] \in \mathbb{C}^{n \times m}$ (n 为计算网格数, m 为快照数, $m \ll n$) 为左奇异(POD 模态)矩阵, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为奇异值(能量)矩阵, $V = [v_1, v_2, \dots, v_m] \in \mathbb{C}^{m \times m}$ 为右奇异矩阵。每个 POD 模态 u_i 的时间系数 $a_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, m$) 可通过将其奇异值 σ_i 乘以右奇异向量 v_i 获得:

$$a_i(t) = \sigma_i v_i^T \quad (2)$$

每个 POD 模态 u_i 根据其捕获流场空间特征的程度(能量 σ_i) 排序,每个模态的相对能量 E_i 和前 i 阶模态的累积能量 E_i^{cum} 可分别表示为

$$E_i = \sigma_i / \sum_{j=1}^m \sigma_j \quad (3)$$

$$E_i^{\text{cum}} = \sum_{k=1}^i E_k \quad (4)$$

1.2 DMD 方法

Schmid^[8]提出的 DMD 理论假设相邻快照之间存在一个时间不变线性算子 A ,在离散时间的动力学系统中表示为

$$X' = AX \tag{5}$$

式中, $X = [x_0, x_1, \dots, x_{m-1}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 和 $X' = [x'_1, x'_2, \dots, x'_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 是由恒定时间间隔 $\Delta t = t_{i+1} - t_i (i=0, 1, \dots, m-1)$ 下采样得到的快照向量 $x_i (i=0, 1, \dots, m)$ 所组成的快照矩阵。最佳拟合矩阵 A 可表示为

$$A = X'X^\dagger \tag{6}$$

式中, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, † 表示 Moore-Penrose 伪逆, 相当于在最小二乘意义下寻求矩阵 A 的最佳拟合解。

与 POD 不同, DMD 假设流场的模态和动力学信息分别包含在算子 A 的特征向量和特征值中。由于矩阵 A 一般过大, 直接对矩阵 A 执行 EVD 需大量的内存资源, 因此通常采用 Tu 等^[16]提出的 DMD 算法以降低计算成本, 最终可得各 DMD 模态及其振幅(能量) α_i 、增长/衰减率 g_i 及频率 f_i 等信息。

2 算例概述

2.1 模型建立

本文选用三维(3D)Navier-Stokes(N-S)方程, 流体运动粘性系数 $\nu = 0.005 \text{ m}^2/\text{s}$, 雷诺数 $Re = U_x D/\nu = 200$, 流场处于过渡阶段^[17]。

如图 1 所示, 所选研究对象为直径 $D=1 \text{ m}$, 长度为 $40D$ 的交叉布置双管, 其中上游圆柱(UC)水平布置, 下游圆柱(DC)按一定间隙比 $G=L/D (L$ 为两圆柱外径间隙长度)倾斜 60° 布置。计算域长、宽、高分别为 $(32+G)D, 40D, 40D$ 。

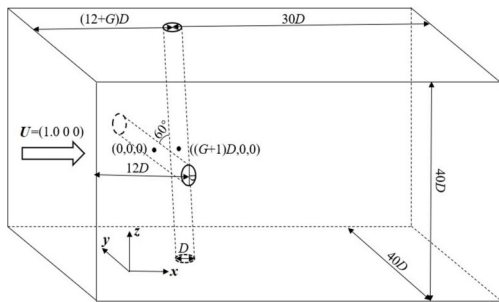


图 1 60°交叉双圆柱计算域示意图^[15]

Fig.1 Schematic diagram of two cylinders in 60° crossing arrangement and computational domain^[15]

