DOI: 10.11883/1001-1455(2017)04-0591-09

半空间双相压电介质垂直边界附近圆孔对 SH 波的散射*

张希萌,齐 辉,项 梦
(哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院,黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 利用“Green 函数法”和“镜像法”对垂直边界附近含圆孔的半空间双相压电介质对 SH 波的散射问题进行分析,得到其稳态解。利用镜像法得到满足水平边界应力自由与电位移自由的波函数解析表达式。根据垂直边界连续性条件,利用“契合法”建立第一类 Fredholm 型积分方程组,得到圆孔周边的动应力集中系数与电场强度集中系数解析表达式。数值算例分析了入射波频率、入射角度、介质参数等对动应力集中系数与电场强度集中系数的影响,并与已有文献进行比较。计算表明,高频 SH 波垂直入射危害较大。

关键词: 半空间;双相压电介质;圆孔;SH 波;动应力集中系数;电场强度集中系数
中图分类号: O343.4 **国标学科代码**: 13015 **文献标志码**: A

压电介质具有机-电耦合效应,广泛应用于智能结构和传感器元件中,实现结构的自我诊断、自我修复等功能,因此其在未来航空航天飞行器设计中占有重要地位。由于加工工艺、环境变化等因素,复合材料会产生圆孔等缺陷,这些缺陷存在于界面附近(材料性质变化最剧烈)时,会引起材料失效、破坏等问题,例如压电元件在生产加工过程中形成的圆孔,其动应力集中问题比一般材料更复杂。许多学者对缺陷问题进行了研究并取得了丰富成果[1-11]。近年来,舒小平等[1]利用等效单层理论求解了正交压电复合材料层板在各类边界条件下的解析解;王永健等[2]利用理论对各项同性压电双材料中椭圆圆孔孔边裂纹的反平面问题进行分析;C. F. Gao 等[3]利用复变函数法研究了压电介质中椭圆形孔洞进行了断裂力学分析;K. L. Lee 等[4]对压电介质中斜椭圆孔的断裂问题进行了分析;J. K. Du 等[5]利用波函数展开法对部分脱胶夹杂对反平面剪切波的散射问题进行了研究;W. J. Feng 等[6]利用奇异积分方程技术研究了压电材料中脱胶夹杂对 SH 波的散射问题;宋天舒等[7-9]研究了全空间双相压电介质中水平边界附近圆孔的动力学问题。本文中,利用“Green 函数法”和“镜像法”构造出满足水平边界应力与电位移自由、垂直边界连续性条件的波函数。根据直角域垂直边界上连续性条件,利用“契合法”建立第一类 Fredholm 型积分方程组并进行求解。通过具体算例和数值结果,讨论入射角度、入射频率、介质参数等对压电材料力学和电学性质的影响。

1 问题的描述

如图 1 所示,介质Ⅰ为含圆孔的直角域,其质量密度、弹性常数、压电系数和介电常数分别为 ρ_1、c_{44}^{I}、e_{15}^{I} 和 κ_{11}^{I},其水平边界、垂直边界分别为 Γ_{H}、Γ_{V},圆孔中心位置与垂直边界 Γ_{V} 距离为 d,与水平边界 Γ_{H} 距离为 h,其边界为 Γ_{C};介质Ⅱ为无缺陷的直角域,其质量密度、弹性常数、压电系数和介电常数分别为 ρ_2、c_{44}^{II}、e_{15}^{II} 和 $\kappa_{11}^{\mathrm{II}}$;圆孔内空气的压电常数和介电常数分别为 e_{15}^{c} 和 κ_{11}^{c}。

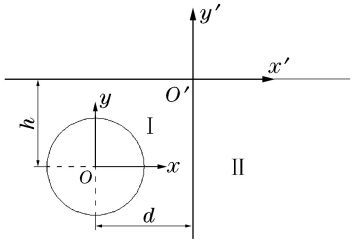

图 1 含圆孔的半空间双相压电介质模型
Fig. 1 Model of a piezoelectric bi-material in half space with a circular cavity

* **收稿日期**: 2015-11-24; **修回日期**: 2016-06-27
基金项目: 黑龙江省自然科学基金项目(A201404)
第一作者: 张希萌(1989—),男,博士研究生; **通信作者**: 齐 辉,qihui205@sina.com。

