DOI: 10.11883/bzycj-2017-0142
文章编号: 1001-1455(2018)06-1344-09

半空间内含有部分脱胶的椭圆夹杂及圆孔对 SH 波的散射*

齐 辉,陈洪英,张希萌,赵元博,项 梦
(哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院,黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 采用复变函数法,结合"保角映射"技术及 Green 函数法,研究 SH 波作用下半空间内含有部分脱胶的椭圆夹杂以及圆形孔洞的散射问题。首先,利用"保角映射"技术将椭圆夹杂映射为圆夹杂,求出散射波位移场,同时,利用 Green 函数法与"虚设点源"的方法,求出半空间内椭圆夹杂以及圆孔的位移及应力场;然后,根据椭圆夹杂周围位移、应力连续、圆孔周围应力自由的边界条件,建立无穷线性代数方程组,求解出波函数中的未知系数;最后,在脱胶部分施加大小相等、方向相反的应力,构造出"脱胶模型",得到半空间内含有部分脱胶的椭圆夹杂以及圆形孔洞的总位移场。数值算例表明,入射角度、入射波频率、缺陷之间的距离、夹杂埋深及脱胶角度等对动应力集中因子有较大影响。

关键词: SH 波;散射;椭圆夹杂;脱胶;Green 函数;保角映射;动应力集中因子
中图分类号: O343.4 **国标学科代码**: 13015 **文献标志码**: A

工程结构中存在各种缺陷(孔洞、夹杂、脱胶等),通过研究弹性波的散射,可为实际工程的设计、施工等提供理论依据。已有许多学者对弹性波的散射做了研究,累积了丰富的经验。Y. H. Pao 等[1]研究了圆柱体中孔洞以及夹杂周围的动应力集中因子的问题,O. Coussy[2-3]对圆柱夹杂与基体之间存在的脱胶现象进行了分析研究。目前,对于全空间、半空间圆形孔洞、椭圆孔洞的研究已经积累了大量理论成果[4-17],而含有部分脱胶的椭圆夹杂几乎没有,椭圆与圆孔同时存在的研究成果更是尚未发现,脱胶的存在通常是结构直接发生破坏的原因。研究以椭圆为代表的具有不规则边界的复合缺陷,对于工程结构上的设计、施工以及健康检测等具有实际价值。

本文中通过利用"保角映射"技术,将椭圆夹杂映射为圆夹杂,并通过"虚设点源"方法与 Green 函数法相结合,求出椭圆夹杂及圆形孔洞的位移及应力场,根据椭圆夹杂未脱胶部分应力及位移连续、脱胶部分应力自由、圆孔周围应力自由的边界条件,建立无穷线性代数方程组并进行求解,最后,构造出"脱胶模型",得到总的散射波场。通过具体算例分析不同参数对动应力集中因子的影响。

1 问题的描述

图 1 所示为理论模型,区域Ⅰ、区域Ⅱ的介质密度和弹性模量分别为 ρ_1 和 μ_1、ρ_2 和 μ_2,椭圆长、短轴分别为 a、b,圆形孔洞的半径为 r,脱胶部分所对应的起点、终点的角度为 θ_1 和 θ_2,椭圆脱胶的边界定义为 $\bar{c}$,未脱胶边界定义为 c,圆形孔洞的边界为 T。图中两个坐标的关系为:

$$\begin{cases} x_1 = x, \quad y_1 = y + h, \\ x_2 = x - d, \quad y_2 = y + h \end{cases} \tag{1}$$

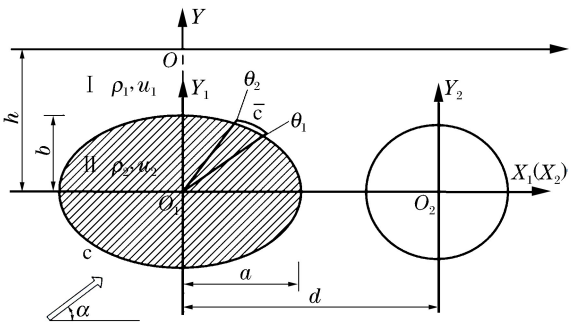


图 1 半空间含有部分脱胶的椭圆夹杂及圆形孔洞模型
Fig. 1 Model of elliptical inclusion with a partially debond curve and circular cavity in half space

* **收稿日期**: 2017-05-02; **修回日期**: 2017-08-02
基金项目: 黑龙江省自然科学基金项目(A201404)
第一作者: 齐 辉(1963—),男,博士,教授,博导; **通信作者**: 陈洪英,hongyingchen@hrbeu.edu.cn。

2　控制方程

位移函数 W 与时间因子的依赖关系为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，结合保角映射原理，满足控制方程[1]：

$$\frac{1}{\omega'(\eta)\overline{\omega'(\eta)}}\frac{\partial^2 W}{\partial\eta\partial\bar{\eta}}+\frac{1}{4}k^2W=0 \tag{2}$$

结合保角映射原理，应力表达式则可以表示为：

$$\tau_{rz}=\frac{\mu}{R\,|\omega'(\eta)|}\left(\eta\frac{\partial W}{\partial\eta}+\partial\bar{\eta}\frac{\partial W}{\partial\bar{\eta}}\right) \tag{3}$$

$$\tau_{\theta z}=\frac{\mathrm{i}\mu}{R\,|\omega'(\eta)|}\left(\eta\frac{\partial W}{\partial\eta}-\partial\bar{\eta}\frac{\partial W}{\partial\bar{\eta}}\right) \tag{4}$$

3　区域Ⅰ内散射波

根据 SH 波散射的对称特性，结合复变函数中的多极坐标移动技术，构造出区域Ⅰ内由椭圆形夹杂激发的散射波 $W_{\mathrm{IC}}^{(\mathrm{s})}$ 以及圆形孔洞激发的散射波 $W_{\mathrm{IT}}^{(\mathrm{s})}$，需要满足无穷远处的 Sommerfeld 辐射条件以及在半空间水平表面应力自由的边界条件。

