DOI: 10.11883/bzycj-2016-0377 文章编号: 1001-1455(2018)04-0925-06

基于分形理论的高强混凝土动态损伤本构关系*

焦楚杰[1],李习波[2],程从密[1],李从波[1]
(1.广州大学土木工程学院,广东 广州 510006;
2.清远市省级职教基地筹建办公室,广东 清远 511500)

摘要: 基于高强混凝土(HSC)试块在 SHPB 冲击实验中的分形损伤演化规律,推导了 HSC 的分形损伤变量表达式,标定了 HSC 裂纹的分形维数范围。然后参考 ZWT 模型,并结合 HSC 实验过程中的应变率相关性、动态损伤特性及近似恒应变率,推导了分形损伤演化的 HSC 动态损伤本构方程。采用 4 组应变率工况下的 C60、C80 混凝土应力-应变曲线对本构方程进行验证,理论曲线和实验曲线吻合较好。

关键词: 分形理论;高强混凝土;分离式霍普金森杆;动态损伤;本构关系
中图分类号: O346.5 **国标学科代码**: 1301540 **文献标志码**: A

混凝土是一种包括多级多相介质的非均匀材料。在混凝土破坏过程中,其裂缝扩展方向通常按照“Z”字形路径向外扩展,并且在尺寸较大的“Z”字形裂纹之中,穿插着较小尺寸的“Z”字形裂纹,错综复杂的裂纹使混凝土构件的断裂面表现出凸凹不平的破坏形态[1-2]。分形理论适用于描述上述不规则性、不确定性、模糊性和非线性[3-4]。本文中拟基于前期 C60、C80 级高强混凝土(high strength concrete, HSC)的 SHPB 冲击实验[5],采用分形维数的方法分析 HSC 在 SHPB 冲击荷载作用下的内部细观损伤演化行为,并对其采用动态损伤因子进行定量分析,研究 HSC 的动态损伤本构关系。

1 基于分形理论的损伤演化

1.1 基本假定

Bazant 等[6]发现,当测量尺度 δ 无限趋近于零时,分形曲线长度将趋近无穷大。然而,实际试块的裂纹扩展路径不可能达到无穷大的长度。因此可以假定,在量测尺度范围$[\delta_{\min},\delta_{\max}]$内,试块破坏由分形裂纹扩展而引起。此外,参照平板单向受拉 I 型单裂纹扩展断裂问题(如图 1 所示),增加如下假定:混凝土试块处于平面应力状态,扩展裂纹具有分形自相似性。

假设荷载作用下试块裂纹扩展长度为 $2l$,裂纹扩展的投影长度为 $2l_0$,Mandelbrot 等[7]研究表明:

$$l=l_0^{D_f}\delta^{1-D_f} \tag{1}$$

式中:D_f 为裂纹的分形维数,取值范围为 1.0~2.0;δ 为裂纹测量尺度,满足:

$$\delta=\frac{r_i}{a} \tag{2}$$

式中:r_i 为横截面分形维数的测量尺码,以粗骨料的最小粒径为观测尺度;a 为被覆盖区域的特征尺寸,在 R^2 平面区域上,a 为区域的边长;δ 的取值范围为$[\delta_{\min},\delta_{\max}]$。

谢和平等[8]确定了混凝土损伤分形的物理标度域范围,即 $\delta\in(0,1]$。由前期实验结果,$r_i=5$ mm,$a=70$ mm,因此:

$$\delta=\frac{r_i}{a}=\frac{1}{14} \tag{3}$$

* 收稿日期: 2016-12-13; 修回日期: 2017-04-22
基金项目: 国家自然科学基金项目(51778158,51478128,51278135); 广东省水利科技创新重点项目(2017-32); 住房和城乡建设部科研开发项目(2010-K3-27,2010-k4-18); 广州大学重点科技项目培育项目(2015)
第一作者: 焦楚杰(1974—),男,教授,博士生导师,jiaochujie@sina.com。

依照 Borodich 力线法的定义[9]，当试块无初始裂纹时，力线近似为直线。当试块开裂后，裂纹区域的开始逐渐得到释放，裂纹尖端附近的力线场表现出非均匀性，此时，开裂区域近似表现为菱形或椭圆形，如图 2 所示。