本文采用坐标变换法，建立坐标系 xOy 与 $x'O'y'$，对应的复坐标系分别为 $\eta=x+\mathrm{i}y=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 与 $\eta'=x'+\mathrm{i}y'=r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$，两坐标系之间关系为：

$$x'=x-d,\qquad y'=y-h \tag{1}$$

2 Green 函数

设 z 轴为压电材料的电极化方向，则反平面动力学问题的稳态控制方程（忽略时间因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$）为：

$$\begin{cases} c_{44}\ \nabla^2 w+e_{15}\ \nabla^2\varphi+\rho\omega^2 w=0 \\ e_{15}\ \nabla^2 w-\kappa_{11}\ \nabla^2\varphi=0 \end{cases} \tag{2}$$

式中：w 和 φ 分别为压电材料的平面位移和电势，ω 为 SH 波的圆频率。令 $\varphi=e_{15}(w+f)/\kappa_{11}$，则式(1)可以简化为：

$$\begin{cases} \nabla^2 w+k^2 w=0 \\ \nabla^2 f=0 \end{cases} \tag{3}$$

式中：波数 $k=\rho\omega^2/c^*$，$c^*=c_{44}+e_{15}^2/\kappa_{11}$。

利用复变函数法，令 $\eta=x+\mathrm{i}y$，$\overline{\eta}=x-\mathrm{i}y$，在复平面 $(\eta,\overline{\eta})$ 中，控制方程转化为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial\eta\partial\overline{\eta}}+\dfrac{1}{4}k^2 w=0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial\eta\partial\overline{\eta}}=0 \end{cases} \tag{4}$$

在复平面 $(\eta,\overline{\eta})$ 内采用极坐标系，令 $\eta=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$\overline{\eta}=r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$，则本构方程为：

$$\begin{cases} \tau_{rz}=\left(c_{44}+\dfrac{e_{15}^2}{\kappa_{11}}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\dfrac{\partial w}{\partial\overline{\eta}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)+\dfrac{e_{15}^2}{\kappa_{11}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\dfrac{\partial f}{\partial\overline{\eta}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) \\ \tau_{\theta z}=\mathrm{i}\left(c_{44}+\dfrac{e_{15}^2}{\kappa_{11}}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\dfrac{\partial w}{\partial\overline{\eta}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)+\mathrm{i}\,\dfrac{e_{15}^2}{\kappa_{11}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\dfrac{\partial f}{\partial\overline{\eta}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) \\ D_r=-e_{15}\left(\dfrac{\partial f}{\partial\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\dfrac{\partial f}{\partial\overline{\eta}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) \\ D_\theta=-\mathrm{i}e_{15}\left(\dfrac{\partial f}{\partial\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\dfrac{\partial f}{\partial\overline{\eta}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) \end{cases} \tag{5}$$

式中：τ_{rz} 和 $\tau_{\theta z}$ 分别的压电介质的径向和切向应力，D_r 和 D_θ 分别为圆孔中电场的径向和切向电位移。直角域介质Ⅰ在线源荷载 $\delta(\eta-\eta_0)$ 作用下的模型如图 2 所示，其中 $\eta_0=d+\mathrm{i}y(y\leqslant h)$，表示某个位于介质Ⅰ垂直边界 Γ_{V} 上的点。

直角域介质Ⅰ的边界条件可以表示为：

$$\begin{cases} \Gamma_{\mathrm{H}}:\ \tau_{yz}^{\mathrm{I}}\big|_{y=h}=0,\quad D_y^{\mathrm{I}}\big|_{y=h}=0 \\ \Gamma_{\mathrm{V}}:\ \tau_{xz}^{\mathrm{I}}\big|_{x=d}=\delta(\eta-\eta_0) \\ \Gamma_{\mathrm{C}}:\ \tau_{rz}^{\mathrm{I}}\big|_{r=a,-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi}=0 \\ \Gamma_{\mathrm{C}}:\ G_\varphi^{\mathrm{I}}\big|_{r=a,-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi}=G_\varphi^{\mathrm{c}}\big|_{r=a,-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi} \\ \Gamma_{\mathrm{C}}:\ D_r^{\mathrm{I}}\big|_{r=a,-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi}=D_r^{\mathrm{c}}\big|_{r=a,-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi} \end{cases} \tag{6}$$

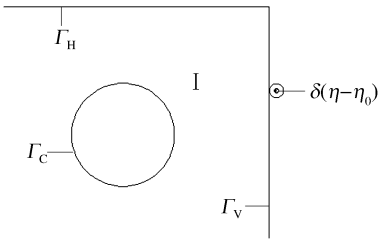

图 2 受线源荷载作用的直角域模型

Fig. 2 Right-angle plane model impacted by a line source force

式中：G_w^{I} 和 G_φ^{I} 分别表示介质Ⅰ中平面位移和电势的 Green 函数，上标“Ⅰ”表示与介质Ⅰ相关的物理量；G_φ^{c} 与 D_r^{c} 分别表示圆孔内的电势与电位移的 Green 函数，上标“c”表示圆孔内物理量。