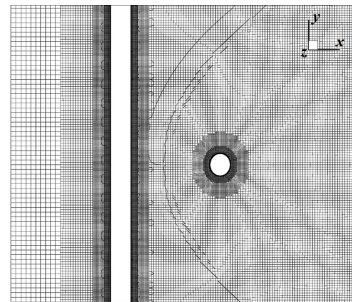
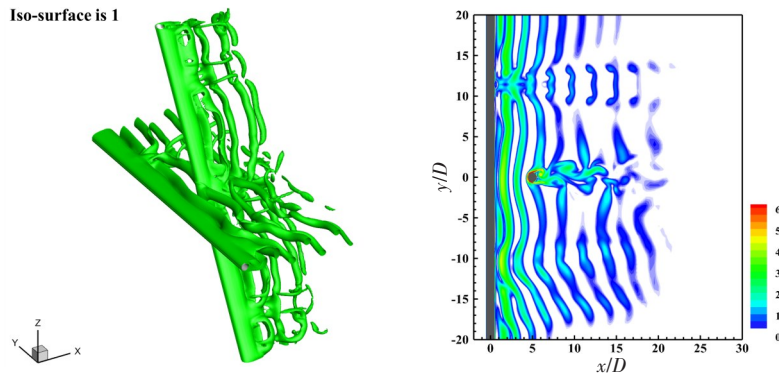


图 2 交叉管(60°, G=4)在 z=0 平面上的网格划分

Fig.2 Computational mesh around two crossing cylinders in 60°, G=4 on the z=0 plane

2.2 频谱及瞬时流场

在确定计算模型及网格(图 2)后, 基于 OpenFOAM 的有限体积法, 对交叉双管(60°, G=4)在雷诺数 $Re=200$ 下进行直接数值模拟 DNS。计算时间步长为 $dt=0.01 \text{ s}$, 在流场稳定的第 400 s 后开始输出涡量数据以作后处理。图 3 展示了 420 s 瞬时时刻的涡量等值面及其在 $z=0$ 平面上的云图。



(a) 三维等值面图

(b) z=0 平面上的云图

图 3 基于合涡量展示的 60°交叉管附近的流动

Fig.3 Flow around two crossing cylinders in 60° arrangement based on vorticity magnitude

对 20 s(400~420 s)内上游 UC 及下游 DC 圆柱的升力系数进行快速傅里叶变换(FFT)以计算其频谱,结果如图 4 所示。UC 及 DC 的频谱峰值主要集中于 0.19 Hz 附近,即上下游圆柱的涡脱落周期约为 5.26 s。由于 UC 涡脱落对 DC 造成影响,导致两者频谱峰值略有差异。UC 频谱相对光滑,但 DC 在来自 UC 的涡脱落影响下于 0.09 Hz、0.28 Hz、0.38 Hz 和 0.49 Hz 附近出现频谱峰值。

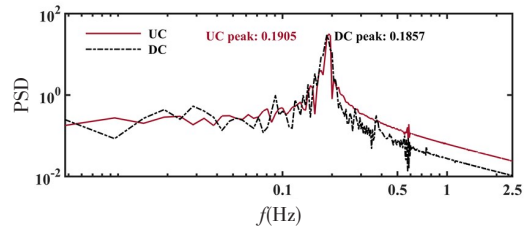


图 4 交叉圆柱的升力频谱图

Fig.4 Spectra of lift coefficients on upstream and downstream cylinders

2.3 模态收敛性分析

数据集收敛性涉及快照采样频率(采样时间间隔的倒数)和数量两个参数,完整的数据集既要确保低频(大周期)流动现象完整呈现,又要不缺失高频流动现象。据 Nyquist-Shannon 采样准则,POD 和 DMD 所能捕获的流体最大频率 f_{max} 为快照采样频率 f_{samp} 的一半,即

$$f_{max} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{2} f_{samp} \tag{7}$$

鉴于快照采样频率为 $f_{samp}=100$ Hz,最大捕获频率 $f_{max}=50$ Hz,设置不同时间间隔 $\Delta t=[0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05]$ s(可依次捕获 50 Hz、25 Hz、16.67 Hz、12.5 Hz 和 10 Hz 频率范围内的模态)和快照数量 $m=[100:100:2000]$ 以研究其对模态收敛性的影响。