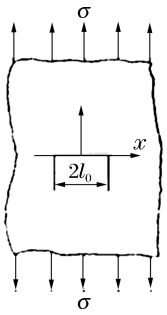


图 1 平板中的分形裂纹

Fig. 1 Fractal crack in the plate

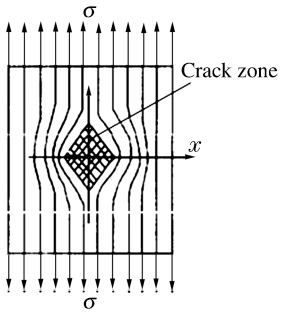


图 2 裂纹扩展时平板中的力线

Fig. 2 Force lines in the plate with a crack

根据分形曲线的特征，图 2 中的裂纹区域边界可以由标准 Kock 分形曲线构造而成。如果构造过程中裂纹区域的面积保持不变，则裂纹区域的边界周长 L 为：

$$L = 4l = 4l_0^{D_f}\delta^{1-D_f} \tag{4}$$

由此可得：

$$l_0 = \left(\frac{L\delta^{1-D_f}}{4}\right)^{\frac{1}{D_f}} = \frac{L^{\frac{1}{D_f}}\delta^{\frac{D_f-1}{D_f}}}{2^{\frac{2}{D_f}}} \tag{5}$$

同时，由式(5)可得裂纹分形区域周长 L 与面积 A(一般假设为常数 λl_0^2，其中 λ 为与开裂区域形状有关的常数)的关系：

$$A = \lambda l_0^2 = \lambda\left[L^{\frac{1}{D_f}}\delta^{\frac{D_f-1}{D_f}}2^{-\frac{2}{D_f}}\right]^2 \tag{6}$$

1.2 分形损伤演化

在 SHPB 实验中，HSC 试块在不同应力作用水平下，承载面内微裂纹的分布具有分形的自相似性，图 3 为显微镜观测 HSC 试块承载面上细观微裂纹分布图，在到达峰值应力前，损伤区域的分形维数随着应力增加而增加；在峰值应力点时，分形维数在损伤区域达到极限值；超过峰值应力后，数值开始下降，分形维数在承载面损伤区域的变化反映出 HSC 试块内部细观损伤演化行为。

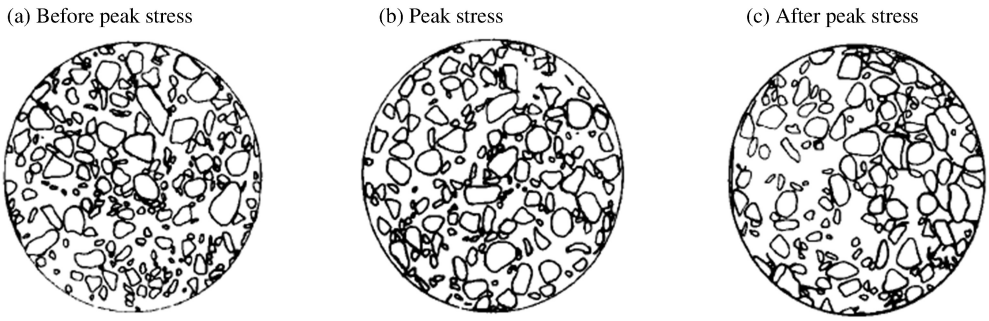


图 3 HSC 试块承载面裂纹分布的显微观测

Fig. 3 Microscopic observation of crack distributed on bearing surface of HSC specimen