求解线源荷载 $\delta(\eta-\eta_0)$ 产生的扰动可得入射波的位移 Green 函数 G_w^{in}。本文中利用“镜像法”构造满足水平垂直边界应力与电位移自由的入射波与散射波，其中与入射波相关的位移 Green 函数（G_w^{in}）和电势 Green 函数（G_φ^{in}）表达式为：

$$\begin{cases} G_w^{\text{in}} = \dfrac{\mathrm{i}}{2c_{44}^{\mathrm{I}}(1+\lambda^{\mathrm{I}})}\left[H_0^{(1)}(k_1|\eta-\eta_0|)+H_0^{(1)}(k_1|\eta-\overline{\eta}_0-2\mathrm{i}h|)\right] \\ G_\varphi^{\text{in}} = \dfrac{e_{15}^{\mathrm{I}}}{\kappa_{11}^{\mathrm{I}}} G_w^{\text{in}} \end{cases} \tag{7}$$

式中：$\lambda^{\mathrm{I}}=(e_{15}^{\mathrm{I}})^2/(c_{44}^{\mathrm{I}}\kappa_{11}^{\mathrm{I}})$ 为量纲一压电参数，上标“in”表示与入射波相关；k_1 为 SH 波在介质Ⅰ中的波数，$H^{(1)}$ 为第一类 Hankel 函数，其下标表示阶数。令上标“s”表示与散射波相关，则与散射波相关的位移 Green 函数（G_w^{s}）和电势 Green 函数（G_φ^{s}）表达式为：

$$\begin{cases} G_w^{\text{s}} = \dfrac{\mathrm{i}}{2c_{44}^{\mathrm{I}}(1+\lambda^{\mathrm{I}})}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \sum_{j=1}^{4} S_n^{(j)} \\ G_\varphi^{\text{s}} = \dfrac{e_{15}^{\mathrm{I}}}{\kappa_{11}^{\mathrm{I}}}(G_w^{\text{s}}+f^{\text{s}}), \qquad f^{\text{s}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[B_n\sum_{j=1}^{4}\varphi_{1n}^{(j)} + C_n\sum_{j=1}^{4}\varphi_{2n}^{(j)}\right] \end{cases} \tag{8}$$

式中：

$$\begin{aligned} &S_n^{(1)} = H_n^{(1)}(k_1|\eta|)\ [\eta/|\eta|]^n, \qquad S_n^{(2)} = H_n^{(1)}(k_1|\eta_1|)\ [\eta_1/|\eta_1|]^{-n} \\ &S_n^{(3)} = (-1)^n H_n^{(1)}(k_1|\eta_2|)\ [\eta_2/|\eta_2|]^n, \qquad S_n^{(4)} = (-1)^n H_n^{(1)}(k_1|\eta_3|)\ [\eta_3/|\eta_3|]^{-n} \\ &\varphi_{1n}^{(1)} = \eta^{-n}, \qquad \varphi_{1n}^{(2)} = (\overline{\eta}+2\mathrm{i}h)^{-n} \\ &\varphi_{1n}^{(3)} = (-1)^n(\overline{\eta}-2d)^{-n}, \qquad \varphi_{1n}^{(4)} = (-1)^n(\eta-2d-2\mathrm{i}h)^{-n} \\ &\varphi_{2n}^{(1)} = \overline{\eta}^{-n}, \qquad \varphi_{2n}^{(2)} = (\eta-2\mathrm{i}h)^{-n} \\ &\varphi_{2n}^{(3)} = (-1)^n(\eta-2d)^{-n}, \qquad \varphi_{2n}^{(4)} = (-1)^n(\overline{\eta}-2d+2\mathrm{i}h)^{-n} \\ &\eta_1 = \eta-2\mathrm{i}h, \qquad \eta_2 = \eta_1-2d, \qquad \eta_3 = \eta-2d \end{aligned} \tag{8}$$

根据以上结果，可以得到介质Ⅰ中位移 Green 函数 G_w^{I} 与电势 Green 函数 G_φ^{I}，即

$$G_w^{\mathrm{I}} = G_w^{\text{in}} + G_w^{\text{s}}, \qquad G_\varphi^{\mathrm{I}} = G_\varphi^{\text{in}} + G_\varphi^{\text{s}} \tag{9}$$

对于圆孔内部可以形成电场，其电势 Green 函数（G_φ^{c}）的表达式为：

$$G_\varphi^{\text{c}} = \frac{e_{15}^{\text{c}}}{\kappa_{11}^{\text{c}}} f^{\text{c}}, \qquad f^{\text{c}} = D_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(D_n\eta^n + E_n\overline{\eta}^n) \tag{10}$$

