DOI: 10.11883/1001-1455(2017)05-0969-07

黏塑性本构计算的稳定性分析*

刘明涛[1,2],李永池[2],胡秀章[2],章 杰[2]
(1.中国工程物理研究院流体物理研究所,四川 绵阳 621999;
2.中国科学技术大学近代力学系,安徽 合肥 230027)

摘要:提出本构方程计算方法的稳定性问题,针对黏塑性本构计算的显式精确算法的稳定性进行分析,发现该算法并非无条件稳定,使用小扰动方法给出了其计算稳定的必要条件,稳定性条件对数值计算中的时间步长提出限制要求。通过有限元算例验证了分析的正确性,计算结果也表明理论推导得到的稳定性公式能够准确预测满足计算稳定性条件要求的最大时间步长与各参数之间关系。

关键词:本构关系;算法稳定性;黏塑性本构;显式精确算法
中图分类号:O345 **国标学科代码**:1301520 **文献标志码**:A

一直以来,塑性和黏塑性材料的本构方程及其数值算法的研究是计算力学的核心问题。D. C. Drucker 等[1-2]提出了著名的 Drucker 公设,该公设是经典塑性理论的基石。利用 Drucker 公设可直接推导出塑性流动的正交法则和屈服面的外凸性,但其缺点是只适用于稳定材料。A. C. Palmer[3]指出针对软化的非稳定材料也可以得到塑性流动的正交法则和屈服面的外凸性。李永池等[4]进一步发展了 A. C. Palmer 的思想,提出了广义 Drucker 公设,将稳定材料和非稳定材料统一在一个框架之内。

Drucker 公设推导出的塑性流动法则是塑性本构计算的基石,其指出塑性应变必须沿着当前加载面的法线方向发展。迄今为止,有关冲击动力学问题的计算程序中,本构算法大部分采用传统的半径回归法[5-7],这是人们最初针对理想塑性材料提出的一种本构更新算法。对于具有应变率效应的黏塑性材料,采用这种算法会带来较大的误差,尤其是当材料由弹性状态进入屈服状态时。针对此问题,李永池等[8]提出了一种新的显式本构计算方法,称为显式精确算法。基于广义 Drucker 公设,李永池等[8]理论推导指出当黏塑性材料进入屈服状态后,利用材料的实时状态量即可唯一确定塑性流变过程中的塑性流动因子。若在一阶精度下,利用上时刻的状态量即可求出现时刻的塑性流动因子,继而可计算现时刻的塑性变形,而后利用胡克定律可得现时刻的应力增量。

通常情况下,数值计算的稳定性是针对连续方程、动量方程和能量方程的差分格式而言。本文中探讨本构方程计算方法的稳定性问题。对李永池等[8]发展的显式精确算法进行稳定性分析,并通过对单个单元的有限元算例验证其正确性。

1 显式精确算法及其计算稳定性

显式精确算法的详细理论推导过程见文献[8],文献[8]中是从一般性的热黏塑性本构关系出发推导的,具有一定的普适性。本文中对其推导过程进行一定的简化,从目前常见的 Mises 屈服准则下的黏塑性本构关系出发推导。

1.1 显式精确算法

针对 Mises 类黏塑性本构关系,屈服函数可设为:

* **收稿日期**:2015-06-29;**修回日期**:2015-10-08
基金项目:国家自然科学基金项目(11602250);
中国工程物理研究院流体物理研究所发展基金项目(SFZ201401(04)02)
第一作者:刘明涛(1986—),男,博士,副研究员,liumingtao@caep.cn。

$$f=\bar{\sigma}-F(\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})=0 \tag{1}$$

其中，Mises 等效应力和等效塑性应变率计算公式分别为：

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} \tag{2}$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}}\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}}} \tag{3}$$

式中：$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}}$ 为塑性偏应变率张量分量，s_{ij} 为偏应力张量分量。

根据广义 Drucker 公设可知，塑性流动的正交法则为：

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}}=\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \tag{4}$$

式中：σ_{ij} 为应力张量分量，$\dot{\lambda}$ 为塑性流动因子。

将式(1)～(2)代入式(4)得：

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}}=\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}=\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\bar{\sigma}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_{ij}}=\frac{3}{2}\dot{\lambda}\frac{s_{ij}}{\bar{\sigma}} \tag{5}$$

