DOI: 10.11883/1001-1455(2017)06-0982-08

SH 波作用下地表软覆盖层中圆形夹杂的动应力分析*

赵元博,齐 辉,丁晓浩,赵栋栋
(哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院,黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要:利用复变函数法和波函数展开法,对地表软覆盖层中浅埋圆形夹杂在稳态 SH 波作用下的动应力集中问题进行研究并给出了解析解。根据 SH 波散射时的衰减特性,采用了大圆弧假定的方法,将半空间覆盖层直线边界问题转化为曲面边界问题。通过算例分析了 SH 波垂直入射时,不同入射波波数和圆夹杂与半空间的波数比对圆形夹杂周边动应力集中因子的分布和动应力集中因子最大值变化的影响。算例表明,圆形夹杂越"软",其波数越大,夹杂周边的动应力集中因子越大;入射波波数约 0.35 时,夹杂周边的最大动应力集中因子达到最大值。

关键词:SH 波散射;地表软覆盖层;圆形夹杂;大圆弧假设;动应力集中因子
中图分类号:O343.4 **国标学科代码**:13015 **文献标志码**:A

针对结构的抗震研究发展了大量的分析方法,其中,波动法不单独研究分析荷载,而是将介质与结构作为一个整体加以分析研究,求解波动场与应力场[1]。20 世纪 70 年代,Y. H. Pao 等[2]利用波函数展开法研究了不同形状物体在稳态和瞬态应力荷载下的动应力集中问题。D. Liu 等[3]将复变函数法拓展到动态应力集中问题,H. Qi 等[4-5]将其扩展到半空间界面、双向介质内圆孔、夹杂等方面。V. W. Lee 等[6]采用大圆弧假定方法将直边界问题转为曲边界问题,给出了半空间中单个圆孔对 P 波、SV 波散射的解析解。D. N. Chen 等[7-8]进一步研究了地表覆盖层对半空间内单、多个圆孔、圆夹杂受平面 SH 波作用时的散射和动应力集中因子的影响。本文中利用大圆弧法对地表软覆盖层中单个圆形夹杂在 SH 波作用下的动应力集中问题进行研究。

1 理论分析

1.1 问题模型

地表软覆盖层中含有单个圆夹杂的问题模型如图 1(a)所示。半空间为区域Ⅰ,覆盖层为区域Ⅱ,厚度为 h,上、下边界分别为 T_U 和 T_D。夹杂为区域Ⅲ,边界为 T_C,半径为 r。各区域的密度、剪切模量、SH 波波数分别为 $\rho_1,G_1,k_1,\rho_2,G_2,k_2,\rho_3,G_3,k_3$,下标代表区域范围。采用大圆弧法,将 T_U 和 T_D 用半径极大的同心圆弧近似,T_U 变为 $\widehat{T_U}$,T_D 变为 $\widehat{T_D}$。以圆杂圆心为原点 O_2,平行于 T_U 的直线为 X_2 轴建立直角坐标系 $X_2O_2Y_2$,以大圆弧圆心为原点 O_1 建立直角坐标系 $X_1O_1Y_1$,使 Y_1 轴和 Y_2 轴在同一直线上。O_2 距 T_U 的距离为 h_1,距 T_D 的距离为 h_2。SH 波在区域Ⅰ中以入射角 α_0 入射(X_1 轴逆时针旋转至入射方向)。引入复变函数 $z_S=X_S+\mathrm{i}Y_S$,其中 $S=1,2$,建立复平面($z_1,\bar{z}_1$)和($z_2,\bar{z}_2$),直角坐标系 $X_1O_1Y_1$ 和 $X_2O_2Y_2$ 分别对应复平面($z_1,\bar{z}_1$)和($z_2,\bar{z}_2$)。各量的变换关系如下:

$$\begin{cases} h=h_1+h_2 \\ R_U=h+R_D \\ z_2=z_1-\mathrm{i}(R_D+h_2) \end{cases} \tag{1}$$

* **收稿日期**:2016-04-12;**修回日期**:2016-07-12
基金项目:黑龙江省自然科学基金项目(A201404)
第一作者:赵元博(1982—),男,博士研究生,助理工程师,ZYB201507@126.com。

半空间中含有单个圆形孔洞的问题模型如图 1(b)所示。当图 1(a)中区域Ⅰ和区域Ⅱ的各参数均相同时，半空间和覆盖层融为一体，覆盖层下边界 T_D 不存在。当图 1(*a*)中区域Ⅲ的参数 ρ_3 和 G_3 均为 0 时，圆形夹杂变为圆形孔洞，此时图 1(a)所示问题退化为图 1(b)所示问题。