由图 4 可知,上下游圆柱的升力频谱峰值约为 0.19 Hz,故本文针对不同时间间隔和快照数量统计 0.19 Hz 附近 DMD 模态的增长率,频率误差保持在 10% 以内则予以考虑。统计结果(图 5)表明, $\Delta t=0.01$ s、0.02 s 和 0.03 s 分别在 $m=100\sim 300$, $100\sim 200$ 和 100 未捕获到 0.19 Hz 附近的模态,说明数据集至少需覆盖一个涡脱落周期(5.26 s)。在完整覆盖一个涡脱落周期后,模态增长率趋于收敛并不再受时间间隔影响。最终,在计算资源允许范围内,本文选择时间间隔 $\Delta t=0.01$ s 和快照数量 $m=2000$ 的数据集,该数据集可捕获 0~50 Hz 范围内及约 3.8 个涡脱落周期内的 2000 个流动模态。

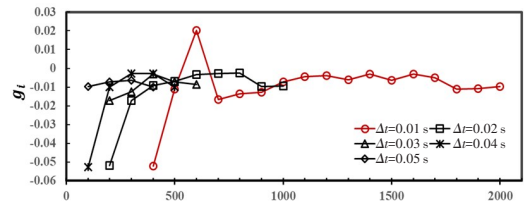


图 5 模态收敛性分析

Fig.5 Analysis of modal convergence

3 模态分解结果

3.1 POD 统计分析

图 6 展示了前 25 个 POD 模态的能量占比 E_i (式(3))和累积能量占比 E_i^{cum} (式(4))。其中第 1 阶模

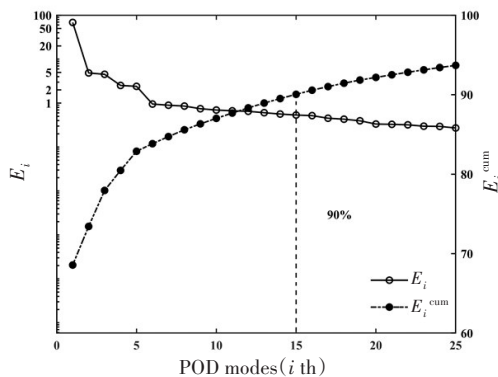


图 6 POD 模态能量占比及累积能量占比
Fig.6 Energy proportion and cumulative energy proportion of POD modes

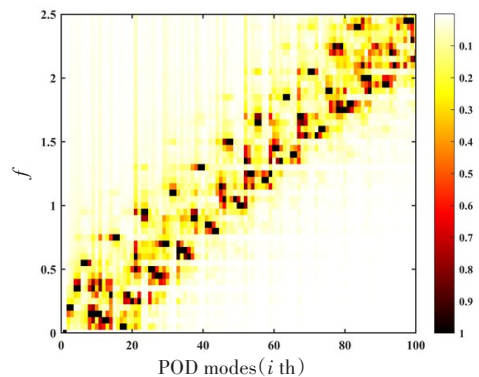


图 7 POD 模态频谱分布
Fig.7 Spectrum of POD modes

态能量占比最高,占流场总能量的 68.57%;第 2、3 阶和第 4、5 阶模态能量成对相同,呈“阶梯”状下降特征;随着模态阶数的增加,相邻模态能量不再成对相同,且能量占比均低于 1%。此外,累积能量占比分布表明,仅需 15 个模态便可捕获 90% 的流场总能量。

图 7 展示了前 100 阶 POD 模态的频谱分布,其中频谱峰值作归一化处理并由黑色像素点代表。统计结果表明,模态频谱峰值为模态阶数的线性函数。综合图 6 和图 7 可知,低阶 POD 模态对应高能、低频流动现象;反之,高阶 POD 模态则对应低能、高频现象。

3.2 DMD 统计分析

为避免大振幅但高衰减率的 DMD 模态影响分析,选择振幅绝对值除以增长/衰减率绝对值 $|\alpha_i|/|g_i|$ 以衡量 DMD 模态对尾流动力学的贡献程度。图 8(a) 展示了排除零频 $f=0$ Hz 模态后 $|\alpha_i|/|g_i|$ 关于频率 f_i 的归一化统计结果,图 8(b) 进一步将 $|\alpha_i|/|g_i|$ 作为模态的排序标准对每一 DMD 模态染色以统计模态增长率 g_i 关于频率 f_i 的统计结果,排序越靠前的模态颜色越深。