在欧氏几何图形中，图形面积 A_0 与周长 L_0 之间的关系为：

$$A_0 = \eta_0 L_0^2 \tag{7}$$

式中：η_0 为图形的形状参数。考虑分形效应的损伤变量时，参考裂纹区域边界周长式(4)和文献[10]，损伤面的分形周长 L 和表观周长 L_0 之间的关系为：

$$L = 4L_0^{D_f}\delta^{1-D_f} \tag{8}$$

欧氏材料表观损伤变量[11]定义为：

$$\omega = A_k / A_c \tag{9}$$

将式(7)代入式(9)，推导出试块的表观损伤变量 ω 可以表示为：

$$\omega = A_k / A_c = (L_k / L_c)^2 \tag{10}$$

式中：A_k 和 A_c 均为跟图形形状有关的参数，在同一研究对象中取值相等；L_k、L_c 分别为 A_k 和 A_c 对应断裂面的周长。

根据分形损伤变量 ω_f 跟表观损伤变量 ω 之间的关系，并结合升维法可以得到关系式[12]：

$$\omega_f = \omega \delta^{2-D_f} \tag{11}$$

将式(6)代入到式(10)得：

$$\omega = A_k / A_c = 16^{1/D_{f,c}-1/D_{f,k}} \tag{12}$$

将式(11)代入到式(12)可得出分形空间内分形损伤变量：

$$\omega_f = 16^{1/D_{f,c}-1/D_{f,k}} (r_i / a)^{2-D_{f,k}} \tag{13}$$

由式(13)可知，分形损伤变量仅跟裂纹扩展分形维数有关，与量测尺度 δ 无关；又因为 A_c 是承载面的初始承载面积，因此 $D_{f,c} = 1.0$，并将其代入式(13)，则：

$$\omega_f = 16^{1-1/D_{f,k}} (r_i / a)^{2-D_{f,k}} \tag{14}$$

式(14)即为所求的混凝土分形损伤变量表达式。若 $D_{f,k}=1$，则 $16^{(1-1/D_{f,k})}=1$，表示裂纹还未开始扩张，$D_{f,k}=D_{f,c}=1$，即分形损伤变量跟表观损伤变量相等，扩张裂纹为光滑，无分形效应。

对 $D_{f,k}$ 的取值范围进行讨论，由式(14)可知，则 ω_f 是关于 $D_{f,k}$ 的增函数，因此 $D_{f,k}$ 在(1,2)范围内有最大取值。由式(3)和损伤的含义：

$$\omega_f = 16^{1-1/D_{f,k}} (r_i / a)^{2-D_{f,k}} \leqslant 1 \tag{15}$$

计算可得 $D_{f,k} \leqslant 1.604$，即 $D_{f,k}$ 的取值范围为 1.0～1.604。其物理意义是 HSC 试块的分形损伤限值为 1.604，超过该限值后，HSC 试块便失去承载能力。

2　HSC 动态损伤本构关系的建立

唐志平[13]针对环氧树脂的冲击力学性能研究，提出了朱-王-唐(ZWT)本构模型：

$$\begin{cases} \sigma = f(\varepsilon) + \varphi(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \\ f(\varepsilon) = E_0 \varepsilon + \alpha \varepsilon^2 + \beta \varepsilon^3 \\ \varphi(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = E_1 \int_0^t \dot{\varepsilon}\, e^{-(t-\tau)/\theta_1} d\tau + E_2 \int_0^t \dot{\varepsilon}\, e^{(t-\tau)/\theta_2} d\tau \end{cases} \tag{16}$$

式中：σ 为应力；ε 为应变；E_0 为平衡态弹性模量；α、β 为材料弹性常数；t 为时间；$\dot{\varepsilon}$ 为应变率；E_1 和 θ_1 分别为低频 Maxwell 单元所对应的弹性常数和松弛时间；E_2 和 θ_2 为高频 Maxwell 单元所对应的弹性常数和松弛时间。σ 反映了非线性黏弹性响应，由两部分组成：一部分与应变率无关的非线性瞬态响应；另一部分是与应变率相关的线性非瞬态响应。$\varphi(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ 的两个积分式分别代表具有不同松弛时间的两个 Maxwell 单元，第 1 个 Maxwell 单元描述低频(低应变率)下的黏弹性响应，第 2 个 Maxwell 单元描述高频(高应变率)下的黏弹性响应。