将式(5)代入式(3)，得：

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}}\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}}}=\dot{\lambda} \tag{6}$$

由黏塑性本构方程式(1)，可反解出等效塑性应变率为：

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=F^{-1}(\bar{\sigma})=g(\bar{\sigma}) \tag{7}$$

式(6)、(7)联立，得：

$$\dot{\lambda}=g(\bar{\sigma}) \tag{8}$$

由式(8)可知，塑性流动因子可由材料当前的应力状态唯一确定。

将式(8)代入式(5)得：

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}}=\frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{\bar{\sigma}}g(\bar{\sigma}) \tag{9}$$

根据材料的胡克定律，有：

$$s_{ij}^{(n+1)}=s_{ij}^{(n)}+2G\mathrm{d}t\,\dot{e}_{ij}^{\mathrm{e}\,(n+1/2)}=s_{ij}^{(n)}+2G\mathrm{d}t\,(\dot{e}_{ij}-\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}})^{(n+1/2)} \tag{10}$$

式中：G 为剪切模量，$\dot{e}_{ij}^{(n+1/2)}$ 为 n 到 $n+1$ 时刻的总偏应变率张量分量，$\dot{e}_{ij}^{\mathrm{e}\,(n+1/2)}$ 为 n 到 $n+1$ 时刻的弹性偏应变率张量分量，$\mathrm{d}t$ 为计算当前步的时间步长。

针对式(9)，使用差分格式 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}\,(n+1/2)}=\frac{3}{2}\frac{s_{ij}^{(n)}}{\bar{\sigma}^{(n)}}g(\bar{\sigma}^{(n)})$，代入式(10)得：

$$s_{ij}^{(n+1)}=s_{ij}^{(n)}+2G\mathrm{d}t\left[\dot{e}_{ij}^{(n+1/2)}-\frac{3s_{ij}^{(n)}}{2\bar{\sigma}^{(n)}}g(\bar{\sigma}^{(n)})\right] \tag{11}$$

式(11)即为本构计算中的偏应力更新公式，不同于李永池等[8]推得的普适性公式，该计算公式仅针对 Mises 屈服准则下黏塑性本构。这种应力更新方法是一种显式算法，将上时刻 $s_{ij}^{(n)}$ 和 $\dot{e}_{ij}^{(n+1/2)}$ 代入式(11)，便可计算得到 $n+1$ 时刻的偏应力张量分量 $s_{ij}^{(n+1)}$。

1.2 计算稳定性分析

式(11)是一个张量表达式，不利于计算的稳定性分析。下面对此进行简化，选择一种特殊情况进行计算稳定性理论分析。

取 $s_{ij}^{(n)}$ 与 $\dot{e}_{ij}^{(n+1/2)}$ 共线，即：

$$\dot{e}_{ij}^{(n+1/2)}=\dot{e}l_{ij} \tag{12}$$

$$s_{ij}^{(n)}=s^{(n)}l_{ij} \tag{13}$$

如果取 $l_{ij}l_{ij}=\frac{2}{3}$，对式(13)两边进行张量缩并，化简可得：

$$\bar{\sigma}^{(n)} = s^{(n)} \tag{14}$$

将式(12)～(14)代入式(11)，得：

$$s_{ij}^{(n+1)} = s^{(n)} l_{ij} + 2G\mathrm{d}t\left[\dot{e}l_{ij} - \frac{3s^{(n)}l_{ij}}{2s^{(n)}}g(s^{(n)})\right] \tag{15}$$

由上式可计算得：

$$s_{ij}^{(n+1)} = s^{(n+1)} l_{ij} \tag{16}$$

$$s^{(n+1)} = 2G\mathrm{d}t\left[\dot{e} - \frac{3}{2}g(s^{(n)})\right] + s^{(n)} \tag{17}$$

当 $s_{ij}^{(n)}$ 和 $\dot{e}_{ij}^{(n+1/2)}$ 共线时，张量形式的表达式(11)简化为代数形式的式(17)。为了分析显式精确算法的稳定性，对 n 时刻和 $n+1$ 时刻的偏应力均施加 1 个小扰动 Δs，代入式(17)，可得：

$$s^{(n+1)} + \Delta s^{(n+1)} = 2G\mathrm{d}t\left[\dot{e} - \frac{3}{2}g(s^{(n)} + \Delta s^{(n)})\right] + s^{(n)} + \Delta s^{(n)} \tag{18}$$