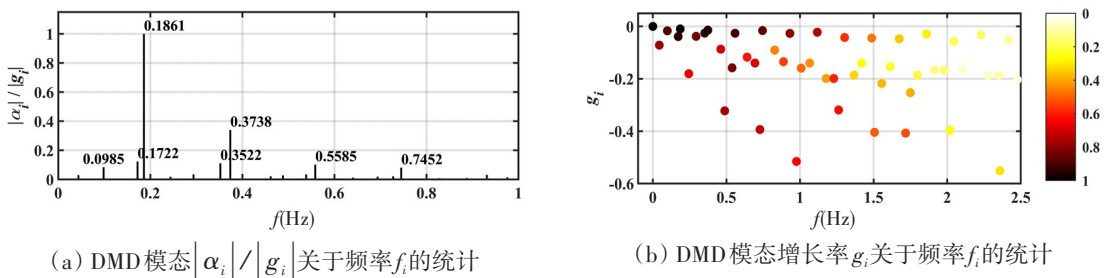


图 8 DMD 模态的频谱

Fig.8 Spectra of DMD modes

由图 8(a) 可知, $f=0.1861$ Hz 模态对流场的贡献程度最高,该频率接近上、下游圆柱涡脱落频率 0.19 Hz,其次, $f=0.0985$ Hz、0.1722 Hz、0.3522 Hz、0.3738 Hz 等模态也相当重要。由图 8(b) 可知,模态的重要程度(颜色)随频率增加而减弱(变浅)。对比图 7 可知,POD 模态具有多频性,而 DMD 模态则具有单频特性。

3.3 模态分析

由上、下游圆柱的升力频谱(图 4)、POD 频谱(图 7)和 DMD 频谱(图 8)可知,主导(第 2、3 阶)POD 模态及主导($f=0.1861$ Hz) DMD 模态均强调 $f \approx 0.19$ Hz 附近的模态,图 9 与图 10 展示了第 2 阶 POD 模态及 $f=0.1861$ Hz 时 DMD 模态的实部。由三维等值面(图 9)可知,两模态的空间形态相似,主要表征上、下游圆柱的 P 形态涡脱落现象(Zhao^[4]及张崑^[15])。