利用边界条件式(6)建立关于 A_n、B_n、C_n、D_n、E_n 的方程组如下：

$$\begin{cases} \xi^{(1)} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n\xi_n^{(11)} + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n\xi_n^{(12)} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n\xi_n^{(13)} + \sum_{n=0}^{+\infty} D_n\xi_n^{(14)} + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n\xi_n^{(15)} \\ \xi^{(2)} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n\xi_n^{(21)} + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n\xi_n^{(22)} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n\xi_n^{(23)} + \sum_{n=0}^{+\infty} D_n\xi_n^{(24)} + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n\xi_n^{(25)} \\ \xi^{(3)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} B_n\xi_n^{(32)} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n\xi_n^{(33)} + \sum_{n=0}^{+\infty} D_n\xi_n^{(34)} + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n\xi_n^{(35)} \end{cases} \tag{11}$$

式中：

$$\begin{aligned} &\xi_n^{(11)} = \frac{\mathrm{i}k_1}{4}\left[\sum_{j=1}^{4}\chi_n^{(j)}\exp(\mathrm{i}\theta) + \sum_{j=1}^{4}\gamma_n^{(j)}\exp(-\mathrm{i}\theta)\right] \\ &\xi_n^{(12)} = \frac{(e_{15}^{\mathrm{I}})^2}{\kappa_{11}^{\mathrm{I}}}\left[\sum_{j=1}^{2}\zeta_n^{(j)}\exp(\mathrm{i}\theta) + \sum_{j=1}^{2}\vartheta_n^{(j)}\exp(-\mathrm{i}\theta)\right] \\ &\xi_n^{(13)} = \frac{(e_{15}^{\mathrm{I}})^2}{\kappa_{11}^{\mathrm{I}}}\left[\sum_{j=1}^{2}\upsilon_n^{(j)}\exp(\mathrm{i}\theta) + \sum_{j=1}^{2}\psi_n^{(j)}\exp(-\mathrm{i}\theta)\right] \\ &\xi_n^{(14)} = -\frac{(e_{15}^{\text{c}})^2}{\kappa_{11}^{\text{c}}} n\eta^n\exp(\mathrm{i}\theta), \qquad \xi_n^{(15)} = -\frac{(e_{15}^{\text{c}})^2}{\kappa_{11}^{\text{c}}} n\overline{\eta}^n\exp(-\mathrm{i}\theta) \\ &\xi_n^{(21)} = \frac{e_{15}^{\mathrm{I}}\mathrm{i}}{2c_{44}^{\mathrm{I}}(1+\lambda^{\mathrm{I}})\kappa_{11}^{\mathrm{I}}}\sum_{j=1}^{4}S_n^{(j)}, \qquad \xi_n^{(22)} = \frac{e_{15}^{\mathrm{I}}}{\kappa_{11}^{\mathrm{I}}}\sum_{j=1}^{4}\varphi_{1n}^{(j)} \\ &\xi_n^{(23)} = \frac{e_{15}^{\mathrm{I}}}{\kappa_{11}^{\mathrm{I}}}\sum_{j=1}^{4}\varphi_{2n}^{(j)}, \qquad \xi_n^{(24)} = -\frac{e_{15}^{\text{c}}}{\kappa_{11}^{\text{c}}}\eta^n, \qquad \xi_n^{(25)} = -\frac{e_{15}^{\text{c}}}{\kappa_{11}^{\text{c}}}\overline{\eta}^n \end{aligned}$$

$$\xi_n^{(32)} = -e_{15}^{\mathrm{I}}\left[\sum_{j=1}^{2}\zeta_n^{(j)}\exp(\mathrm{i}\theta)+\sum_{j=1}^{2}\vartheta_n^{(j)}\exp(-\mathrm{i}\theta)\right]$$

$$\xi_n^{(33)} = -e_{15}^{\mathrm{I}}\left[\sum_{j=1}^{2}\upsilon_n^{(j)}\exp(\mathrm{i}\theta)+\sum_{j=1}^{2}\psi_n^{(j)}\exp(-\mathrm{i}\theta)\right]$$

$$\xi_n^{(34)} = e_{15}^{\mathrm{c}} n\eta^{n-1}\exp(\mathrm{i}\theta),\qquad \xi_n^{(35)} = e_{15}^{\mathrm{c}} n\overline{\eta}^{n-1}\exp(-\mathrm{i}\theta)$$