在复平面 $(z_1,\bar{z}_1)$ 上，散场波场 $W_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{s})}$ 可以表示为：

$$W_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{s})}(z,\bar{z})=W_{\mathrm{IC}}^{(\mathrm{s})}+W_{\mathrm{IT}}^{(\mathrm{s})} \tag{5}$$

根据文献[13]，由椭圆夹杂产生的散射波 $W_{\mathrm{IC}}^{(\mathrm{s})}$：

$$W_{\mathrm{IC}}^{(\mathrm{s})}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}B_n\left\{H_n^{(1)}\left[k_1\,|z_1|\right]\left[\frac{z_1}{|z_1|}\right]^n+H_n^{(1)}\left[k_1\,|z_1-2\mathrm{i}h|\right]\left[\frac{z_1-2\mathrm{i}h}{|z_1-2\mathrm{i}h|}\right]^{-n}\right\} \tag{6}$$

根据文献[16]，由圆形孔洞所产生的散射波 $W_{\mathrm{IT}}^{(\mathrm{s})}$：

$$W_{\mathrm{IT}}^{(\mathrm{s})}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\left\{H_n^{(1)}\left[k_1\,|z_1-d|\right]\left[\frac{z_1-d}{|z_1-d|}\right]^n+H_n^{(1)}\left[k_1\,|z_1-d-2\mathrm{i}h|\right]\left[\frac{z_1-d-2\mathrm{i}h}{|z_1-d-2\mathrm{i}h|}\right]^{-n}\right\} \tag{7}$$

式中：B_n、C_n 是待定系数，通过脱胶椭圆夹杂及圆孔的边界条件确定，把式(6)、(7)分别代入式(3)、(4)可以得到应力表示。

由椭圆夹杂产生的应力表达式为：

$$\tau_{rz,\mathrm{IC}}^{(\mathrm{s})}=\frac{\mu_1k_1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}B_n\left[\phi_1-\phi_2\right] \tag{8}$$

$$\tau_{\theta z,\mathrm{IC}}^{(\mathrm{s})}=\frac{\mathrm{i}\mu_1k_1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}B_n\left[\phi_1+\phi_2\right] \tag{9}$$

$$\phi_1=\left[H_{n-1}^{(1)}\left[k_1\,|z_1|\right]\left[\frac{z_1}{|z_1|}\right]^{n-1}-H_{n+1}^{(1)}\left[k_1\,|z_1-2\mathrm{i}h|\right]\left[\frac{z_1-2\mathrm{i}h}{|z_1-2\mathrm{i}h|}\right]^{-(n+1)}\right]\frac{\eta z_1'}{R\,|z_1'|}$$

$$\phi_2=\left[H_{n+1}^{(1)}\left[k_1\,|z_1|\right]\left[\frac{z_1}{|z_1|}\right]^{n+1}-H_{n-1}^{(1)}\left[k_1\,|z_1-2\mathrm{i}h|\right]\left[\frac{z_1-2\mathrm{i}h}{|z_1-2\mathrm{i}h|}\right]^{-(n-1)}\right]\frac{\bar{\eta}\bar{z}_1'}{R\,|z_1'|}$$

由圆形孔洞产生的应力表达式：

$$\tau_{rz,\mathrm{IT}}^{(\mathrm{s})}=\frac{\mu_1k_1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\left[\phi_3-\phi_4\right] \tag{10}$$

$$\tau_{\theta z,\mathrm{IT}}^{(\mathrm{s})}=\frac{\mathrm{i}\mu_1k_1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\left[\phi_3+\phi_4\right] \tag{11}$$

$$\phi_3=\left[H_{n-1}^{(1)}\left[k_1\,|z_1-d|\right]\left[\frac{z_1-d}{|z_1-d|}\right]^{n-1}-H_{n+1}^{(1)}\left[k_1\,|z_1-d-2\mathrm{i}h|\right]\left[\frac{z_1-d-2\mathrm{i}h}{|z_1-d-2\mathrm{i}h|}\right]^{-(n+1)}\right]\frac{\eta z_1'}{R\,|z_1'|}$$

$$\phi_4=\left[H_{n+1}^{(1)}\left[k_1\,|z_1-d|\right]\left[\frac{z_1-d}{|z_1-d|}\right]^{n+1}-H_{n-1}^{(1)}\left[k_1\,|z_1-d-2\mathrm{i}h|\right]\left[\frac{z_1-d-2\mathrm{i}h}{|z_1-d-2\mathrm{i}h|}\right]^{-(n-1)}\right]\frac{\bar{\eta}\bar{z}_1'}{R\,|z_1'|}$$

式中：$z_1=\omega(\eta)$。

在复平面$(z_2,\bar{z}_2)$上，椭圆夹杂产生的散射波可以表示为[13]：

$$W_{\mathrm{II\,C}}^{(\mathrm{s})}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}B_n\left\{H_n^{(1)}\left[k_1\left|z_2+d\right|\right]\left[\frac{z_2+d}{\left|z_2+d\right|}\right]^n+H_n^{(1)}\left[k_1\left|z_2+d-2\mathrm{i}h\right|\right]\left[\frac{z_2+d-2\mathrm{i}h}{\left|z_2+d-2\mathrm{i}h\right|}\right]^{-n}\right\} \tag{12}$$

圆形孔洞产生的散射波可以表示为[16]：

$$W_{\mathrm{II\,T}}^{(\mathrm{s})}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\left\{H_n^{(1)}\left[k_1\left|z_2\right|\right]\left[\frac{z_2}{\left|z_2\right|}\right]^n+H_n^{(1)}\left[k_1\left|z_2-2\mathrm{i}h\right|\right]\left[\frac{z_2-2\mathrm{i}h}{\left|z_2-2\mathrm{i}h\right|}\right]^{-n}\right\} \tag{13}$$