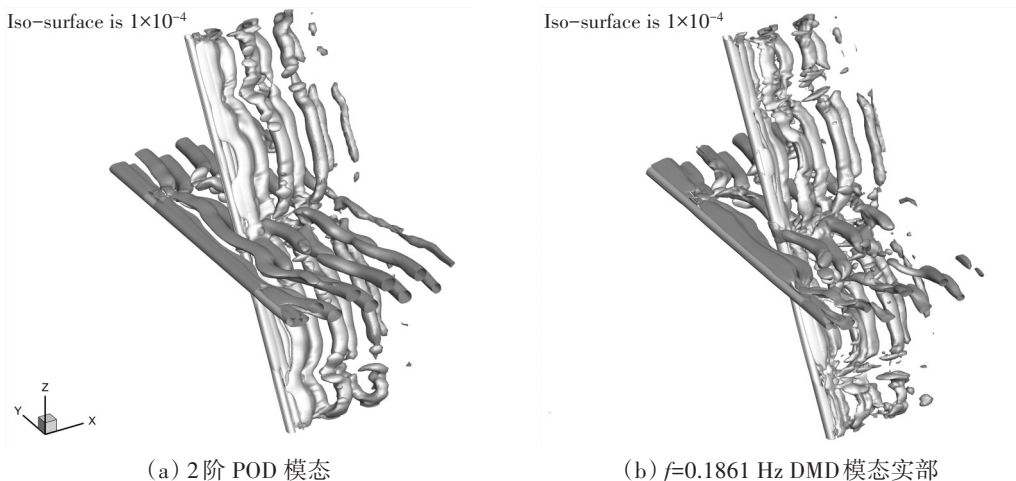


图 9 POD 和 DMD 模态的等值面图

Fig.9 Iso-surfaces of POD and DMD modes

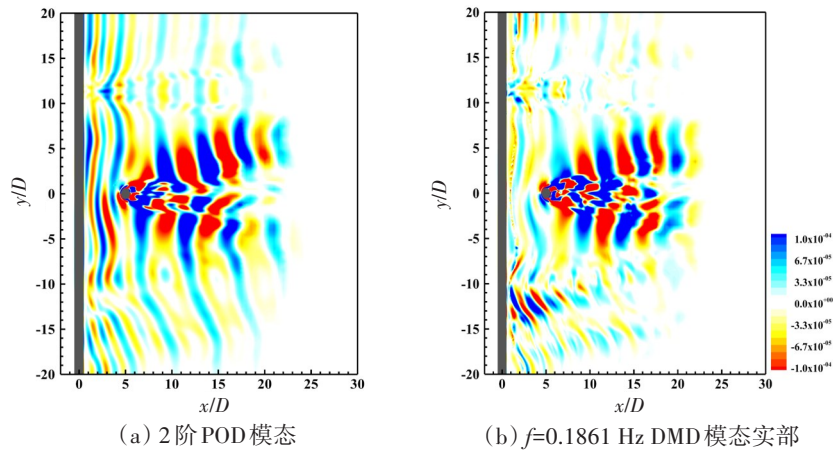
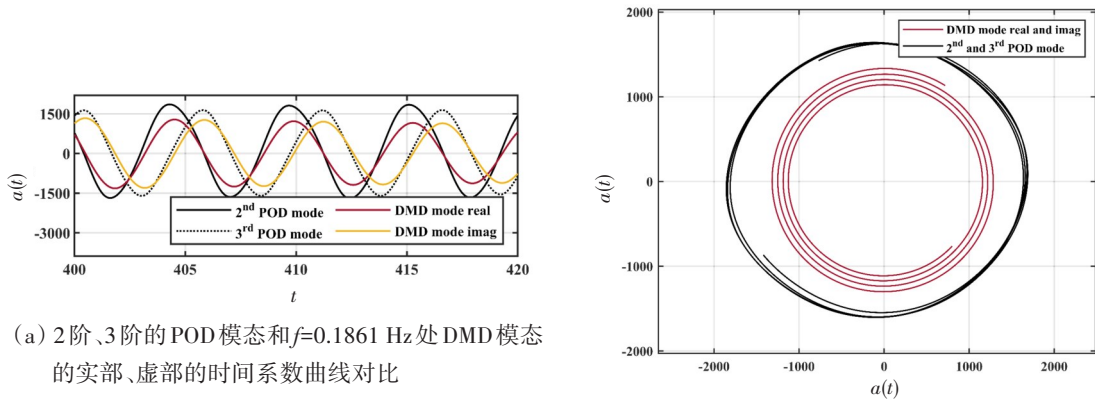


图 10 POD 和 DMD 模态在 $z=0$ 平面上的云图

Fig.10 Contours of POD and DMD modes on the $z=0$ plane

图 11(a)进一步对比了第 2、3 阶 POD 模态和 $f=0.1861$ Hz 时 DMD 模态实部及虚部的时间系数。可以看出,第 2 阶 POD 模态与 DMD 模态实部、第 3 阶 POD 模态与 DMD 模态虚部的振荡频率相同,两者间存在一定相位差。图 11(b)分别利用第 2、3 阶 POD 模态和 $f=0.1861$ Hz 处 DMD 模态实部及虚部的时间系数绘制了相位轨迹图,表现为不同半径的同心圆,说明时间系数为存在 90° 相位差的正弦曲线,而半径差异与时间系数的不同振幅有关。POD 轨迹为非规则圆,主要由时间系数的振荡引起, DMD 轨迹为螺旋圆,螺距表征衰减率 g_i 。