$$\xi^{(1)} = -\frac{\mathrm{i}k_1}{4}\left\{\left[H_{-1}^{(1)}(k_1|\eta-\eta_0|)\frac{\overline{\eta}-\overline{\eta}_0}{|\eta-\eta_0|}+H_{-1}^{(1)}(k_1|\eta-\overline{\eta}_0-2\mathrm{i}h|)\frac{\overline{\eta}-\eta_0+2\mathrm{i}h}{|\eta-\overline{\eta}_0-2\mathrm{i}h|}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}+\right.$$
$$\left.\left[H_{-1}^{(1)}(k_1|\eta-\eta_0|)\frac{\eta-\eta_0}{|\eta-\eta_0|}+H_{-1}^{(1)}(k_1|\eta-\overline{\eta}_0-2\mathrm{i}h|)\frac{\eta-\overline{\eta}_0-2\mathrm{i}h}{|\eta-\overline{\eta}_0-2\mathrm{i}h|}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}\right\}$$

$$\xi^{(2)} = -\frac{\mathrm{i}e_{15}^{\mathrm{I}}}{2c_{44}^{\mathrm{I}}(1+\lambda^{\mathrm{I}})\kappa_{11}^{\mathrm{I}}}\left[H_0^{(1)}(k_1|\eta-\eta_0|)+H_0^{(1)}(k_1|\eta-\overline{\eta}_0-2\mathrm{i}h|)\right],\qquad \xi^{(3)}=0$$

$$\chi_n^{(1)} = H_{n-1}^{(1)}(k_1|\eta|)\left[\eta/|\eta|\right]^{n-1},\qquad \chi_n^{(2)} = -H_{n+1}^{(1)}(k_1|\eta_1|)\left[\eta_1/|\eta_1|\right]^{-n-1}$$

$$\chi_n^{(3)} = (-1)^n H_{n-1}^{(1)}(k_1|\eta_2|)\left[\eta_2/|\eta_2|\right]^{n-1},\qquad \chi_n^{(4)} = -(-1)^n H_{n+1}^{(1)}(k_1|\eta_3|)\left[\eta_3/|\eta_3|\right]^{-n-1}$$

$$\gamma_n^{(1)} = -H_{n+1}^{(1)}(k_1|\eta|)\left[\eta/|\eta|\right]^{n+1},\qquad \gamma_n^{(2)} = H_{n-1}^{(1)}(k_1|\eta_1|)\left[\eta_1/|\eta_1|\right]^{-n+1}$$

$$\gamma_n^{(3)} = -(-1)^n H_{n+1}^{(1)}(k_1|\eta_2|)\left[\eta_2/|\eta_2|\right]^{n+1},\qquad \gamma_n^{(4)} = (-1)^n H_{n-1}^{(1)}(k_1|\eta_3|)\left[\eta_3/|\eta_3|\right]^{-n+1}$$

$$\zeta_n^{(1)} = -n\eta^{-n-1},\qquad \zeta_n^{(2)} = -(-1)^n n(\eta-2d-2\mathrm{i}h)^{-n-1}$$

$$\vartheta_n^{(1)} = -n(\overline{\eta}+2\mathrm{i}h)^{-n-1},\qquad \vartheta_n^{(2)} = -(-1)^n n(\overline{\eta}-2d)^{-n-1}$$

$$\upsilon_n^{(1)} = -n(\eta-2\mathrm{i}h)^{-n-1},\qquad \upsilon_n^{(2)} = -n(-1)^n(\eta-2d)^{-n-1}$$

$$\psi_n^{(1)} = -n\overline{\eta}^{-n-1},\qquad \psi_n^{(2)} = -(-1)^n n(\overline{\eta}-2d+2\mathrm{i}h)^{-n-1}$$

将式(11)中各等式两端同时乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}$($m=0,\pm1,\pm2,\pm3\cdots$),在边界 Γ_{C} 对($-\pi,\pi$)区间积分,截取有限项,从而得到关于待定系数的线性方程组,求解即可得出 A_n、B_n、C_n、D_n、E_n。

与介质Ⅰ类比,设 k_2 为 SH 波在介质Ⅱ中的波数,$\lambda^{\mathrm{Ⅱ}}$ 为介质Ⅱ的量纲一压电参数,则其 Green 函数的表达式为:

$$\begin{cases} G_w^{\mathrm{Ⅱ}} = \dfrac{\mathrm{i}}{2c_{44}^{\mathrm{Ⅱ}}(1+\lambda^{\mathrm{Ⅱ}})}\left[H_0^{(1)}(k_2|\eta-\eta_0|)+H_0^{(1)}(k_2|\eta-\overline{\eta}_0-2\mathrm{i}h|)\right] \\ G_\varphi^{\mathrm{Ⅱ}} = \dfrac{e_{15}^{\mathrm{Ⅱ}}}{\kappa_{11}^{\mathrm{Ⅱ}}}G_w^{\mathrm{Ⅱ}} \end{cases} \tag{12}$$