在冲击载荷条件下，HSC 表现出更强的应变率相关性，并且还伴有动态损伤的发生和扩展，因此，需要对 ZWT 模型进行改进。式(16)中，$f(\varepsilon)$ 表示与应变率无关的平衡态应力，共由 3 项组成，描述了材料的非线性弹性响应。试块在达到一定的应变时，混凝土试块内部的微裂纹逐渐出现失稳扩展，导致试块的损伤，应力-应变曲线表现出明显的非线性，但是在应变较小的应力-应变曲线初始阶段，实验曲线表现为近似的线性[14]。因此可以把 $f(\varepsilon)$ 近似为线弹性，即：

$$f(\varepsilon) = E_0 \varepsilon \tag{17}$$

SHPB 冲击压缩技术通过改进，比如采用波形整形技术，很大程度地降低了振荡的影响，使得实验过程处于近似恒应变率($\dot{\varepsilon}=\text{const}$，$\varepsilon = \dot{\varepsilon} t$)。据此可对 ZWT 模型的黏性项 $\varphi(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ 进行简化计算：

$$\begin{aligned}\varphi(\varepsilon,\dot{\varepsilon}) &= E_1\int_0^t \dot{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-(t-\tau)/\theta_1}\,\mathrm{d}\tau + E_2\int_0^t \dot{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{(t-\tau)/\theta_2}\,\mathrm{d}\tau \\ &= E_1\theta_1\dot{\varepsilon}(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon/(\dot{\varepsilon}\theta_1)}) + E_2\theta_2\dot{\varepsilon}(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon/(\dot{\varepsilon}\theta_2)})\end{aligned} \tag{18}$$

混凝土材料的本构非线性主要源于动态损伤演化影响，而动态分形损伤演化与应变率敏感阈值密切相关。混凝土的应力-应变曲线上升段主要呈现线性，下降段主要呈现非线性。因此，要获得混凝土应力-应变曲线的下降段，就必须考虑动态损伤演化的影响。

结合式(14)和式(18)，考虑动态分形损伤演化的混凝土动态损伤本构方程为：

$$\begin{aligned}\sigma &= (1-\omega_\mathrm{f})[f(\varepsilon)+\varphi(\varepsilon,\dot{\varepsilon})] \\ &= (1-\omega_\mathrm{f})\,[E_0\varepsilon + E_1\theta_1\dot{\varepsilon}(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon/(\dot{\varepsilon}\theta_1)}) + E_2\theta_2\dot{\varepsilon}(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon/(\dot{\varepsilon}\theta_2)})]\end{aligned} \tag{19}$$

式(19)中待定参数较多，本文中采用如下方式进行处理。

(1) 忽略准静态条件下黏弹性项的影响，根据准静态应力-应变曲线切线的斜率可以直接确定 E_0。

(2) 低应变率条件下，高频 Maxwell 单元的影响很小，将动态和准静态应力-应变曲线(应变相同处)相减，得出式(20)，由此求得 E_1、θ_1。由于相减部分为非线性不显著段($\varepsilon<0.01$)，此时试块还无明显损伤，可以不考虑损伤项的影响。

$$\Delta\sigma_\mathrm{l} = E_1\theta_1\dot{\varepsilon}_{\mathrm{l}2}(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon/(\dot{\varepsilon}_{\mathrm{l}2}\theta_1)}) + E_2\theta_2\dot{\varepsilon}_{\mathrm{l}1}(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon/(\dot{\varepsilon}_{\mathrm{l}1}\theta_2)}) \tag{20}$$

同理，由于高应变率条件下，低频 Maxwell 体部分的影响很小，可以根据高应变率下 SHPB 实验获得的应力-应变曲线相减，得出式(21)，求得 E_2、θ_2 的取值范围。

$$\Delta\sigma_\mathrm{h} = E_1\theta_1\dot{\varepsilon}_{\mathrm{h}2}(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon/(\dot{\varepsilon}_{\mathrm{h}2}\theta_1)}) + E_2\theta_2\dot{\varepsilon}_{\mathrm{h}1}(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon/(\dot{\varepsilon}_{\mathrm{h}1}\theta_2)}) \tag{21}$$