(a) 2 阶、3 阶的 POD 模态和 $f=0.1861$ Hz 处 DMD 模态的实部、虚部的时间系数曲线对比

(b) 2 阶、3 阶的 POD 模态和 $f=0.1861$ Hz 处 DMD 模态的实部、虚部的相位轨迹对比

图 11 POD 和 DMD 模态关于时间系数的对比

Fig.11 Comparisons of time coefficients between POD and DMD modes

POD 从空间正交性角度分解模态,而 DMD 则基于频率独立性,因此 POD 模态多以多频耦合形式出现,而 DMD 模态始终具有单频特性。POD 可将周期性流动现象分解为空间形态相似且能量相同的一组模态对,对应图 6 中第 2、3 阶模态的阶梯状能量分布。该模态对具有单频性,且二者时间系数间存在 90° 相位移(Dietmar 和 Fasel^[18])。若流动现象由于尾流失稳而丧失周期性或周期性减弱,则相邻 POD 模态的空间形态与能量便不再成对相同(如第 6、7 阶模态),且其时间系数存在波动,导致 POD 模态具有多频性(图 7)。此外, Schmid 等^[19]的研究表明,对于周期性流动现象,复 DMD 模态的实部和虚部可由一组同频 POD 模态 $u_i + iu_{i+1}$ 表示,但对于非周期性流动现象没有同等表示。

鉴于 POD 模态和 DMD 模态的空间特征类似,且 DMD 模态的单频特性便于流体机理的分析,故下面将展示其他具有典型特征的 DMD 模态。

DMD 频谱(图 8)中存在衰减率及频率均为 0 的模式,由图 12(a)及图 13(a)可知,该模式主要表征尾流场中的平均涡量分布,对尾流动力学没有贡献。随着频率的增加, $f=0.0985$ Hz 和 0.1722 Hz 模式(图 12(b)~(c)和图 13(b)~(c))与下游圆柱的大尺度流向涡有关,而 $f=0.3522$ Hz 和 0.3738 Hz 模式(图 12(d)~(e)和图 13(d)~(e))与全局跨向涡脱落有关。经对比,模式的空间尺度随频率的增加而减小。图 14 进一步展示了上述模式的时间系数,其包络线斜率与模式衰减率(图 14(b))有关。