将函数 $g(s^{(n)} + \Delta s)$ 在 $s^{(n)}$ 处进行泰勒展开，可得：

$$g(s^{(n)} + \Delta s^{(n)}) = g(s^{(n)}) + \Delta s^{(n)} g'(s^{(n)}) + O(\Delta s^{(n)2}) \tag{19}$$

将式(19)代入式(18)，并略去二阶小量，得：

$$\Delta s^{(n+1)} = \Delta s^{(n)}\left[1 - 3G\mathrm{d}t g'(s^{(n)})\right] \tag{20}$$

计算稳定性要求扰动的放大因子小于 1，即 $|1 - 3G\mathrm{d}t g'(s^{(n)})| < 1$，解得：

$$0 < 3G\mathrm{d}t g'(s^{(n)}) < 2 \tag{21}$$

式(21)即为推导得出的 显式精确算法的计算稳定性条件，显式精确算法的计算稳定性对计算时间步长 $\mathrm{d}t$ 提出了限制要求。还需特别指出的是，式(21)是在式(12)、(13)的特殊情况下推导得到的，并不能保证本构计算绝对稳定。

若选择黏塑性材料的具体屈服准则形式为：

$$\bar{\sigma} = Y^*\left[1 + \beta\ln\left(1 + \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)\right] \tag{22}$$

将式(22)代入式(21)，可得本构方程的计算稳定性要求为：

$$0 < \mathrm{d}t < \frac{2\beta Y^*}{3G\dot{\varepsilon}_0\left\{\exp\left[\frac{1}{\beta}\left(\frac{\bar{\sigma}}{Y^*} - 1\right)\right] - 1\right\}} = \frac{2\beta Y^*}{3G\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}} \tag{23}$$

传统 Courant 稳定性条件为：

$$\mathrm{d}t \leqslant \alpha\frac{L}{C} \tag{24}$$

式中：L 为单元特征长度，C 为材料绝热声速，α 为安全因数，通常取 $\alpha = 0.9$。式(21)、(23)表明，本构计算的稳定性与材料的本构参数和实时塑性应变率密切相关，而传统 Courant 稳定性条件仅与材料的声速和单元的尺寸相关。

2　数值计算算例

选取数值算例，来验证稳定性分析理论推导的正确性。计算模型取 1 个正方形单元，如图 1 所示，其初始边长设定为 20 mm。数值计算所用的材料选择为常见的 4340 钢，其本构参数：体积模量 $K = 164$ GPa，密度为 $\rho = 7\,800$ kg/m^3，剪切模量 $G = 77.5$ GPa，静态条件下屈服强度 $Y^* = 0.792$ GPa，应变率敏感因子 $\beta = 0.014$，初始应变率 $\dot{\varepsilon}_0 = 1.0$ s^{-1}。本构形式采用式(22)所描述的黏塑性本构方程。

四边形单元的运动过程设定为：在整个变形过程中 4 个节点在 x 方向均固定不动，同时节点 1、2 在 y 方向也固定不动，首先，节点 3 和 4 以速度 −50 m/s 沿着 y 方向匀速运动 20 μs，四边形单元的 y 方向长度由 20 mm 压缩至 19 mm；而后，节点 3 和节点 4 再以 50 m/s 匀速运动返回至初始位置，四边形单元的 y 方向长度由 19 mm 回复至初始时的 20 mm。

四边形单元在上述变形过程中经历的加卸载路径较复杂，如图 1 所示。从状态 1 到状态 2，经历了弹性加载、塑性加载；从状态 2 到状态 3，经历了弹性卸载、反向弹性加载、反向塑性加载，共 5 个阶段。在第 2 阶段和第 5 阶段，材料发生了塑性应变，塑性应变率均约为 1 700 s^{-1}。根据显式精确算法的稳定性条件式(2)，可知时间步长 dt 需满足：$0<dt<0.56\times10^{-7}$ s。利用式(24)，计算得传统 Courant 稳定性条件为：$dt\leqslant3.07\times10^{-6}$ s。下面分别取 3 个时间步长来验证 1.2 节稳定性分析的正确性。