椭圆夹杂产生的散射波应力可以表示为：

$$\tau_{rz,\mathrm{II\,C}}^{(\mathrm{s})}=\frac{k_1\mu_1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n\left[\phi_1'-\phi_2'\right] \tag{14}$$

$$\tau_{\theta z,\mathrm{II\,C}}^{(\mathrm{s})}=\frac{\mathrm{i}k_1\mu_1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n\left[\phi_1'+\phi_2'\right] \tag{15}$$

$$\phi_1'=\left[H_{n-1}^{(1)}\left(k_1\mid z_2+d\mid\right)\left[\frac{z_2+d}{\mid z_2+d\mid}\right]^{n-1}-H_{n+1}^{(1)}\left(k_1\mid z_2+d-2\mathrm{i}h\mid\right)\left[\frac{z_2+d-2\mathrm{i}h}{\mid z_2+d-2\mathrm{i}h\mid}\right]^{-(n+1)}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_1}$$

$$\phi_2'=\left[H_{n+1}^{(1)}\left(k_1\mid z_2+d\mid\right)\left[\frac{z_2+d}{\mid z_2+d\mid}\right]^{n+1}-H_{n-1}^{(1)}\left(k_1\mid z_2+d-2\mathrm{i}h\mid\right)\left[\frac{z_2+d-2\mathrm{i}h}{\mid z_2+d-2\mathrm{i}h\mid}\right]^{-(n-1)}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta_1}$$

圆形孔洞产生的散射波应力可以表示为：

$$\tau_{rz,\mathrm{II\,T}}^{(\mathrm{s})}=\frac{k_1\mu_1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\left[\phi_3'-\phi_4'\right] \tag{16}$$

$$\tau_{\theta z,\mathrm{II\,T}}^{(\mathrm{s})}=\frac{\mathrm{i}k_1\mu_1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\left[\phi_3'+\phi_4'\right] \tag{17}$$

$$\phi_3'=\left[H_{n-1}^{(1)}\left(k_1\mid z_1\mid\right)\left[\frac{z_1}{\mid z_1\mid}\right]^{n-1}-H_{n+1}^{(1)}\left(k_1\mid z_1-2\mathrm{i}h\mid\right)\left[\frac{z_1-2\mathrm{i}h}{\mid z_1-2\mathrm{i}h\mid}\right]^{-(n+1)}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_1}$$

$$\phi_4'=\left[H_{n+1}^{(1)}\left(k_1\mid z_1\mid\right)\left[\frac{z_1}{\mid z_1+d\mid}\right]^{n+1}-H_{n-1}^{(1)}\left(k_1\mid z_1-2\mathrm{i}h\mid\right)\left[\frac{z_1-2\mathrm{i}h}{\mid z_1-2\mathrm{i}h\mid}\right]^{-(n-1)}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta_1}$$

4 区域Ⅱ内的驻波

在椭圆形弹性夹杂内，构造一驻波$W_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{st})}$，使其脱胶部分 $\bar{\mathrm{c}}$ 满足应力自由的边界条件，而其余 c 部分则满足应力和位移连续的边界条件，同时，利用保角映射的方法，对应的驻波表示为：

$$W_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{st})}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}D_n\left\{J_n\left(k_2\left|z_1\right|\right)\left[\frac{z_1}{\left|z_1\right|}\right]^n\right\} \tag{18}$$

代入应力表达式，则其应力表示为：

$$\tau_{rz}^{(\mathrm{st})}=\frac{\mu_2k_2}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}D_n\left[J_{n-1}\left[k_2\left|z_1\right|\right]\left[\frac{z_1}{\left|z_1\right|}\right]^{n-1}\frac{\eta z_1'}{R\left|z_1'\right|}-J_{n+1}\left[k_2\left|z_1\right|\right]\left[\frac{z_1}{\left|z_1\right|}\right]^{n+1}\frac{\partial\bar{\eta}\bar{z}_1'}{R\left|z_1'\right|}\right] \tag{19}$$

$$\tau_{\theta z}^{(\mathrm{st})}=\frac{\mathrm{i}\mu_2k_2}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}D_n\left[J_{n-1}\left[k_2\left|z_1\right|\right]\left[\frac{z_1}{\left|z_1\right|}\right]^{n-1}\frac{\eta z_1'}{R\left|z_1'\right|}+J_{n+1}\left[k_2\left|z_1\right|\right]\left[\frac{z_1}{\left|z_1\right|}\right]^{n+1}\frac{\partial\bar{\eta}\bar{z}_1'}{R\left|z_1'\right|}\right] \tag{20}$$

式中：D_n为待求的未知系数。

5 Green 函数Ⅰ的构造

如图 2 所示，出平面线源荷载作用在含有椭圆夹杂的弹性半空间内的任意一点，利用G_{I}来表示其产生的位移场的基本解，同时，满足控制方程(2)，边界条件可以表示为：

$$G_{\mathrm{I}}=G_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{st})},\tau_{rz,\mathrm{I}}=\tau_{rz,\mathrm{II}}^{(\mathrm{st})} \tag{21}$$

在一个完整的弹性全空间内，出平面线源荷载$\delta(z-z_0)$作用下，在复平面$(z_1,\bar{z}_1)$上入射波$G_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{i})}$表示为：

$$G_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{i})}=\frac{\mathrm{i}}{4\mu_1}H_0^{(1)}(k_1|z_1-z_0|) \tag{22}$$

稳态的 SH 波 $G_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{i})}$ 入射，从而在水平界面产生反射波 $G_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{r})}$，可以表示为如下形式：

$$G_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{r})}=\frac{\mathrm{i}}{4\mu_1}\cdot H_0^{(1)}(k_1|z_1-\bar{z}_0-2\mathrm{i}h|) \tag{23}$$