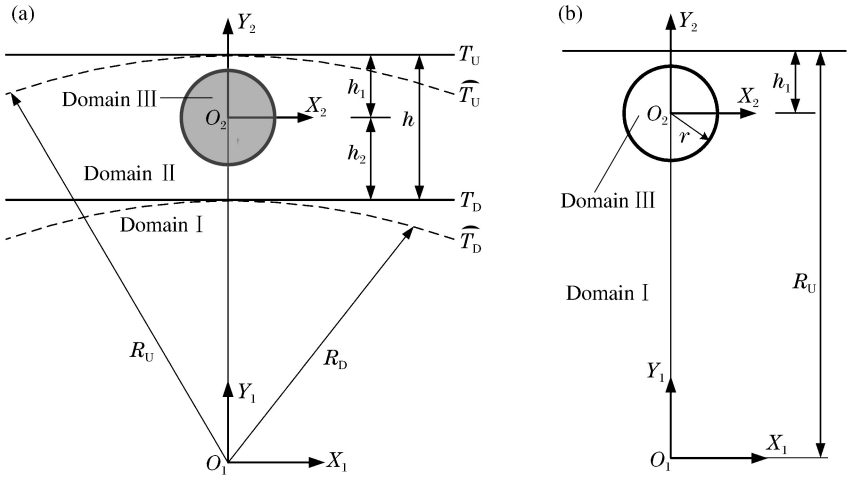

图 1　地表覆盖层及半空间问题模型示意图

Fig. 1　Schematic diagram of the layer half space and the half space model

1.2　控制方程

本文中研究 SH 波的散射问题。在直角坐标系 *X*-*Y* 平面内，*SH* 波产生的位移场表示为 $W(X,Y,t)$，该位移场与 *Z* 轴无关，且垂直于 *X*-*Y* 平面。对于稳态问题，位移场 $W(X,Y,t)$需要满足以下 Helmholtz 方程：

$$\partial^2 W/\partial X^2+\partial^2 W/\partial Y^2+k^2 W=0 \tag{2}$$

式中：位移场 $W(X,Y,t)$与时间 t 的依赖关系为 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$，由于本文中研究稳态问题，因此在以下的分析中略去 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$。$k=\omega/c$；其中 ω 为位移场 $W(X,Y,t)$的圆频率；c 为波速，$c^2=G/\rho$。

在复平面极坐标系下，应力应变关系表示为：

$$\tau_{z\rho}=G\left[(\partial W/\partial z)(z/|z|)+(\partial W/\partial \bar{z})(|z|/z)\right] \tag{3}$$

$$\tau_{z\varphi}=\mathrm{i}G\left[(\partial W/\partial z)(z/|z|)-(\partial W/\partial \bar{z})(|z|/z)\right] \tag{4}$$

1.3　入射波场、散射波场及相应应力

在 $(z_1,\bar{z}_1)$平面内，入射波 $W^{(\mathrm{I})}$，$\widehat{T}_D$在区域Ⅰ和区域Ⅱ内产生的散射波场 $W^{(S1)}$、$W^{(S2)}$，$\widehat{T}_U$在区域Ⅱ内产生的散射波场 $W^{(S5)}$及相应的应力可以表示为：

$$W^{(\mathrm{I})}_{(z_1,\bar{z}_1)}=W_0\exp\left[\mathrm{i}k_1\mathrm{Re}(z_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0})\right] \tag{5}$$

$$\tau^{(\mathrm{I})}_{z\rho,(z_1,\bar{z}_1)}=\mathrm{i}k_1G_1W_0\exp\left[\mathrm{i}k_1\mathrm{Re}(z_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0})\right]\mathrm{Re}\left[(z_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0})/|z_1|\right] \tag{6}$$

$$\tau^{(\mathrm{I})}_{z\varphi,(z_1,\bar{z}_1)}=-\mathrm{i}k_1G_1W_0\exp\left[\mathrm{i}k_1\mathrm{Re}(z_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0})\right]\mathrm{Im}\left[(z_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0})/|z_1|\right] \tag{7}$$

$$W^{(S1)}_{(z_1,\bar{z}_1)}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}A_nH_n^{(2)}(k_1|z_1|)(z_1/|z_1|)^n \tag{8}$$

$$\tau^{(S1)}_{z\rho,(z_1,\bar{z}_1)}=0.5k_1G_1\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}A_n\left[H_{n-1}^{(2)}(k_1|z_1|)-H_{n-1}^{(2)}(k_1|z_1|)\right](z_1/|z_1|)^n \tag{9}$$

$$\tau^{(S1)}_{z\varphi,(z_1,\bar{z}_1)}=0.5\mathrm{i}k_1G_1\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}A_n\left[H_{n-1}^{(2)}(k_1|z_1|)+H_{n-1}^{(2)}(k_1|z_1|)\right](z_1/|z_1|)^n \tag{10}$$

$$W^{(S2)}_{(z_1,\bar{z}_1)}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}B_nH_n^{(1)}(k_2|z_1|)(z_1/|z_1|)^n \tag{11}$$

$$\tau^{(S2)}_{z\rho,(z_1,\bar{z}_1)}=0.5k_2G_2\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}B_n\left[H_{n-1}^{(1)}(k_2|z_1|)-H_{n+1}^{(1)}(k_2|z_1|)\right](z_1/|z_1|)^n \tag{12}$$

$$\tau_{z\varphi,(z_1,\bar{z}_1)}^{(S2)}=0.5\mathrm{i}k_2G_2\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}B_n\left[H_{n-1}^{(1)}(k_2|z_1|)+H_{n+1}^{(1)}(k_2|z_1|)\right](z_1/|z_1|)^n \tag{13}$$

$$W_{(z_1,\bar{z}_1)}^{(S5)}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}E_nH_n^{(2)}(k_2|z_1|)(z_1/|z_1|)^n \tag{14}$$

$$\tau_{z\rho,(z_1,\bar{z}_1)}^{(S5)}=0.5k_2G_2\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}E_n\left[H_{n-1}^{(2)}(k_2|z_1|)-H_{n+1}^{(2)}(k_2|z_1|)\right](z_1/|z_1|)^n \tag{15}$$

$$\tau_{z\varphi,(z_1,\bar{z}_1)}^{(S5)}=0.5\mathrm{i}k_2G_2\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}E_n\left[H_{n-1}^{(2)}(k_2|z_1|)+H_{n+1}^{(2)}(k_2|z_1|)\right](z_1/|z_1|)^n \tag{16}$$