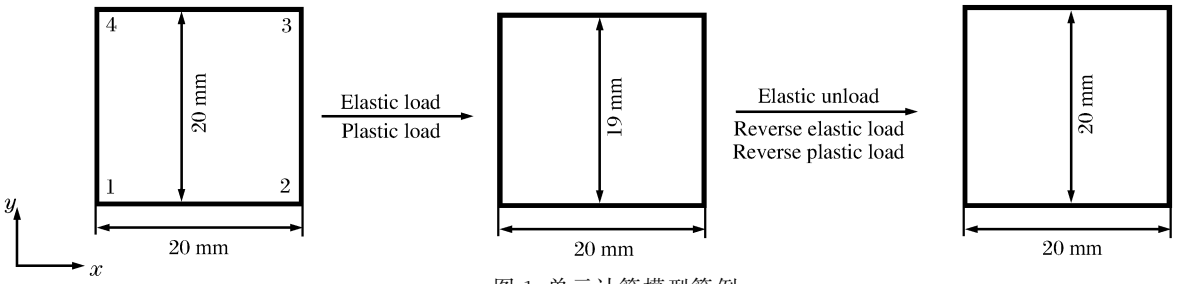

图 1 单元计算模型算例

Fig. 1 Computational model of a single square element

2.1 不同时间步长算例

2.1.1 时间步长 dt $=0.3\times10^{-7}$ s 时

计算结果如图 2 所示，黑色实线为等效应力历史曲线，蓝色点划线为等效塑性应变历史曲线。从图中可以看出，当选取的时间步长满足计算稳定性条件式(23)时，利用显式精确算法计算的结果能够准确描述四边形单元在整个变形过程中所经历的复杂加卸载过程。

(1)弹性加载阶段：随着变形的增加，等效应力匀速增加，没有发生塑性变形。

(2)塑性加载阶段：由于节点 3 和节点 4 以匀速运动，因此在整个加载过程中等效塑性应变率保持不变，因此根据本构关系式(22)，等效应力也保持不变，而图 2 中等效应力在该阶段呈现 1 个平台段，计算结果正确。

(3)弹性卸载阶段：20 μs以后，节点 3 和节点 4 沿原路径匀速返回，材料进入弹性卸载阶段，该过程中不产生塑性应变增量，因此等效塑性应变呈现平台段，等效应力由材料的屈服点匀速降低至零，计算结果正确。

(4)反向弹性加载阶段：当等效应力降低为零后，重新开始匀速增大，材料进入反向弹性加载阶段，在此阶段等效塑性应变不增大，呈现平台段，计算结果正确。

(5)反向塑性加载：当材料由于反向加载再次进入屈服后，塑性变形重新开始累积，由于在该阶段节点 3 和节点 4 匀速运动，因此塑性应变率保持为恒定值，所以塑性应变线性增大，等效应力出现第 2 个平台段，计算结果正确。

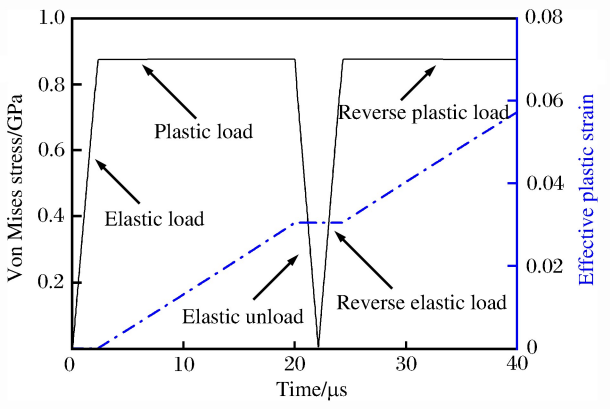

图 2 步长 dt $=0.3\times10^{-7}$ s 时显式精确算法计算结果

Fig. 2 Computational results of explicit precise algorithm with time step dt $=0.3\times10^{-7}$ s