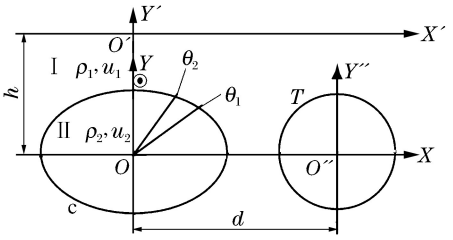


图 2 含椭圆形弹性夹杂及圆孔的半空间作用一出平面线源荷载模型

Fig. 2 Half-space model of elliptical inclusion and circular cavity impacted by an out-plane source load

将式(22)、(23)分别代入(3)、(4)式得到应力表达式：

$$\tau_{rz,\mathrm{I}}^{(\mathrm{i})}=-\frac{\mathrm{i}k_1}{8}\left(H_1^{(1)}(k_1|z_1-z_0|)\frac{\bar{z}_1-\bar{z}_0}{|z_1-z_0|}\frac{\eta z_1'}{R|z_1'|}+H_1^{(1)}(k_1|z_1-z_0|)\frac{z_1-z_0}{|z_1-z_0|}\frac{\bar{\eta}\bar{z}_1'}{R|z_1'|}\right) \tag{24}$$

$$\tau_{\theta z,\mathrm{I}}^{(\mathrm{i})}=\frac{k_1}{8}\left(H_1^{(1)}(k_1|z_1-z_0|)\frac{\bar{z}_1-\bar{z}_0}{|z_1-z_0|}\frac{\eta z_1'}{R|z_1'|}+H_1^{(1)}(k_1|z_1-z_0|)\frac{z_1-z_0}{|z_1-z_0|}\frac{\bar{\eta}\bar{z}_1'}{R|z_1'|}\right) \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\tau_{rz,\mathrm{I}}^{(\mathrm{r})}=-\frac{\mathrm{i}k_1}{8}\Bigg(&H_1^{(1)}(k_1|z_1-\bar{z}_0-2\mathrm{i}h|)\frac{\bar{z}_1-z_0+2\mathrm{i}h}{|z_1-\bar{z}_0-2\mathrm{i}h|}\frac{\eta z_1'}{R|z_1'|}+\\&H_1^{(1)}(k_1|z_1-\bar{z}_0-2\mathrm{i}h|)\frac{z_1-\bar{z}_0-2\mathrm{i}h}{|z_1-\bar{z}_0-2\mathrm{i}h|}\frac{\bar{\eta}\bar{z}_1'}{R|z_1'|}\Bigg)\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\theta z,\mathrm{I}}^{(\mathrm{r})}=\frac{k_1}{8}\Bigg(&H_1^{(1)}(k_1|z_1-\bar{z}_0-2\mathrm{i}h|)\frac{\bar{z}_1-z_0+2\mathrm{i}h}{|z_1-\bar{z}_0-2\mathrm{i}h|}\frac{\eta z_1'}{R|z_1'|}-\\&H_1^{(1)}(k_1|z_1-\bar{z}_0-2\mathrm{i}h|)\frac{z_1-\bar{z}_0-2\mathrm{i}h}{|z_1-\bar{z}_0-2\mathrm{i}h|}\frac{\bar{\eta}\bar{z}_1'}{R|z_1'|}\Bigg)\end{aligned} \tag{27}$$

要求得这三个待定系数 B_n、C_n、D_n，需要建立线性代数方程组，本文中分别根据椭圆夹杂周边的位移连续、径向应力连续、圆孔周边的径向应力自由的边界条件，得到问题解的积分方程组：

$$\begin{cases}G_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{i})}+G_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{r})}+G_{\mathrm{I}\,C}^{(\mathrm{s})}+G_{\mathrm{I}\,T}^{(\mathrm{s})}=W_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{st})}\\ \tau_{rz,\mathrm{I}}^{(\mathrm{i})}+\tau_{rz,\mathrm{I}}^{(\mathrm{r})}+\tau_{rz,\mathrm{I}\,C}^{(\mathrm{s})}+\tau_{rz,\mathrm{I}\,T}^{(\mathrm{s})}=\tau_{rz,\mathrm{II}}^{(\mathrm{st})}\\ \tau_{rz,\mathrm{II}}^{(\mathrm{i})}+\tau_{rz,\mathrm{II}}^{(\mathrm{r})}+\tau_{rz,\mathrm{II}\,C}^{(\mathrm{s})}+\tau_{rz,\mathrm{II}\,T}^{(\mathrm{s})}=0\end{cases} \tag{28}$$

将应力及位移代入式(28)，可得：

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}B_n\xi_n^{(11)}+C_n\xi_n^{(12)}+D_n\xi_n^{(13)}=\xi^{(1)}\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}B_n\xi_n^{(21)}+C_n\xi_n^{(22)}+D_n\xi_n^{(23)}=\xi^{(2)}\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}B_n\xi_n^{(31)}+C_n\xi_n^{(32)}=\xi^{(3)}\end{cases} \tag{29}$$

用 $\exp(-\mathrm{i}m\theta)$ 同时乘以式(29)等式两边，同时在$(-\pi,\pi)$上对所求等式积分，可求得待定系数 B_n、C_n、D_n的线性代数方程组，对方程式控制精度截断有限项，求得未知待定系数，得到 Green 函数的解。

6　入射波和反射波

半空间内存在一稳态 SH 波 $W_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{i})}$ 入射，入射方向与 x 轴正向的夹角为 α_0，在界面上产生反射波 $W_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{r})}$：

$$W_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{i})}=W_0\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k_1}{2}\left[(z-\mathrm{i}h)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0}+(\bar{z}+\mathrm{i}h)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}\right]\right\} \tag{30}$$

$$W_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{r})}=W_0\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k_1}{2}\left[(z-\mathrm{i}h)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}+(\bar{z}+\mathrm{i}h)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0}\right]\right\} \tag{31}$$