3 SH 波的散射

根据文献[9-11]中方法,由入射波、反射波、折射波、和散射波引起的压电材料位移函数 w^{in}、w^{r}、w^{f}、w^{s} 及其激发的电势函数 φ^{in}、φ^{r}、φ^{f} 和 φ^{s} 表达式分别为:

$$\begin{aligned}
w^{\mathrm{in}} &= w_0\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k_1}{2}\left[(\eta-d-\mathrm{i}h)\exp(-\mathrm{i}\alpha_0)+\mathrm{c.c}\right]\right\}+w_0\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k_1}{2}\left[(\eta-d-\mathrm{i}h)\exp(\mathrm{i}\alpha_0)+\mathrm{c.c}\right]\right\}\\
\varphi^{\mathrm{in}} &= \varphi_0\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k_1}{2}\left[(\eta-d-\mathrm{i}h)\exp(-\mathrm{i}\alpha_0)+\mathrm{c.c}\right]\right\}+\varphi_0\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k_1}{2}\left[(\eta-d-\mathrm{i}h)\exp(\mathrm{i}\alpha_0)+\mathrm{c.c}\right]\right\}\\
w^{\mathrm{r}} &= w_1\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k_1}{2}\left[(\eta-d-\mathrm{i}h)\exp(-\mathrm{i}\beta_0)+\mathrm{c.c}\right]\right\}+w_1\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k_1}{2}\left[(\eta-d-\mathrm{i}h)\exp(\mathrm{i}\beta_0)+\mathrm{c.c}\right]\right\}\\
\varphi^{\mathrm{r}} &= \varphi_1\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k_1}{2}\left[(\eta-d-\mathrm{i}h)\exp(-\mathrm{i}\beta_0)+\mathrm{c.c}\right]\right\}+\varphi_1\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k_1}{2}\left[(\eta-d-\mathrm{i}h)\exp(\mathrm{i}\beta_0)+\mathrm{c.c}\right]\right\}\\
w^{\mathrm{f}} &= w_2\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k_2}{2}\left[(\eta-d-\mathrm{i}h)\exp(-\mathrm{i}\alpha_2)+\mathrm{c.c}\right]\right\}+w_2\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k_2}{2}\left[(\eta-d-\mathrm{i}h)\exp(\mathrm{i}\alpha_2)+\mathrm{c.c}\right]\right\}\\
\varphi^{\mathrm{f}} &= \varphi_2\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k_2}{2}\left[(\eta-d-\mathrm{i}h)\exp(-\mathrm{i}\alpha_2)+\mathrm{c.c}\right]\right\}+\varphi_2\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k_2}{2}\left[(\eta-d-\mathrm{i}h)\exp(\mathrm{i}\alpha_2)+\mathrm{c.c}\right]\right\}\\
w^{\mathrm{s}} &= \frac{\mathrm{i}}{2c_{44}^{\mathrm{I}}(1+\lambda^{\mathrm{I}})}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}K_n\sum_{j=1}^{4}S_n^{(j)},\qquad \varphi^{\mathrm{s}} = \frac{e_{15}^{\mathrm{I}}}{\kappa_{11}^{\mathrm{I}}}(w^{\mathrm{s}}+f_w^{\mathrm{s}}),\qquad f_w^{\mathrm{s}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[P_n\sum_{j=1}^{4}\varphi_{1n}^{(j)}+Q_n\sum_{j=1}^{4}\varphi_{2n}^{(j)}\right]\\
\varphi^{\mathrm{c}} &= \frac{e_{15}^{\mathrm{c}}}{\kappa_{11}^{\mathrm{c}}}f_w^{\mathrm{c}},\qquad f_w^{\mathrm{c}} = S_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(S_n\eta^n+T_n\overline{\eta}^n)
\end{aligned} \tag{13}$$

式中：c. c 表示取前一项的复共轭；β_0 为反射角度，且 $\beta_0=\pi-\alpha_0$；α_0 为入射角度；α_2 为折射角度；w_0、w_1、w_2、φ_1、φ_2 为常数，满足连续性条件：

$$w_0+w_1=w_2,\qquad \varphi_0+\varphi_1=\varphi_2,\qquad k_1\sin\alpha_0=k_2\sin\alpha_2 \tag{14}$$