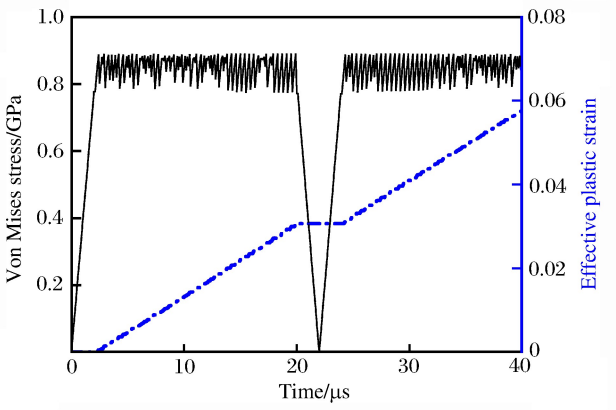

图 3 步长 dt $=1.0\times10^{-7}$ s 时显式精确算法计算结果

Fig. 3 Computational results of explicit precise algorithm with time step dt $=1.0\times10^{-7}$ s

2.1.2　时间步长 $dt=1.0\times10^{-7}$ s 时

该时间步长不满足显式精确算法计算得出的稳定性条件，计算结果如图 3 所示。可以看出，当材料屈服后，计算得到的等效应力出现了上下抖动现象，此时显式精确算法的计算不稳定，计算结果错误。

2.1.3　时间步长 $dt=1.5\times10^{-7}$ s 时

进一步增大了时间步长，其远不满足本构计算的稳定性条件。计算结果如图 4 所示。从图 4 可以看出，当材料屈服后，等效塑性应变历史曲线呈台阶式上升，四边形单元在弹性与塑性状态之间来回跳动，等效应力也变得极不稳定，计算结果与真实值相差巨大。但是当采用传统的近似算法（半径回归法）并仍取时间步长为 $dt=1.5\times10^{-7}$ s 时，数值计算结果稳定收敛，具体结果如图 5 所示。

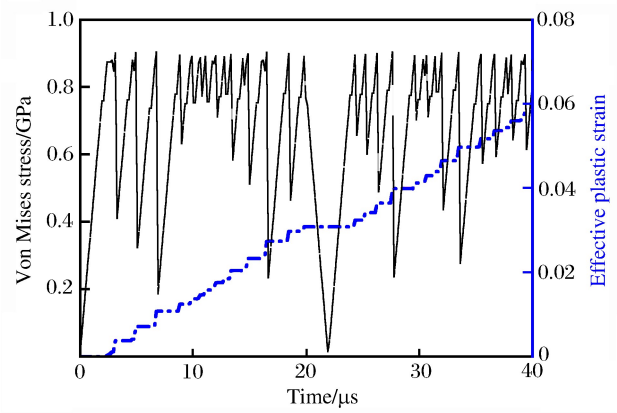

图 4　步长 $dt=1.5\times10^{-7}$ s 时显式精确算法计算结果

Fig. 4　Computational results of explicit precise algorithm with time step $dt=0.3\times10^{-7}$ s

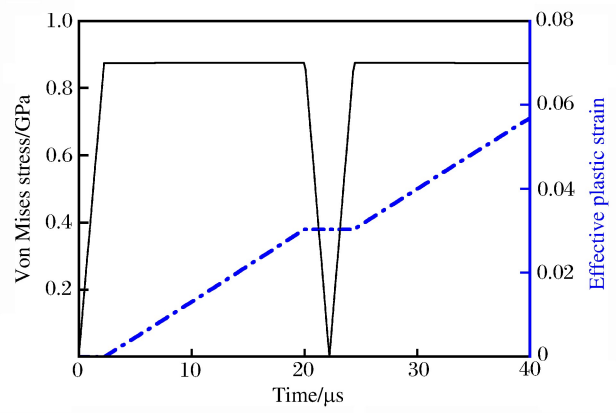

图 5　步长 $dt=1.5\times10^{-7}$ s 时半径回归法计算结果

Fig. 5　Computational results of radial return algorithm with time step $dt=1.0\times10^{-7}$ s

综合上述算例可以看出，显式精确算法的确存在计算稳定性问题，取同样的时间步长 $dt=1.5\times10^{-7}$ s，当采用传统的近似算法（半径回归法）得到了正确的结果，而采用显式精确算法时结果失稳。当时间步长减小至满足本构计算稳定性条件式(21)时，显式精确算法给出的计算结果也稳定收敛。