7 动应力集中因子

对于工程实践来说，不规则缺陷、复合缺陷周围的动应力集中情况更符合实际，因此，本文中主要讨论脱胶椭圆夹杂周围 DSCF 的变化情况，根据参考文献[1]，动应力集中因子 $\tau_{\theta z}^{*}$ 可被定义为：

$$\tau_{\theta z}^{*}=\left|\tau_{\theta z,\mathrm{I}}^{(\mathrm{ct})}/\tau_{0}\right| \tag{32}$$

式中：$\tau_{\theta z}^{*}$ 表示椭圆夹杂周边的动应力集中因子，$\tau_{\theta z,\mathrm{I}}^{(\mathrm{ct})}$ 表示椭圆夹杂周边的应力，τ_{0} 为入射波产生的最大幅值，且 $\tau_{0}=W_{0}\mu_{1}k_{1}$。

8 算例及分析

通过给出具体算例，分析在不同的入射角度、入射波数、夹杂埋深、缺陷之间的距离、脱胶角度、介质软硬程度等影响下，脱胶椭圆夹杂周围的 $\tau_{\theta z}^{*}$ 的分布情况。引入无量纲参数 $\mu^{*}\ 1=\mu_{2}/\mu_{1}$，$k_{1}^{*}=k_{2}/k_{1}$，椭圆长、短轴比为 $a/b=1.25$，入射角度为 α，脱胶角度 $\theta_{1}^{*}=\theta_{2}/\theta_{1}$，夹杂的埋深采用无量纲参数 h/a。椭圆夹杂与圆孔的位置坐标用无量纲参数 d/r。

为了验证计算结果的准确性，将本文的研究模型退化为半无限空间中圆形孔洞的模型，取与文献[15]相同的参数，其中 $\mu_{2}=0$，$k_{21}=1.0$，$a/b=1.25$，$d/r=0$，无量纲位置参数取 $h/a=12.0$，入射角度为 $\alpha=90°$时，图 3 为 $\tau_{\theta z}^{*}$ 的分布情况，其与文献[15]的结果一致，证明本文的计算方法准确可行。

由图 4 可以看出，$\tau_{\theta z}^{*}$ 在上半部分的值明显大于下半部分，且变化更加复杂。在下半部分的最大值在 $\theta=269°$时为 3.90，比出现脱胶部分的最大值降低了 46%，由此可知，脱胶结构的存在会使能量重新分配，对动应力集中因子的影响较大。

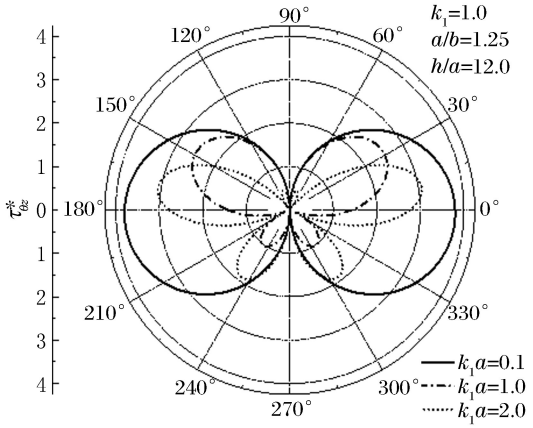


图 3 SH 波垂直入射时 $\tau_{\theta z}^{*}$ 随着 k_1a 的分布

Fig. 3 Distribution of DSCF with k_1a for vertically incident SH wave

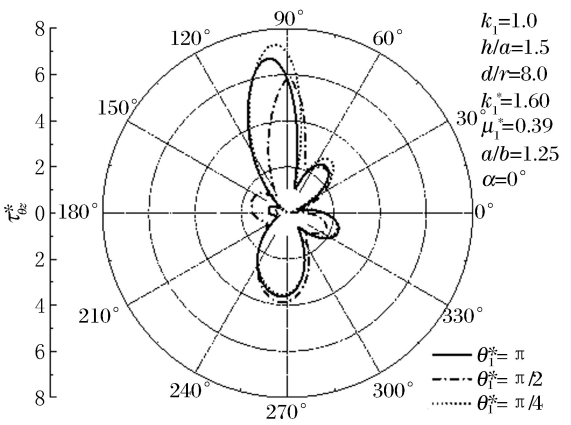


图 4 SH 波水平入射时 $\tau_{\theta z}^{*}$ 随着 θ_1^{*} 的变化情况

Fig. 4 Distribution of DSCF with θ_1^{*} for horizontally incident SH wave

由图 5 可知，SH 波以 $k_1a=1.0$ 入射时，$\alpha=0°$的 $\tau_{\theta z}^{*}$ 最大值为 4.09，比 $\alpha=45°$时最大值提高了 56%，比 $\alpha=90°$时最大值提高了 70%。在 $k_1a=2.0$ 时，在 SH 波水平入射时，$\tau_{\theta z}^{*}$ 的最大值为 4.84，比 $\alpha=90°$时的最大值增加了 1.7 倍，因此，不同入射角度对 $\tau_{\theta z}^{*}$ 的影响不同，在水平入射时对 $\tau_{\theta z}^{*}$ 产生的影响相对较大。

由图 6 可知，在 $k_1a=0.5$ 时，波数比 $k_1^{*}=2.0$ 时，$\tau_{\theta z}^{*}$ 最大值为 3.4，比 $k_1^{*}=1.0$ 时提高了 70%。在 $k_1a=1.0$ 时，波数比 $k_1^{*}=2.0$ 时，$\tau_{\theta z}^{*}$ 比 $k_1^{*}=1.0$ 时提高了 3 倍。图 6(b)比图 6(a)中 $\tau_{\theta z}^{*}$ 的最大值增高了 93%，因此，SH 波入射频率增加，对 $\tau_{\theta z}^{*}$ 有较大影响，波数比 k_1^{*} 的变化，导致 $\tau_{\theta z}^{*}$ 的变化更加复杂。