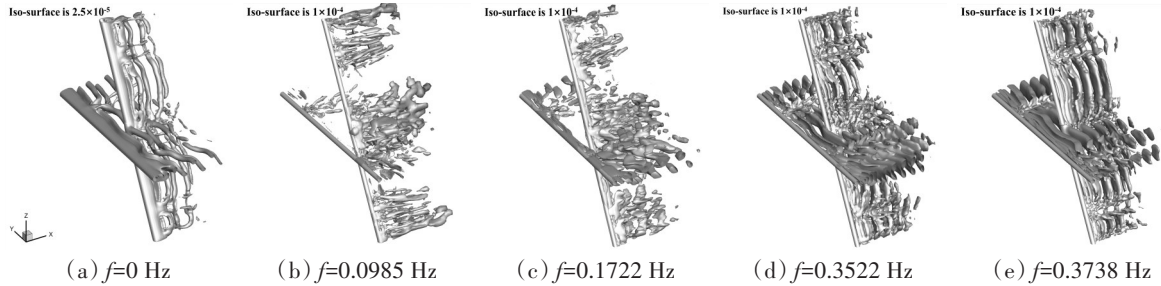


图 12 DMD 模式的等值面图

Fig.12 Iso-surfaces of DMD modes

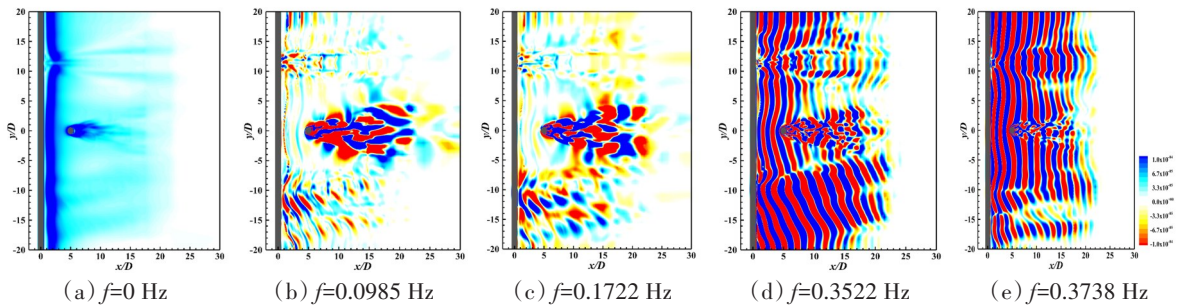


图 13 DMD 模式在 $z=0$ 平面上的云图

Fig.13 Contours of DMD modes on $z=0$ plane

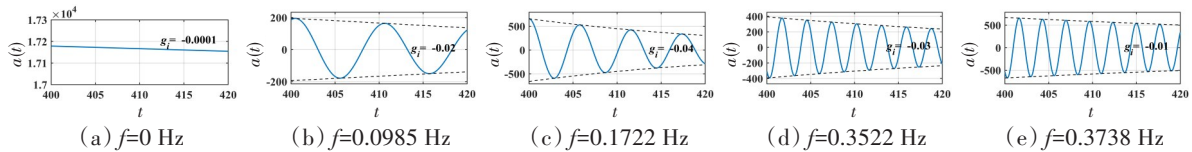


图 14 DMD 模式的时间系数演变

Fig.14 Time coefficients evolution of DMD modes

3.4 降阶模型

基于上述分析,利用 $f=[0, 0.0985, 0.1722, 0.1861, 0.3522, 0.3738]$ Hz 等模式对尾流场进行低阶重建,结果如图 15 所示。与 $f=0.1861$ Hz 模式(图 9(b)和图 10(b))相比, $f=[0.0985, 0.1722, 0.3522,$

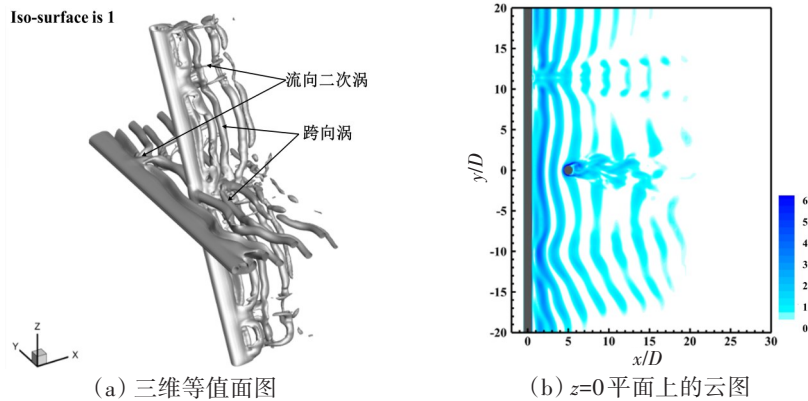


图 15 基于主导 DMD 模式的重建尾流场

Fig.15 Reconstructed wake field based on dominant DMD modes

0.3738] Hz 模态丰富了交叉点后下游圆柱的流向涡演变及远离交叉点处连接相邻平行 P 形态跨向涡的流向二次涡。

4 结 论

本文基于张焱等^[5]通过 DNS 模拟的 60°交叉管在间隙比 $G=4$ 和雷诺数 $Re=200$ 下的涡量数据, 利用 POD 和 DMD 两种模态分解方式分析了尾涡的演变规律, 得到以下结论:

(1) POD 和 DMD 模态的重要性的空间尺度随频率的增加而减小, 其中大尺度尾涡可由极少数低频 DMD 模态重建, 而高频模态则表征小尺度流动形态;

(2) 上、下游圆柱的平行 P 形态涡以 0.19 Hz 附近的频率从上、下游圆柱脱落, 并按照相同的频率向下游演变, 直至破碎;

(3) 下游圆柱上的多个高频升力频谱峰值由来自上游的脱落涡和下游圆柱相互作用引起, 并最终导致下游圆柱出现涡激振动现象。

参 考 文 献:

- [1] Zdravkovich M. M. Flow around circular cylinders[J]. Journal of Fluids and Structures, 2003.
- [2] Zdravkovich M. M. Review of flow interference between two circular cylinders in various arrangements[J]. Journal of Fluids Engineering, 1977, 99(4): 618–633.
- [3] Sumner D. Two circular cylinders in cross-flow: A review[J]. Journal of Fluids and Structures, 2010, 26(6): 849–899.
- [4] Zhao Ming, Lu Lin. Numerical simulation of flow past two circular cylinders in cruciform arrangement[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2018, 848: 1013–1039.
- [5] 王义乾, 桂 南. 第三代涡识别方法及其应用综述[J]. 水动力学研究与进展, 2019, 34(04): 413–429.
Wang Yiqian, Gui Nan. A review of third-generation vortex identification method and its applications[J]. Chinese Journal of Hydrodynamics, 2019, 34(4): 413–429
- [6] Lumley J. L. The structure of inhomogeneous turbulent flows[C]//Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation, 1967.
- [7] Sirovich Lawrence. Turbulence and the dynamics of coherent structures. III. Dynamics and scaling[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1987, 45(3): 583–590.
- [8] Schmid Peter J. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2010, 656: 5–28.
- [9] 王智慧, 翟红岩, 李庆领, 等. 椭圆柱绕流尾迹的 PIV 测量及 DMD 分析[J]. 青岛科技大学学报(自然科学版), 2020, 41(1): 91–96.
Wang Zhihui, Zhai Hongyan, Li Qingling, et al. PIV measurements and DMD analysis of elliptical cylinder's wake[J]. Journal of Qingdao University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2020, 41(1): 91–96.
- [10] 孙婉荣, 明平剑, 刘 勇. 二维圆柱绕流的动模态分析研究[J]. 工程热物理学报, 2021, 42(5): 1275–1281.
Sun Wanrong, Ming Pingjian, Liu Yong. Dynamic modal analysis of two-dimensional circular cylinder flow[J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2021, 42(5): 1275–1281
- [11] 袁 猛, 张新玉, 柳贡民, 等. 并列双圆柱绕流的动力学模态分解[J]. 船舶力学, 2021, 25(5): 527–534.
Yuan Meng, Zhang Xinyu, Liu Gongmin, et al. Dynamic mode decomposition of flow past parallel twin cylinders[J]. Journal of Ship Mechanics, 2021, 25(5): 527–534.
- [12] Sakai M, Sunada Y, Imamura T, et al. Experimental and numerical flow analysis around circular cylinders using POD and DMD[C]//44th AIAA Fluid Dynamics Conference, 2014.
- [13] Bai H L, Alam M M, Gao N, et al. The near wake of sinusoidal wavy cylinders: Three-dimensional POD analyses[J]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2019, 75: 256–277.
- [14] Sirisup S, Tomkratoke S. Proper orthogonal decomposition of unsteady heat transfer from staggered cylinders at moderate

Reynolds numbers[M]. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

- [15] 张 焱, 王 杰, 梁丙臣, 等. 低雷诺数 60° 交叉双圆柱直接数值模拟研究[J]. 水动力学研究与进展, 2022(1): 35-41.
Zhang Qin, Wang Jie, Liang Bingchen, et al. Direct numerical simulation of low Reynolds number 60° degrees intersecting double cylinder[J]. Chinese Journal of Hydrodynamics, 2022(1): 35-41.
- [16] Tu J H, Rowley C W, et al. On Dynamic mode decomposition theory and applications[J]. The Journal of Computational Dynamics, 2014, 1(2): 391-421.
- [17] Shao Jie, Zhang Chao. Numerical analysis of the flow around a circular cylinder using RANS and LES[J]. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2006, 20(5): 301-307.
- [18] Dietmar R, Fasel H. Evolution of three-dimensional coherent structures in a flat-plate boundary layer[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1994, 260: 351-375.
- [19] Schmid P J, Violato D, Scarano F. Decomposition of time-resolved tomographic PIV[J]. Experiments in Fluids, 2012, 52: 1567-1579.