在$(z_2,\bar{z}_2)$平面内，散射波波场$W^{(S2)}$，$\widehat{T}_C$在区域Ⅱ中产生的散射波场$W^{(S3)}$和$\widehat{T}_C$在区域Ⅲ内产生的驻波波场$W^{(Z4)}$，散射波波场$W^{(S5)}$可分别表示为：

$$W_{(z_2,\bar{z}_2)}^{(S2)}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}B_nH_n^{(1)}(k_2|\oplus|)(\oplus/|\oplus|)^n \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\tau_{z\rho,(z_2,\bar{z}_2)}^{(S2)}=0.5k_2G_2\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}B_n&\left[H_{n-1}^{(1)}(k_2|\oplus|)(\oplus/|\oplus|)^{n-1}(z_2/|z_2|)-\right.\\&\left.H_{n+1}^{(1)}(k_2|\oplus|)(\oplus/|\oplus|)^{n+1}(\bar{z}_2/|z_2|)\right]\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\tau_{z\varphi,(z_2,\bar{z}_2)}^{(S2)}=0.5\mathrm{i}k_2G_2\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}B_n&\left[H_{n-1}^{(1)}(k_2|\oplus|)(\oplus/|\oplus|)^{n-1}(z_2/|z_2|)+\right.\\&\left.H_{n+1}^{(1)}(k_2|\oplus|)(\oplus/|\oplus|)^{n+1}(\bar{z}_2/|z_2|)\right]\end{aligned} \tag{19}$$

$$W_{(z_2,\bar{z}_2)}^{(S3)}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}C_nH_n^{(1)}(k_2|z_2|)(z_2/|z_2|)^n \tag{20}$$

$$\tau_{z\rho,(z_2,\bar{z}_2)}^{(S3)}=0.5k_2G_2\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}C_n\left[H_{n-1}^{(1)}(k_2|z_2|)-H_{n+1}^{(1)}(k_2|z_2|)\right](z_2/|z_2|)^n \tag{21}$$

$$\tau_{z\varphi,(z_2,\bar{z}_2)}^{(S3)}=0.5\mathrm{i}k_2G_2\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}C_n\left[H_{n-1}^{(1)}(k_2|z_2|)+H_{n+1}^{(1)}(k_2|z_2|)\right](z_2/|z_2|)^n \tag{22}$$

$$W_{(z_2,\bar{z}_2)}^{(Z4)}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}D_nJ_n(k_3|z_2|)(z_2/|z_2|)^n \tag{23}$$

$$\tau_{z\rho,(z_2,\bar{z}_2)}^{(Z4)}=0.5k_3G_3\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}D_n\left[J_{n-1}(k_3|z_2|)-J_{n+1}(k_3|z_2|)\right](z_2/|z_2|)^n \tag{24}$$

$$\tau_{z\varphi,(z_2,\bar{z}_2)}^{(Z4)}=0.5\mathrm{i}k_3G_3\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}D_n\left[J_{n-1}(k_3|z_2|)+J_{n+1}(k_3|z_2|)\right](z_2/|z_2|)^n \tag{25}$$

$$W_{(z_2,\bar{z}_2)}^{(S5)}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}E_nH_n^{(2)}(k_2|\oplus|)(\oplus/|\oplus|)^n \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\tau_{z\rho,(z_2,\bar{z}_2)}^{(S5)}=0.5k_2G_2\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}E_n&\left[H_{n-1}^{(2)}(k_2|\oplus|)(\oplus/|\oplus|)^{n-1}(z_2/|z_2|)-\right.\\&\left.H_{n+1}^{(2)}(k_2|\oplus|)(\oplus/|\oplus|)^{n+1}(\bar{z}_2/|z_2|)\right]\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\tau_{z\varphi,(z_2,\bar{z}_2)}^{(S5)}=0.5\mathrm{i}k_2G_2\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}E_n&\left[H_{n-1}^{(2)}(k_2|\oplus|)(\oplus/|\oplus|)^{n-1}(z_2/|z_2|)+\right.\\&\left.H_{n+1}^{(2)}(k_2|\oplus|)(\oplus/|\oplus|)^{n+1}(\bar{z}_2/|z_2|)\right]\end{aligned} \tag{28}$$

在$(z_1,\bar{z}_1)$平面内，散射波$W^{(S3)}$的位移场和相应应力可以表示为：

$$W_{(z_1,\bar{z}_1)}^{(S3)}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}C_nH_n^{(1)}(k_2|\otimes|)(\otimes/|\otimes|)^n \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\tau_{z\rho,(z_1,\bar{z}_1)}^{(S3)}=0.5k_2G_2\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}C_n&\left[H_{n-1}^{(1)}(k_2|\otimes|)(\otimes/|\otimes|)^{n-1}(z_1/|z_1|)-\right.\\&\left.H_{n+1}^{(1)}(k_2|\otimes|)(\otimes/|\otimes|)^{n+1}(\bar{z}_1/|z_1|)\right]\end{aligned} \tag{30}$$

$$\tau_{z\varphi,(z_1,\bar{z}_1)}^{(S3)}=0.5\mathrm{i}k_2G_2\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}C_n\left[H_{n-1}^{(1)}(k_2|\otimes|)(\otimes/|\otimes|)^{n-1}(z_1/|z_1|)+H_{n+1}^{(1)}(k_2|\otimes|)(\otimes/|\otimes|)^{n+1}(\bar{z}_1/|z_1|)\right] \tag{31}$$