(3) 根据高应变率和准静态应力-应变曲线相减，在前面两步的基础之上，再按照式(22)最终拟合出 E_1、θ_1、E_2、θ_2。

$$\Delta\sigma = E_1\theta_1\dot{\varepsilon}(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon/(\dot{\varepsilon}\theta_1)}) + E_2\theta_2\dot{\varepsilon}(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon/(\dot{\varepsilon}\theta_2)}) \tag{22}$$

3 HSC 本构模型的参数拟合与实验验证

采用前面介绍的 3 个步骤处理，利用高频 Maxwell 单元和低频 Maxwell 单元影响性的大小，对模型中的参数进行拟合求解。基于实测曲线，对 HSC 损伤本构方程进行拟合。C60 级 HSC 的拟合结果为：$E_0=29.4$ GPa，$E_1=8.1$ GPa，$\theta_1=0.1$ s，$E_2=25.7$ GPa，$\theta_2=9.0\times10^{-5}$ s；C80 级 HSC 的拟合结果为：$E_0=34.4$ GPa，$E_1=8.9$ GPa，$\theta_1=0.1$ s，$E_2=36.2$ GPa，$\theta_2=2.1\times10^{-5}$ s。

采用 HSC 试块在 SHPB 冲击压缩实验结果对动态损伤本构模型进行验证。设分形损伤因子 $D_{\mathrm{f,k}}$ 分别为 1.1、1.3、1.5、1.6，并取 4 组不同应变率工况下的 C60、C80 级 HSC 的应力-应变曲线进行比较。将实测曲线与理论模型计算所得曲线画于坐标平面内，如图 4～5 所示，其中实线为实测曲线，虚线为理论曲线。由图 4～5 可知，理论曲线和实测曲线符合较好。

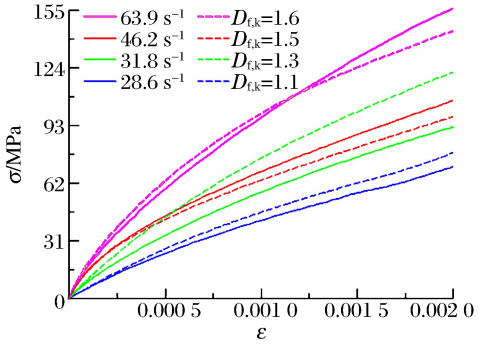


图 4 C60 级 HSC 实测曲线与理论曲线

Fig. 4 Stress-strain curves of C60 HSC obtained by experiment and theory

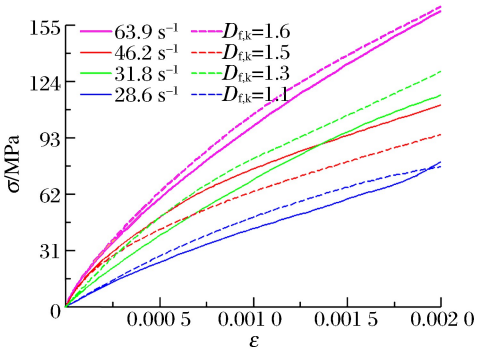


图 5 C80 实测曲线与理论曲线

Fig. 5 Stress-strain curves of C60 HSC obtained by experiment and theory

4 结　论

(1)基于 C60、C80 级 HSC 的 SHPB 冲击实验，依照 HSC 试块裂纹的不规则性、裂纹断裂表面的粗糙性具有自相似性和无标度性，采用分形维数的方法来分析 HSC 试块的内部细观损伤演化行为，推导出了 HSC 分形损伤变量表达式，标定了 HSC 裂纹的分形维数范围为 1.0～1.604，其物理意义是 HSC 的分形损伤限值为 1.604，达到这个限值，HSC 试块失去承载能力。

(2)参考 ZWT 模型，结合 HSC 实验过程中的应变率相关性、动态损伤特性，以及近似恒应变率，推导出了动态分形损伤演化的 HSC 动态损伤本构方程。为了便于方程参数的确定，根据准静态、低应变率、高应变率荷载下的 HSC 材料特性，对方程的各子项进行取舍。

(3)采用 4 组应变率工况下 C60、C80 级 HSC 应力-应变曲线，对 HSC 动态损伤本构方程进行验证，模型曲线和实验曲线有较好的吻合。

参考文献：

[1] 焦楚杰. 高与超高性能钢纤维砼抗冲击与抗爆研究[D]. 南京：东南大学，2004.
JIAO Chujie. Study on behaviour of HPSFRC and UHPSFRC subjected to impact and blast[D]. Nanjing: Southeast University, 2004.