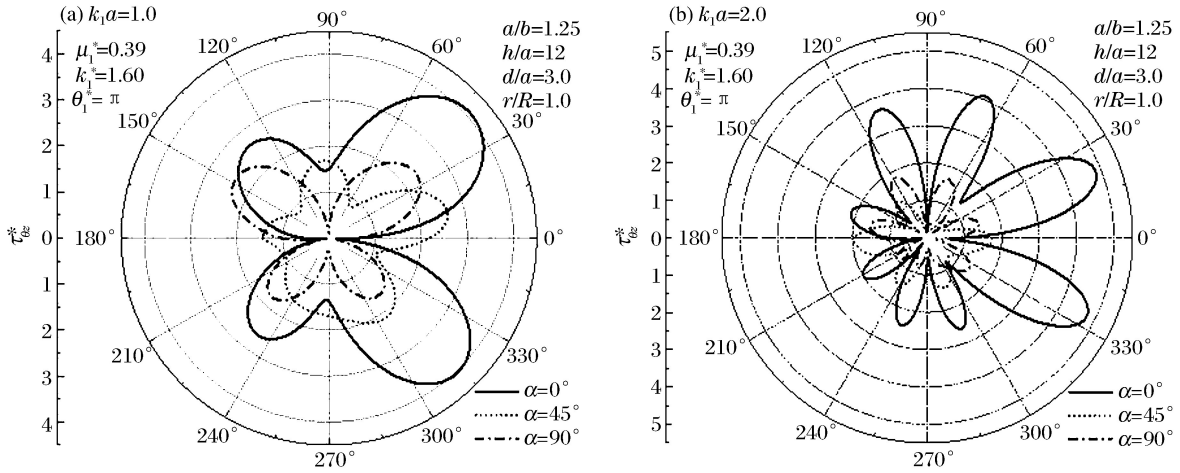


图 5　SH 波水平入射时随不同角度 α 在不同入射波频率 k_1a 条件下 $\tau_{\theta z}^*$ 的分布

Fig. 5　Distribution of DSCF versus the frequency of incident wave at different incident angles for horizontally incident SH wave