式中：$\otimes=z_1-\mathrm{i}(R_\mathrm{D}+h_2)$，$\oplus=z_2+\mathrm{i}(R_\mathrm{D}+h_2)$，下标$(z_P,\bar{z}_P)$，$(P=1,2)$表示所在复平面，上标(Ⅰ)表示入射波，上标$(S1)$表示编号为 1 的散射波，上标$(Z4)$表示编号为 4 的驻波。$A_n$、$B_n$、$C_n$、$D_n$、$E_n$ 表示波函数的系数。

1.4　连接条件

根据$\overset{\frown}{T_\mathrm{D}}$和$\overset{\frown}{T_\mathrm{C}}$位移和径应力连续，$\overset{\frown}{T_\mathrm{U}}$径应力自由，得到公式(32)，代入相应公式并同乘 $\exp(-\mathrm{i}m\theta)$且在$(-\pi,\pi)$上积分，对 m 和 n 截取有限项求出系数 $A_n\sim E_n$，便可得到所求的各种未知量了。

$$\begin{cases}\overset{\frown}{T_\mathrm{D}}(|z_1|=R_\mathrm{D}):W_{(z_1,\bar{z}_1)}^{(\mathrm{I})}+W_{(z_1,\bar{z}_1)}^{(S1)}=W_{(z_1,\bar{z}_1)}^{(S2)}+W_{(z_1,\bar{z}_1)}^{(S3)}+W_{(z_1,\bar{z}_1)}^{(S5)}\\ \overset{\frown}{T_\mathrm{D}}(|z_1|=R_\mathrm{D}):\tau_{z\rho,(z_1,\bar{z}_1)}^{(\mathrm{I})}+\tau_{z\rho,(z_1,\bar{z}_1)}^{(S1)}=\tau_{z\rho,(z_1,\bar{z}_1)}^{(S2)}+\tau_{z\rho,(z_1,\bar{z}_1)}^{(S3)}+\tau_{z\rho,(z_1,\bar{z}_1)}^{(S5)}\\ \overset{\frown}{T_\mathrm{C}}(|z_2|=r):W_{(z_2,\bar{z}_2)}^{(S2)}+W_{(z_2,\bar{z}_2)}^{(S3)}+W_{(z_2,\bar{z}_2)}^{(S5)}=W_{(z_2,\bar{z}_2)}^{(Z4)}\\ \overset{\frown}{T_\mathrm{C}}(|z_2|=r):\tau_{z\rho,(z_2,\bar{z}_2)}^{(S2)}+\tau_{z\rho,(z_2,\bar{z}_2)}^{(S3)}+\tau_{z\rho,(z_2,\bar{z}_2)}^{(S5)}=\tau_{z\rho,(z_2,\bar{z}_2)}^{(Z4)}\\ \overset{\frown}{T_\mathrm{U}}(|z_1|=R_\mathrm{U}):\tau_{z\rho,(z_1,\bar{z}_1)}^{(S2)}+\tau_{z\rho,(z_1,\bar{z}_1)}^{(S3)}+\tau_{z\rho,(z_1,\bar{z}_1)}^{(S5)}=0\end{cases} \tag{32}$$

1.5　动应力集中因子(K_d)

定义 $\tau_{z\varphi,(z_2,\bar{z}_2)}^{*}=|(\tau_{z\varphi,(z_2,\bar{z}_2)}^{(S2)}+\tau_{z\varphi,(z_2,\bar{z}_2)}^{(S3)}+\tau_{z\varphi,(z_2,\bar{z}_2)}^{(Z4)}+\tau_{z\varphi,(z_2,\bar{z}_2)}^{(S5)})/(\mathrm{i}k_1G_1W_0)|_{|z_2|=R}$为圆杂边的动应力集中因子 K_d，最大动应力集中因子表示为 $K_{\mathrm{d,max}}$。

2　算例分析

定义参数：$G^*=G_2/G_1$，$G^\#=G_3/G_1$，$\rho^*=\rho_2/\rho_1$，$\rho^\#=\rho_3/\rho_1$，$k^*=k_2/k_1$，$k^\#=k_3/k_1$，其关系为：$k^*k^*=\rho^*/G^*$，$k^\#k^\#=\rho^\#/G^\#$。介质越“硬”则波速越快，因而波数 k 就越小，所以当 $k^*>1$ 时表明区域Ⅰ比区域Ⅱ“硬”，同理，$k^\#>1$ 表明区域Ⅰ比区域Ⅲ“硬”。在本算例中，假定所有 $k^*>1$，即覆盖层比半空间要“软”，且假定所有 $\rho^*=0.8$，$r=1$，$\rho_1=1$，$G_1=1$，$h_1=h_2=1.5r$。

图 2 中给出了当 $\alpha_0=90°$，$G^*=k^*=k^\#=\rho^*=1$，$G^\#=\rho^\#=0$，$k_1=0.1$，$h_1=1.5r$、$12r$ 时圆杂周边的 K_d。此时，问题退化为图 1(b)中所示的半空间单个圆孔对 SH 波的散射问题。计算表明，当 $R_\mathrm{D}\geqslant 120r$ 时，图 2 中 K_d的分布状况与文献[9]中的结果高度一致，这说明了大圆弧法的合理性。