2.2　最大时间步长与材料参数和塑性应变率关系

进一步分析满足本构计算稳定的最大时间步长与材料参数和塑性应变率关系，分别研究各个参数与最大时间步长的关系。分为 4 组计算，每组只变化 1 个变量，其余参数的值取表 1 中的参数值，数值模拟得到满足本构计算稳定的最大时间步长，其随各参数的变化如图 6～9 所示。

可以看出，本构计算稳定性准则式(21)、(23)与模拟结果符合的较好，最大时间步长与各参量的依赖关系为：与应变率敏感因子 β 成正比、与静态条件下屈服强度 Y^* 成正比、与剪切模量 G 成反比、与塑性应变率成反比。但需要特别指出的是，本构计算稳定性准则式(21)只是显式精确算法计算稳定的必要性条件。在实际工程计算过程中，为提高其可靠性，可以取一个安全系数。

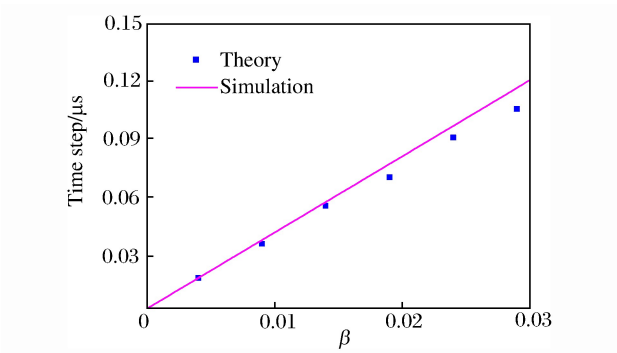

图 6　最大时间步长与应变率敏感因子关系

Fig. 6　Relationship between the maximum time step and the strain-rate sensitivity coefficient

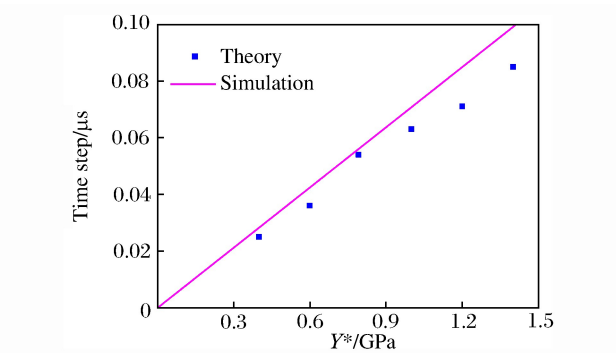

图 7　最大时间步长与准静态条件下屈服应力关系

Fig. 7　Relationship between the maximum time step and the yield strength under quasi-static condition