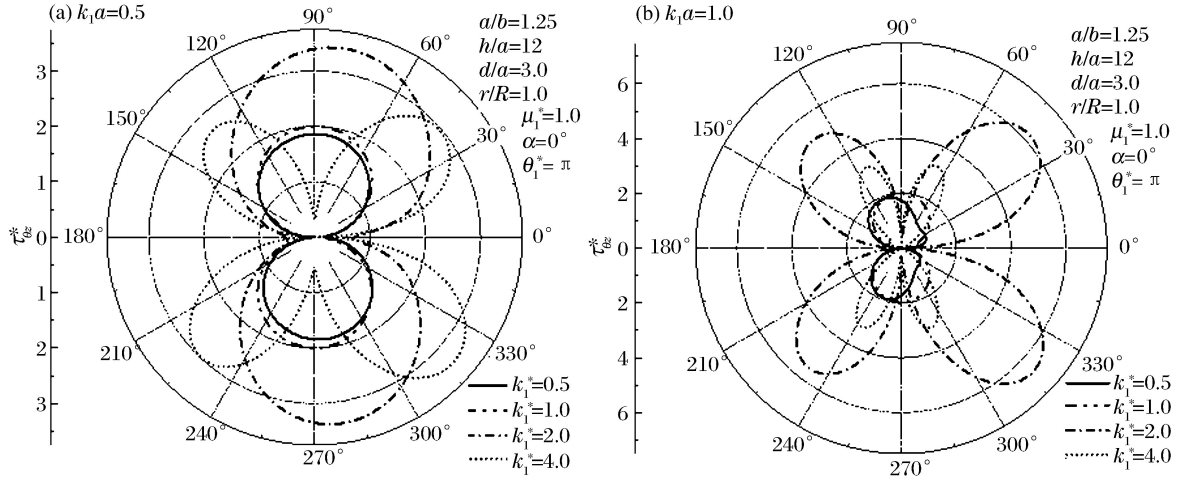


图 6　SH 波水平入射时 $\tau_{\theta z}^*$ 随着 k_1^* 的分布

Fig. 6　Distribution of DSCF with k_1^* for horizontally incident SH wave

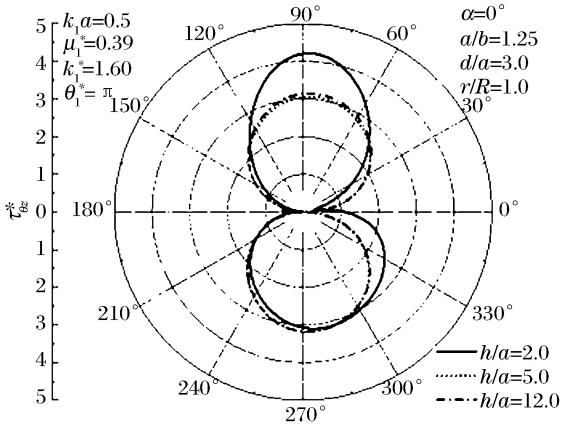


图 7　SH 波水平入射时 $\tau_{\theta z}^*$ 随着 h/a 的变化情

Fig. 7　Distribution of DSCF with h/a for horizontally incident SH wave

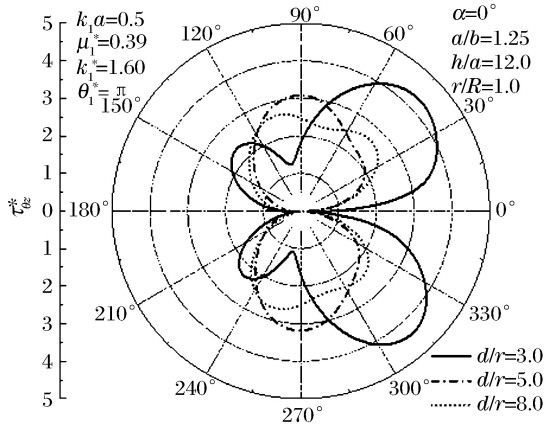


图 8　SH 波水平入射时 $\tau_{\theta z}^*$ 随着 d/r 的变化情况

Fig. 8　Distribution of DSCF with d/r for horizontally incident SH wave

由图 7 可知，在 $h/a\geqslant 5.0$ 时，$\tau_{\theta z}^{*}$ 的最大值约 3.0，夹杂埋深 h/a 对 $\tau_{\theta z}^{*}$ 的数值影响非常小，而 $h/a<5.0$ 时，在脱胶部分 $\tau_{\theta z}^{*}$ 的变化比较大而且复杂，最大值为 4.1，所以应该重视夹杂埋深对于 $\tau_{\theta z}^{*}$ 的影响。

由图 8 可知，在 $k_1 a=1.0$ 时，$\tau_{\theta z}^{*}$ 在 $d/r=3.0$ 时达到最大值 4.39，而 $d/r=5.0$ 最大值为 2.68，比 $d/r=3.0$ 时最大值降低了 64%，d/r 越小，$\tau_{\theta z}^{*}$ 越大。随着两个缺陷水平距离的增加，互相的影响减弱，使脱胶椭圆夹杂附近的 $\tau_{\theta z}^{*}$ 降低。

由图 9 可知，椭圆形夹杂比基体更软，在 SH 波以低频入射时，$\tau_{\theta z}^{*}$ 成对称分布，形状比较规则，入射频率的最大值在 $k_1 a=2.0$ 时比 $k_1 a=0.1$ 时提高了 95%。夹杂与基体比较硬时，$\tau_{\theta z}^{*}$ 在 $k_1 a=1.0$ 时达到最大值 1.31，比夹杂较基体比较软时降低了 78%，所以夹杂较基体软硬不同对 $\tau_{\theta z}^{*}$ 有非常大的影响。

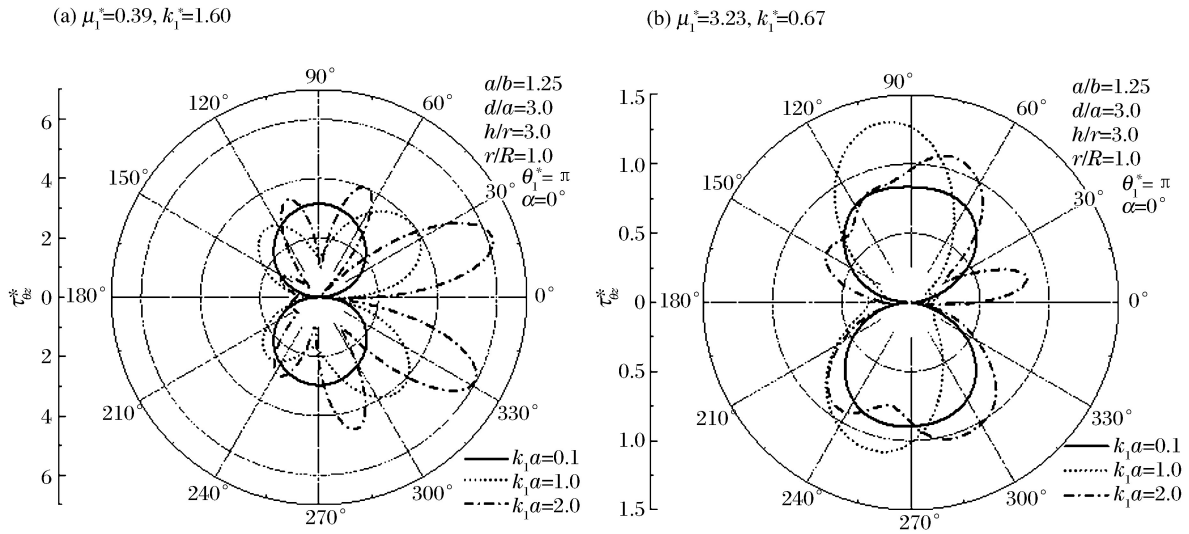


图 9 SH 波水平入射时 $\tau_{\theta z}^{*}$ 随着 k_1^{*} 和 μ_1^{*} 的分布

Fig. 9 Distribution of DSCF with k_1^{*} and μ_1^{*} for horizontally incident SH wave

9 结 论

利用复变函数法、Green 函数法以及“保角映射”技术，通过构造“脱胶模型”，结合多极坐标移动技术，分析了圆孔对于椭圆附近动应力集中因子的影响，得到了 SH 波对于半空间内含有部分脱胶的椭圆夹杂及圆孔散射的解析解，通过研究分析表明：

(1)入射角度、入射波频率、夹杂埋深、不同缺陷之间的距离及脱胶角度、夹杂较基体的软硬程度均对动应力集中因子存在影响；

(2)入射频率越高，动应力集中因子越大；

(3)动应力集中因子会随着夹杂距离水平界面的垂直距离的增加而减小，且在达到一定距离后 $\tau_{\theta z}^{*}$ 趋于稳定；

(4)圆形孔洞距离椭圆夹杂的距离越远，椭圆夹杂附近的动应力集中因子越小；

(5)不同的脱胶角度对动应力集中因子的影响均不同；

(6)夹杂较基体的软硬程度不同，对动应力集中因子的影响差别较大，因此在工程施工中应选择合适的材料。

参考文献：

[1] PAO Y H, MOW C C, Achenbach J D. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations[J]. Journal of Applied Mechanics, 1973,40(4):213-219.

[2] COUSSY O. Scattering of SH-waves by a cylindrical inclusion presenting an interface crack[J]. CR Acad Sci Paris, 1982,295:1043-1046.