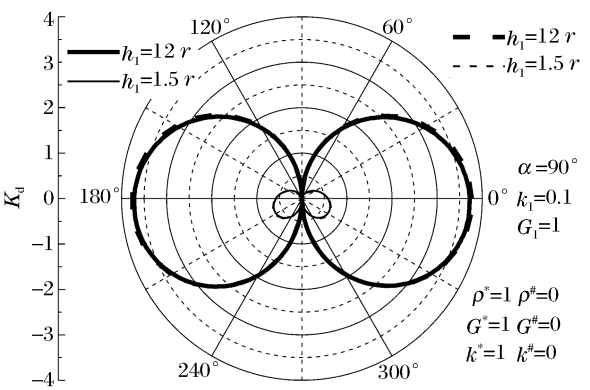

图 2 $\rho^*=G^*=k^*=k^\#=1$ 时圆形夹杂边的动应力集中因子 K_d

Fig. 2 K_d around circular inclusion ($\rho^*=G^*=k^*=k^\#=1$)

图 3 描述了当夹杂“最软”时，SH 波在不同频段入射时夹杂边 K_d的分布情况。$G^*=0.355\ 6$，$G^\#$分别为 0.273 4、0.242 2、0.216 0、0.193 9。图 3(a)中 $k_1=0.5$，入射波在低频段，K_d为椭圆形，随着 $k^\#$的增加而不断向两侧变大，在90°和270°时变化则极为弱小。当 $k^\#$以 0.1 为增量时，$K_{\mathrm{d,max}}$以增量不断减小的方式增大，但所在角度没有变化，约在190°和350°两处。图 3(b)中 $k_1=1$，SH 波在中频段入射，K_d为蝴蝶形，图 3(c)中 $k_1=1.5$，SH 波在高频段入射，K_d为花瓣形。与图 3(a)类似，K_d也随 $k^\#$的增大不断向外扩展，而 $K_{\mathrm{d,max}}$的增量不断减小，但所在位置与图 3(a)不同，在图 3(b)中约为20°和160°，在图 3(c)中约为210°和330°。整体上，$K_{\mathrm{d,max}}$随入射频率的增大而减小。

图 4 描述了当夹杂“软硬居中”时，圆杂边 K_d的分布情况。此时 $G^*=0.355\ 6$，$G^\#$分别为 0.743 8、

0.625 0、0.532 5、0.459 2。图 4(a)描述了当 $k_1=0.5$ 时夹杂周边 K_d 的分布，与图 3(a)类似，其形状也为椭圆形，并随 $k^{\#}$ 的增加而不断向两侧变大，但整体上要小于图 3(a)中 K_d，图 3(a)中 $k^{\#}=1.6$ 时 $K_{d,max}$ 略大于 1.3，而图 4(a)中 $k^{\#}=1.4$ 时 $K_{d,max}\approx 1$。另外与图 3(a)不同的是，当 $k^{\#}$ 以 0.1 为增量增加时，$K_{d,max}$ 是以相同的增量(约 0.1)不断增大，但其所在位置(角度)没有变化，都是在约190°和350°两处。与图 3(b)和图 3(c)类似，图 4(b)和图 4(c)分别描述了 SH 波在中频($k_1=1$)和高频($k_1=1.5$)入射时的情况。与图 3(a)和图 4(a)的关系类似，图 4(b)～(c)中 K_d 整体上要比图 3(b)～(c)中 K_d 小，而且 $K_{d,max}$ 也随着 $k^{\#}$ 的增大而以相同的增量增加。整体而言，从图 4(a)到图 4(c)，$K_{d,max}$ 的增量是在不断减小的。