待定系数 K_n、P_n、Q_n、S_n、T_n 可以根据边界条件（应力自由，电势和电位移连续）进行求解，与上节确定 Green 函数中系数的方法相同。

4　契合法

如图 3 所示，利用“契合法”将两直角域模型介质Ⅰ和介质Ⅱ在垂直边界上“契合”起来，形成半空间模型，其中坐标系 $x'O'y'$ 与 xOy 的关系为 $\eta=\eta'+d+\mathrm{i}h$。为满足垂直边界上的连续性，根据文献[10]中方法，在垂直边界 Γ_{V} 上施加一对反平面外力系 $f_1(r_0',\theta_0')$ 和 $f_2(r_0',\theta_0')$ 及一对平面内电场 $f_3(r_0',\theta_0')$ 和 $f_4(r_0',\theta_0')$。

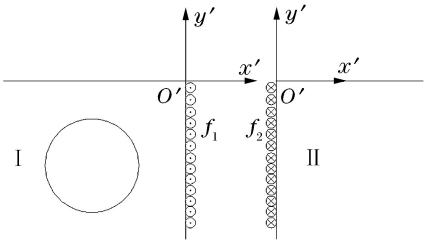

图 3　含圆孔的半空间双相压电介质垂直界面的契合

Fig. 3　Conjunction of piezoelectric bi-material vertical interface in half space with a circular cavity

在介质Ⅰ中：

$$\begin{cases} w^{\mathrm{I}}=w^{\mathrm{in}}+w^{\mathrm{r}}+w^{\mathrm{s}} \\ \tau_{\theta z}^{\mathrm{I}}=\tau_{\theta z}^{\mathrm{in}}+\tau_{\theta z}^{\mathrm{r}}+\tau_{\theta z}^{\mathrm{s}} \\ \varphi^{\mathrm{I}}=\varphi^{\mathrm{in}}+\varphi^{\mathrm{r}}+\varphi^{\mathrm{s}} \\ D_\theta^{\mathrm{I}}=D_\theta^{\mathrm{in}}+D_\theta^{\mathrm{r}}+D_\theta^{\mathrm{s}} \end{cases} \tag{15}$$

在介质Ⅱ中：

$$w^{\mathrm{Ⅱ}}=w^{\mathrm{f}},\qquad \tau_{\theta z}^{\mathrm{Ⅱ}}=\tau_{\theta z}^{\mathrm{f}},\qquad \varphi^{\mathrm{Ⅱ}}=\varphi^{\mathrm{f}},\qquad D_\theta^{\mathrm{Ⅱ}}=D_\theta^{\mathrm{f}} \tag{16}$$

在垂直边界 $\theta_0'=-\pi/2$ 上，由连续性条件可知：

$$\begin{cases} \tau_{\theta z}^{\mathrm{I}}\sin\theta_0'+f_1(r_0',\theta_0')=\tau_{\theta z}^{\mathrm{Ⅱ}}\sin\theta_0'+f_2(r_0',\theta_0'), & w^{\mathrm{I}}+w^{f_1}=w^{\mathrm{Ⅱ}}+w^{f_2} \\ D_\theta^{\mathrm{I}}\sin\theta_0'+f_3(r_0',\theta_0')=D_\theta^{\mathrm{Ⅱ}}\sin\theta_0'+f_4(r_0',\theta_0'), & \varphi^{\mathrm{I}}+\varphi^{f_3}=\varphi^{\mathrm{Ⅱ}}+\varphi^{f_4} \end{cases} \tag{17}$$

式中：w^{f_1} 和 w^{f_2} 分别为外力系 $f_1(r_0',\theta_0')$ 和 $f_2(r_0',\theta_0')$ 引起的位移，φ^{f_3} 和 φ^{f_4} 分别为外电场 $f_3(r_0',\theta_0')$ 和 $f_4(r_0',\theta_0')$ 引起的电势。

垂直边界 Γ_{V} 上连续性条件为：

$$\begin{cases} w^{\mathrm{in}}+w^{\mathrm{r}}=w^{\mathrm{f}}, & \tau_{\theta z}^{\mathrm{in}}+\tau_{\theta z}^{\mathrm{r}}=\tau_{\theta z}^{\mathrm{f}} \\ \varphi^{\mathrm{in}}+\varphi^{\mathrm{r}}=\varphi^{\mathrm{f}}, & D_\theta^{\mathrm{in}}+D_\theta^{\mathrm{r}}=D_\theta^{\mathrm{f}} \end{cases} \tag{18}$$