[3] COUSSY O. Scattering of elastic waves by an inclusion with an interface crack[J]. Wave Motion, 1983,6(3):223-236.

[4] 汪越胜，王铎. SH 波对有部分脱胶衬砌的圆形孔洞的散射[J]. 力学学报，1994,26(4):462-469.
WANG Yuesheng, WANG Duo. Diffraction of SH-waves by a circular cavity with a particular debonded liner[J]. Acta Mechanica Sinica, 1994,26(4):462- 469.

[5] 汪越胜，王铎. 剪切波作用下圆弧形界面裂纹的动强度因子[J]. 固体力学学报，1993,14(4):362-367.
WANG Yuesheng, WANG Duo. Dynamic stress intensity factors of circular arcshaped interface cracks subjected to shear waves[J]. Acta Solida Mechanics Sinica, 1993,14(4):362-367.

[6] LEE V W, KARL J. Diffraction of SV waves by underground, circular, cylindrical cavities[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1992,11(8):445-456.

[7] QI Hui, YANG Jie, SHI Yong. Scattering of SH-wave by cylindrical inclusion near interface in bimaterial half-space[J]. Journal of Mechanics, 2011,27(1):37-45.

[8] 齐辉，丁晓浩，赵元博. 双相介质弹性半空间垂直界面附近椭圆形夹杂对 SH 波的散射[J]. 振动与冲击，2015,34(24):76-81.
QI Hui, DING Xiaohao, ZHAO Yuanbo. Scattering of SH-wave by an elliptic inclusion near vertical interface in a bi- material half-space[J]. Journal of Vibration and Shock, 2015,34(24):76-81.

[9] 杨杰. 半空间垂直界面裂纹及圆夹杂对 SH 波的散射[D]. 哈尔滨：哈尔滨工程大学，2012:22-34.

[10] LOEBER J F, SIH G C. Diffraction of antiplane shear waves by a finite ccrack[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1967,44(1):90-98.

[11] 陈冬妮，齐辉. SH 波入射覆盖层半空间圆孔及圆夹杂的动力分析[J]. 哈尔滨工程大学学报，2014,35(2):171-176.
CHEN Dongni, QI Hui. Dynamic analysis for circular cavity and inclusion impacted by SH-wave in a layered half-space[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2014,35(2):171-176.

[12] 张希萌，齐辉，项梦. 半空间双相压电介质垂直边界附近圆孔对 SH 波的散射[J]. 爆炸与冲击，2017,37(4):591-599.
ZHANG Ximeng, QI Hui, XIANG Meng. Scattering of SH-wave by a circular cavity near the vertical boundary [J]. Explosion and Shock Waves, 2017,37(4):591-599.

[13] 杨在林，许华南，黑宝平. 半空间椭圆夹杂与裂纹对 SH 波的散射[J]. 振动与冲击，2013,32(11):56-61.
YANG Zailin, XU Huanan, HEI Baoping. Interaction of elliptical and crack under incident SH-wave in a half-space[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013,32(11):56-61.

[14] 赵嘉喜，齐辉，杨在林. 含有部分脱胶的浅埋圆夹杂对 SH 波的散射[J]. 岩土力学，2009,30(5):1297-1302.
ZHAO Jiaxi, QI Hui, YANG Zailin. Scattering of SH-waves by a shallow buried cylindrical inclusion with a partially debonded curve in half space[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009,30(5):1297-1302.

[15] 林宏，刘殿魁. 半无限空间中圆形孔洞周围 SH 波的散射[J]. 地震工程与工程振动，2002,22(2):9-16.
LIN Hong, LIU Diankui. Scattering of SH-wave around circular cavity in half-space[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2002,22(2):9-16.

[16] 赵元博，齐辉，丁晓浩，等. SH 波作用下地表软覆盖层中圆形夹杂的动应力分析[J]. 爆炸与冲击，2017,37(6):982-989.
ZHAO Yuanbo, QI Hui, DING Xiaohao, et al. Dynamic analysis for shallow buried circular inclusion impacted by SH-wave in a softlayered half-space[J]. Explosion and Shock Waves, 2017,37(6):982-989.

[17] 陈志刚. 平面 SH 波在浅埋椭圆柱形孔洞上的散射与应力集中[J]. 暨南大学学报，2005,26(3):324-330.
CHEN Zhigang. Scattering of SH-wave by a shallow buried elliptic cylindrical cavity and dynamic stress concentration[J]. Journal of Jinan University, 2005,26(3):324-330.

Scattering of SH-wave by elliptical inclusion with partial debond curve and circular cavity in half space

QI Hui, CHEN Hongying, ZHANG Ximeng, ZHAO Yuanbo, XIANG Meng
(*College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin* 150001, *Heilongjiang, China*)

Abstract: In order to study the scattering problems of SH-wave by elliptical inclusion with partial debond curve and circular cavity in half space. The method of "conformal mapping" is used to map the elliptical inclusions into circular inclusions. The displacement field and the stress field of the elliptical inclusion and circular cavity are obtained by Green's function method with the ridding of image method. Secondly, infinite system of linear equations are established by boundary conditions, which are continuous around the elliptical inclusion with the displacement and stress, and then the unknown coefficients of wave function are solved by the free around circular cavity with stress. Finally, the "partial debond curve model" is constructed, the equal stress with opposite direction is applied in the partial debond curve. By which we obtain the total displacement field of the elliptical inclusion with a partially debond curve and circular in the half space. Numerical examples show that the dynamic stress concentration factor (DSCF) is influenced by the incident angle, the frequency of incident wave, the distance of the defect, the depth of inclusion and the partial debond curve angle.

Keywords: SH wave; scattering; elliptic inclusion; partial debond curve; Green's function; conformal mapping; dynamic stress factor

(责任编辑 曾月蓉)