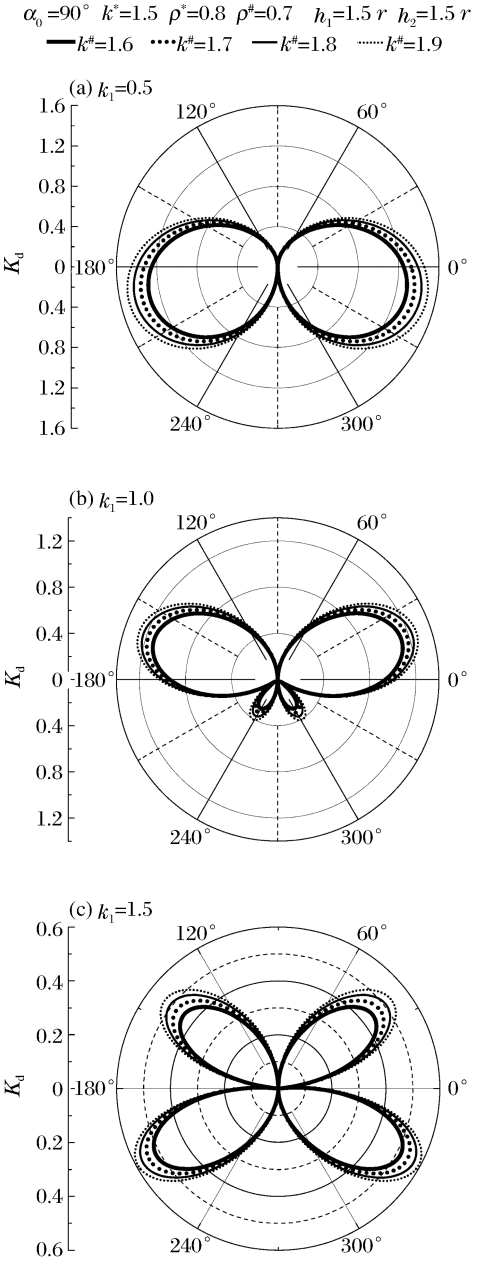

图 3 $\rho^{\#}=0.7$ 时圆形夹杂边的动应力集中因子 K_d

Fig. 3 K_d around circular inclusion with $\rho^{\#}=0.7$

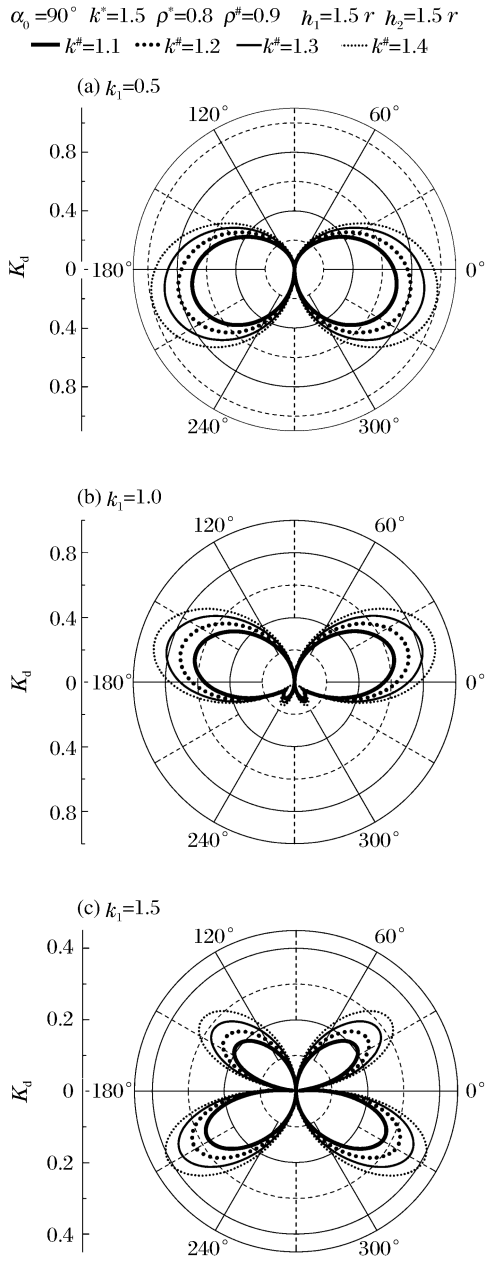

图 4 $\rho^{\#}=0.9$ 时圆形夹杂边的动应力集中因子 K_d

Fig. 4 K_d around circular inclusion with $\rho^{\#}=0.9$

图 5 描述了当夹杂“最硬”时，夹杂周边 K_d 的分布。$G^*=0.355\ 6$，$G^{\#}$ 分别为 3.055 6、2.244 9、1.718 8、1.358 0。与前面的结果类似，当 k_1 分别为 0.5、1.0、1.5 时，K_d 分别为椭圆形、蝴蝶型和花瓣形，且 $K_{d,max}$ 所在角度基本没有变化，但整体上缩小了，当 $k^{\#}$ 同样以 0.1 为增量不断增加时，$K_{d,max}$ 却是以增量不断变大的方式增大的，这与图 3～4 的情况都不一样。

图 6 描述了当夹杂“最软”、“居中”、“最硬”时，圆杂的 $K_{d,max}$ 随 $k^{\#}$ 的变化情况。与图 3～图 5 相同，都只改变波数 k_3，都是 k_1 越大则 $K_{d,max}$ 越小。整体上，夹杂越“硬”，$K_{d,max}$ 越“小”。当夹杂“最软”时，$K_{d,max}$ 的增加呈现随 $k^{\#}$ 的增大而先大后小的变化，图形为上凸的，当夹杂“软硬居中”时，$K_{d,max}$ 的变化则可认为随着 $k^{\#}$ 的增大而呈现线性变化，图形可认为是直线，当夹杂“最硬”时，$K_{d,max}$ 随着 $k^{\#}$ 的增大而呈现先小后大的变化，图形是下凸的。这些与图 3～5 的结果是相对应的。