[2] ERDEM S, BLANKSON M A. Fractal-fracture analysis and characterization of impact-fractured surfaces in different types of concrete using digital image analysis and 3D nanomap laser profilometery[J]. Construction and Building Materials, 2013,40(40):70-76.

[3] SAGAR R V, PRASAD B K R. Fracture analysis of concrete using singular fractal functions with lattice beam network and confirmation with acoustic emission study[J]. Theoretical & Applied Fracture Mechanics, 2011,55(3):192-205.

[4] CARPINTERI A, LACIDOGNA G, NICCOLINI G. Fractal analysis of damage detected in concrete structural elements under loading[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2009,42(4):2047-2056.

[5] 李习波. 混杂纤维高强混凝土动态损伤本构关系[D]. 广州：广州大学，2015.
LI Xibo. Dynamic damage constitutive relationship of hybrid fiber reinforced high strength concrete[D]. Guangzhou: Guangzhou University, 2015.

[6] BAZANT Z P, PFEIFFER P A. determination of fracture energy from size effect and brittleness number[J]. ACI Materials Journal, 1987,84(6):463-480.

[7] MANDELBROT B B, PASSOJA D E, PAULLAY A J. Fractal Character of Fracture Surfaces of Metal[J]. Nature, 1984,308(5961):721-722.

[8] 谢和平，鞠杨. 混凝土微细观损伤断裂的分形行为[J]. 煤炭学报，1997,22(6):586-590.
XIE Heping, JU Yang. Fractal characteristics of meso/micro damage and fracture of concrete[J]. Journal of China Coal Society, 1997,22(6):586-590.

[9] BORODICH F M. Some fractal models of fracture[J]. Journal of the Mechanics & Physics of Solids, 1997,45(2):239-259.

[10] 谢和平. 分形—岩石力学导论[M]. 北京：科学出版社. 1997:2-15,168-170.

[11] LEMAITRE J, CHABOCHE J L. Mechanics of solid materials[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990:511-520.

[12] 谢和平. 鞠杨. 分数维在空间中的损伤力学研究初探[J]. 力学学报，1999,31(3):300-310.
XIE Heping, JU Yang. A study of damage mechanics theory in factional dimensional space[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1999,31(3):300-310.

[13] 唐志平，田兰桥，朱兆祥，等. 高应变率下环氧树脂的力学性能研究[C]//第二届全国爆炸力学学术会议论文集(第三册). 江苏扬州，1981.

[14] JIAO Chujie, SUN Wei. Impact resistance of reactive powder concrete [J]. Journal of Wuhan University of Technology (Materials Science Edition), 2015,30(4):752-757

Dynamic damage constitutive relationship of high strength concrete based on fractal theory

JIAO Chujie[1], LI Xibo[2], CHENG Congmi[1], LI Congbo[1]

(1. *School of Civil Engineering, Guangzhou University, Guangzhou* 510006, *Guangdong, China*;
2. *Qingyuan City Provincial Vocational Education Base Construction Office, Qingyuan* 511500, *Guangdong, China*)

Abstract: Based on the fractal damage evolution law of high strength concrete (HSC) specimen by the SHPB impact test, we deduced the patterns of the fractal damage variables of HSC, and calibrated the fractal dimension range of the HSC cracks. Then following the ZWT model, and in combination with the strain rate dependence, dynamic damage characteristic and quasi-constant strain rate, we obtained the HSC dynamic damage constitutive equation with the fractal damage evolution taken into account Finall. Our study verified the effectiveness of the constitutive equation by C60 and C80 stress-strain curves at four different strain ratios, and the theoretical curves matched well with the experimental ones.

Keywords: fractal theory; high strength concrete; SHPB; dynamic damage; constitutive relationship

(责任编辑 王玉锋)