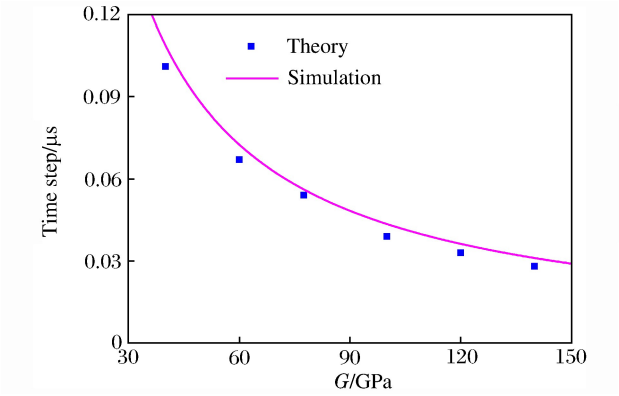

图 8 最大时间步长与剪切模量关系

Fig. 8 Relationship between the maximum time step and the shear modulus

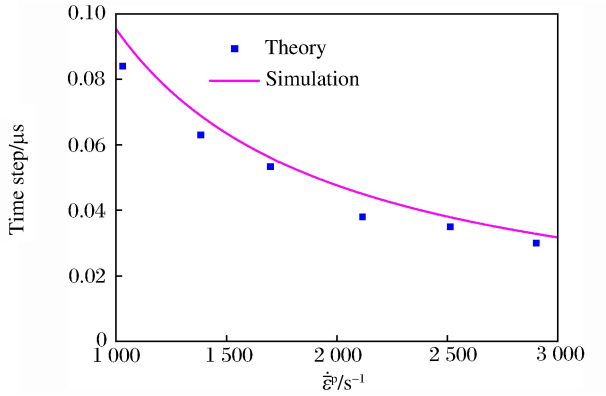

图 9 最大时间步长与塑性应变率关系

Fig. 9 Relationship between the maximum time step and the plastic strain rate

3 结 论

首先对最常用的 Mises 类黏塑性材料，重新推导显式精确算法的计算公式和流程，然后通过理论推导得到显式精确算法的稳定性条件。通过数值算例，取不同的时间步长来验证对显式精确算法的稳定性分析。

数值模拟结果表明，当时间步长过大，不满足本构计算的稳定性条件时，计算得到的等效屈服应力出现了不稳定现象；而当时间步长满足稳定性条件时，计算结果准确地描述了材料的复杂变形过程为：弹性加载、塑性加载、弹性卸载、反向弹性加载和反向塑性加载。进一步的数值模拟结果表明：推导得到的稳定性条件可正确预测满足本构计算稳定的最大时间步长与各参数之间的关系。

参考文献：

[1] Drucker D C. A more fundamental approach to plastic stress-strain relations[M]. Division of Applied Mathematics, Brown University, 1951.

[2] Drucker D C, Prager W, Greenberg H J. Extended limit design theorems for continuous media[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1952,9(4):381-389.

[3] Palmer A C, Maier G, Drucker D C. Convexity of yield surfaces and normality relations for unstable materials or structural elements[J]. Journal of Applied Mechanics, 1967,34(2):464-470.

[4] 李永池，唐之景，胡秀章. 关于 Drucker 公设和塑性本构关系的进一步研究[J]. 中国科学技术大学学报，1988,18(3):339-345.
Li Yongchi, Tang Zhijing, Hu Xiuzhang. Further study on the drucker postulate and plastic constitutive relations [J]. Journal of China University of Science and Technology, 1988,18(3):339-345.

[5] Hageman L J, Walsh J M. Help, a multi-material Eulerian program for compressible fluid and elastic-plastic flows in two space dimensions and time. Volume 1: AD0726459[R]. Systems Science and Software, La Jolla, California, 1971.

[6] Autodyn theory manual revision 4.3[R]. Century Dynamics Limited, Management Consulting Services, Horsham, United Kingdom, 2000.

[7] Hallquist J O. LS-DYNA theory manual[M]. Livermore: Livermore Software Technology Corporation, 2006.

[8] 李永池，谭福利，姚磊，等. 含损伤材料的热粘塑性本构关系及其应用[J]. 爆炸与冲击，2004,24(4):289-298.
Li Yongchi, Tan Fuli, Yao Lei, et al. Thermo-viscoplastic constitutive relation of damaged materials with application[J]. Explosion and Shock Waves, 2004,24(4):289-298.

The numerical stability of the constitutive calculation on viscoplastic materials

Liu Mingtao[1,2], Li Yongchi[2], Hu Xiuzhang[2], Zhang Jie[2]

(1. *Institute of Fluid Physics, China Academy of Engineering Physics, Mianyang* 621999, *Sichuan, China*;
2. *Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei* 230027, *Anhui, China*)

Abstract: At first, we analyzed the numerical stability of the explicit exact algorithm developed for the viscoplastic material, and then found that the explicit exact algorithm is not absolutely stable, deduced a necessary criterion that the time step should be kept below a certain value to guarantee the constitutive calculation stability. A series of numerical examples were presented to validate the reliability of the present stability analysis on the explicit exact algorithm. The results of the numerical examples show that the effective stress is unstable while the stability criterion for the constitutive calculation is not satisfied, but a complex deformation process including the elastic load, the plastic load, the elastic unload, the reverse elastic load and the reverse plastic load is accurately described while the stability criterion is satisfied. Further numerical results indicate that the stability criterion can accurately predict the relationships between the maximum time step and each parameter.

Keywords: constitutive relation; numerical stability; viscoplastic constitutive; explicit precise algorithm

(责任编辑　王易难)