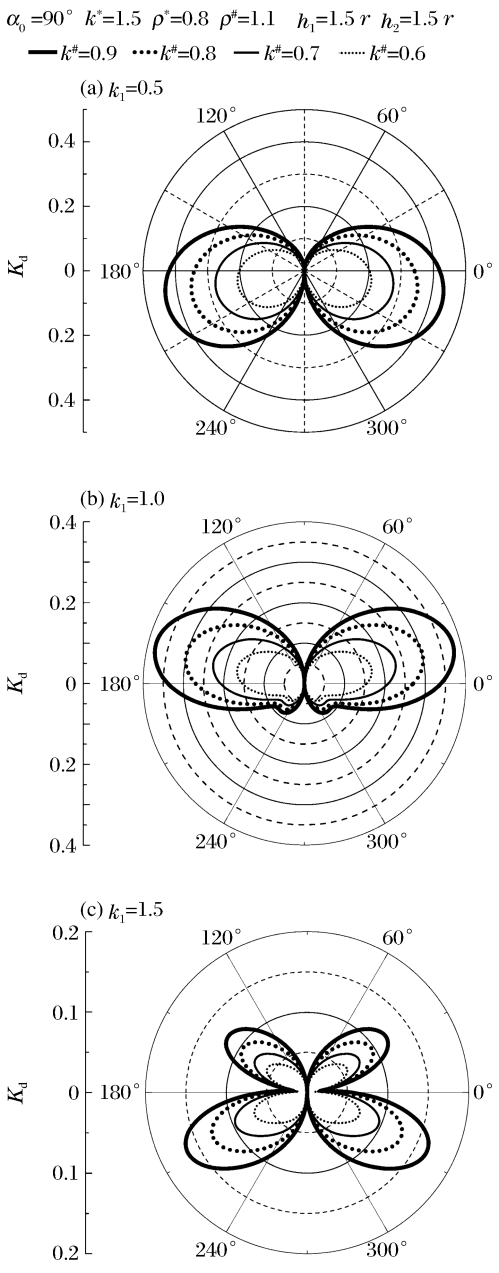

图 5 $\rho^{\#}=1.1$ 时圆形夹杂边的动应力集中因子 K_d

Fig. 5 K_d around circular inclusion with $\rho^{\#}=1.1$

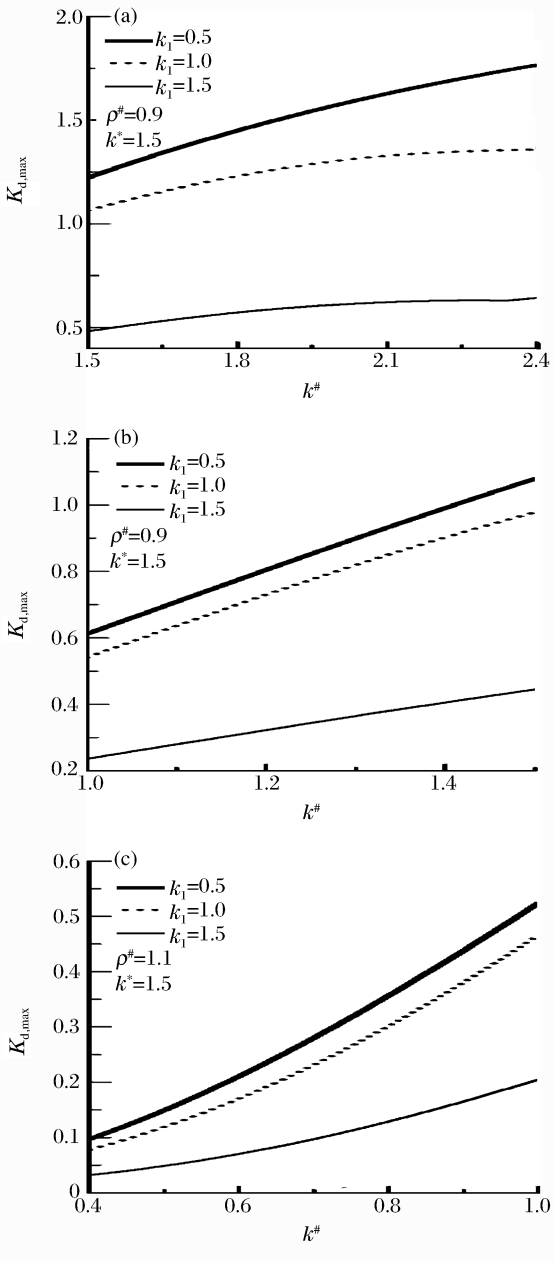

图 6 夹杂边 $K_{d,max}$ 随 $k^{\#}$ 的变化

Fig. 6 Variation of $K_{d,max}$ with $k^{\#}$

图 7 描述了夹杂周边 $K_{\mathrm{d,max}}$ 随 k_1 的变化情况。无论夹杂硬度如何，只要确定 k_3，$K_{\mathrm{d,max}}$ 先随着 k_1 的增加而增大，当 $k_1\approx0.35$ 时达到最大，而后随着 k_1 的增加而减小，当 $k_1\approx0.75$ 时达到极小值，此后随着 k_1 的增加而震荡下降。整体上，夹杂越“软”则 $K_{\mathrm{d,max}}$ 越大。

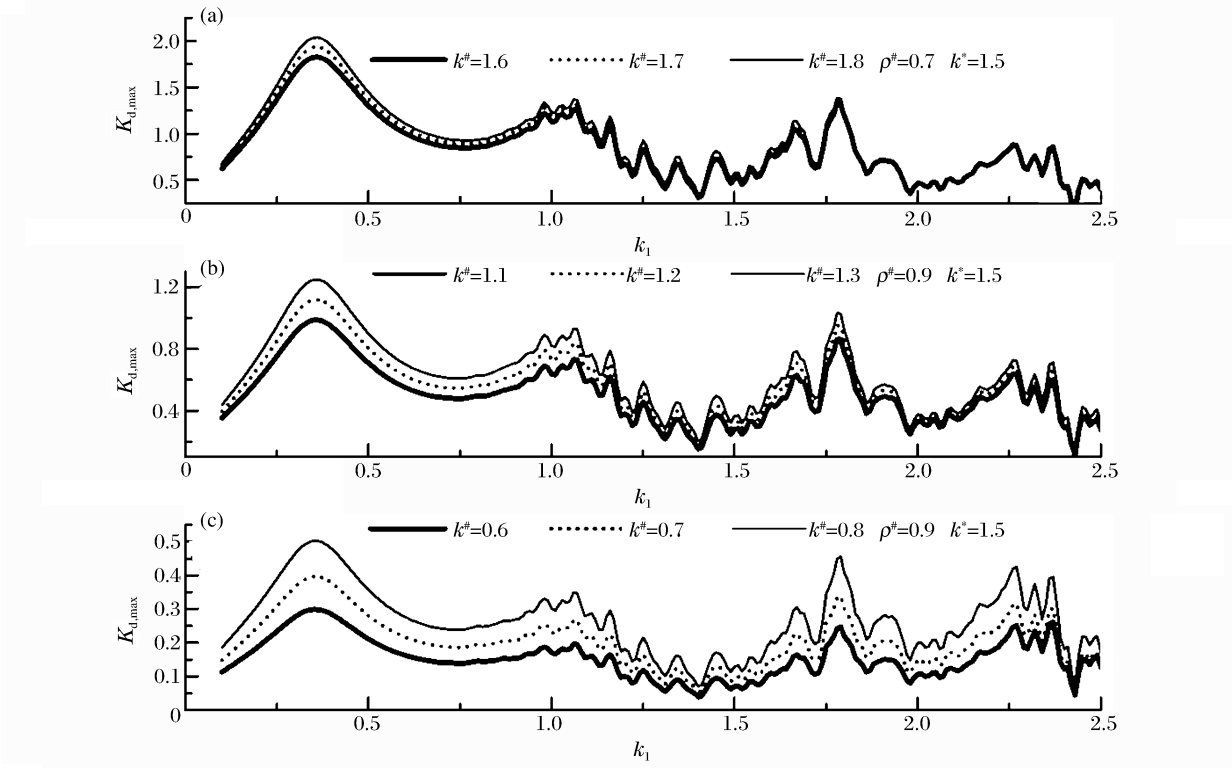

图 7 夹杂边 $K_{\mathrm{d,max}}$ 随 k_1 的变化

Fig. 7 Variation of $K_{\mathrm{d,max}}$ with k_1

3 结 论

根据大圆弧法对地表软覆盖层中单个圆杂在 SH 波作用下的动应力集中问题进行了研究，将覆盖层边界用大圆弧来近似，构造散射波场，得到解析解。算例表明：当 SH 波垂直入射，覆盖层“软”，圆杂位于覆盖层正中时：

(1)圆杂越“软”，K_{d} 越“大”，圆杂越“硬”，K_{d} 越小；

(2)当 $k_1\approx0.35$ 时，$K_{\mathrm{d,max}}$ 达到最大值，当 $k_1\approx0.75$ 时出现极小值，此后随 k_1 的增加呈震荡下降的变化。

参考文献：

[1] 于翔，陈启亮，赵跃堂，等. 地下结构抗震研究方法及其现状[J]. 解放军理工大学学报(自然科学版)，2000，1(5)：63-69.
Yu Xiang, Chen Qiliang, Zhao Yuetang, et al. The status quo and methods ofantiseismic research of underground structure[J]. Journal of PLA University of Science and Technology(Natural Science Edition), 2000,1(5):63-69.

[2] Pao Y H, Mow C C, Achenbach J D. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations[M]. New York: Crane and Russak, 1973:114-304.

[3] Liu D, Gai B, Tao G. Applications of the method of complex functions to dynamic stress concentrations[J]. Wave Motion, 1982,4(3):293-304.

[4] Qi H, Yang J. Dynamic analysis for circular inclusions of arbitrary positions near interfacial crack impacted by SH-wave in half-space[J]. European Journal of Mechanics: A-Solids, 2012,36(1):18-24.

[5] 齐辉, 折勇,李宏亮,等. SH 波入射时垂直半空间中双相介质界面附近圆孔的动力分析[J]. 爆炸与冲击,2009,29(1):73-79.
Qi Hui, Shi Yong, Li Hongliang, et al. Dynamic analysis for scattering of SH-wave by circular cavitiesnear bimaterial interfaces in a vertical half-space[J]. Explosion and Shock Waves, 2009,29(1):73-79.

[6] Lee V W, Karl J. Diffraction of elastic plane P wave by circular underground unlined tunnels[J]. European Earthquake Engineering, 1993,6(1):29-36.

[7] 齐辉,陈冬妮,蔡立明. 带覆盖层半空间内 SH 波对浅埋圆孔及夹杂散射与地震动[J]. 振动与冲击,2014,33(22):152-156.
Qi Hui, Chen Dongni, Cai Liming. Scattering of SH-wave to subsurface circular cavity andinclusion in a layered half-space and the induced ground motion[J]. Journal of Vibration and Shock, 2014,33(22):152-156.

[8] 陈冬妮,齐辉. SH 波入射覆盖层半空间圆孔及圆夹杂的动力分析[J]. 哈尔滨工程大学学报,2014,35(2):171-176.
Chen Dongni, Qi Hui. Dynamic analysis for circular cavity and inclusionimpacted by SH-wave in a layered half-space[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2014,35(2):171-176.

[9] 林宏,刘殿魁. 半无限空间中圆形孔洞周围 SH 波的散射[J]. 地震工程与工程振动,2002,22(2):9-16.
Lin Hong, Liu Diankui. Scattering of SH-wave around a circular cavity in half space[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2002,22(2):9-16.

Dynamic analysis for shallow buried circular inclusion impacted by SH-wave in a softlayered half-space

Zhao Yuanbo, Qi Hui, Ding Xiaohao, Zhao Dongdong

(*College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin* 150001, *Heilongjiang, China*)

Abstract: In this study, we investigated the dynamic stress concentration factor of single circular inclusion shallow buried in surface softlayered half space impacted by steady SH-wave using the complex variable function method and the wave function expansion method, and obtained the analytical solution. Based on the attenuation characteristic of SH-Wave scattering and using the large-arc assumption method, we converted the problem of the layer half space linear boundary to that of the circle boundary and, by an example, analyzed the influence of different incident wave numbers and the ratios of the circular inclusion to the half space on the distribution of the dynamic stress concentration factor and on the change of the maximum dynamic stress concentration when the incident SH-wave is vertical. Numerical examples show that the "softer" the circular inclusion, the greater its wave number of circular inclusions, and the larger the dynamic stress concentration factor around the circular inclusion; the maximum dynamic stress concentration factor around circular inclusion reaches its maximum value when the number of the incident SH-wave approaches 0.35.

Keywords: SH-wave scattering; soft surface layer; circular inclusion; large-arc assumption method; dynamic stress concentration factor

(责任编辑　曾月蓉)