利用式(17)对式(16)进行简化，得到关于外力系的积分方程如下：

$$f_1(r_0',\theta_0')=f_2(r_0',\theta_0'),\quad \int_0^\infty f_1(r_0',\theta_0')\left[G_w^{(1)}(r_0',\theta_0';r,\theta)+G_w^{(2)}(r_0',\theta_0';r,\theta)\right]\mathrm{d}r_0'=-w^{\mathrm{s}} \tag{19}$$

$$f_3(r_0',\theta_0')=f_4(r_0',\theta_0'),\quad \int_0^\infty f_3(r_0',\theta_0')\left[G_\varphi^{(1)}(r_0',\theta_0';r,\theta)+G_\varphi^{(2)}(r_0',\theta_0';r,\theta)\right]\mathrm{d}r_0'=-\varphi^{\mathrm{s}} \tag{20}$$

积分方程式(19)～(20)为含弱奇异性的第一类 Fredholm 型积分方程，可以采用直接离散法进行求解。

5　动应力集中系数

根据文献[10]，在 SH 波作用下圆孔周边的环向剪切应力可以表示为：

$$\tau_{\theta z}=\tau_{\theta z}^{\mathrm{I}}+\mathrm{i}c_{44}^{\mathrm{I}}\int_0^\infty f_1(\eta_0')\left(\frac{\partial G_w^{\mathrm{I}}}{\partial\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\frac{\partial G_w^{\mathrm{I}}}{\partial\overline{\eta}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}|\eta_0'|+\mathrm{i}e_{15}^{\mathrm{I}}\int_0^\infty f_3(\eta_0')\left(\frac{\partial G_\varphi^{\mathrm{I}}}{\partial\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\frac{\partial G_\varphi^{\mathrm{I}}}{\partial\overline{\eta}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}|\eta_0'| \tag{21}$$

动应力集中系数 $\tau_{\theta z}^*$（dynamic stress concentration factor，DSCF）可表示为：

$$\tau_{\theta z}^*=|\tau_{\theta z}/\tau_0|,\qquad \tau_0=\mathrm{i}k_1\left[c_{44}^{\mathrm{I}}+(e_{15}^{\mathrm{I}})^2/\kappa_{11}^{\mathrm{I}}\right]w_0 \tag{22}$$

6　电场强度集中系数

根据文献[10]，在 SH 波作用下圆孔周边电场强度可以表示为：

$$E_\theta = E_\theta^{\mathrm{I}} - \mathrm{i}\int_0^\infty f_3(\eta_0')\left(\frac{\partial G_\varphi^{\mathrm{I}}}{\partial \eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} - \frac{\partial G_\varphi^{\mathrm{I}}}{\partial \bar{\eta}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}\right)\mathrm{d}\,|\eta_0'|\,, \qquad E_\theta^{\mathrm{I}} = -\mathrm{i}\left(\frac{\partial \varphi^{\mathrm{I}}}{\partial \eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} - \frac{\partial \varphi^{\mathrm{I}}}{\partial \bar{\eta}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}\right) \tag{23}$$

由此可得，电场强度集中系数 E_θ^*（electric field intensity concentration factor，EFICF）的表达式为：

$$E_\theta^* = \frac{E_\theta}{E_0}, \qquad E_0 = \frac{k_1 e_{15}^{\mathrm{I}} w_0}{k_{11}^{\mathrm{I}}} \tag{24}$$

7 具体算例

当 $\lambda^{\mathrm{I}} = \lambda^{\mathrm{II}} = 0$，$c_{44}^{\mathrm{I}} = c_{44}^{\mathrm{II}}$，$k_1 = k_2$，$\rho_1 = \rho_2$ 时，本文模型退化为含圆孔的半空间弹性介质。当参数取值与文献[12]相同时，该模型中动应力集中系数 $\tau_{\theta z}^*$ 的分布情况如图 4(a)所示。对比可知，计算结果与文献[12]中结果吻合较好。当 $\lambda^{\mathrm{I}} = \lambda^{\mathrm{II}} = 0$，$c_{44}^{\mathrm{II}} = 0$，$k_2 = 0$，$\rho_2 = 0$ 时，本文模型退化为含圆孔的直角域弹性介质。采用与文献[13]中相同的参数求解得到 $\tau_{\theta z}^*$ 的分布情况，如图 4(b)所示。对比可知，计算结果与文献[13]中结果吻合较好。因此本文所采用的计算方法是可行的。以下令 $k_1 = k$，构造量纲一参数 $k_1^* = k_2/k_1$，$h^* = h/a$，$d^* = d/a$ 对计算模型进行分析，并设 $k_1^* = 1$，$c_{44}^{\mathrm{II}}/c_{44}^{\mathrm{I}} = 2$，$\kappa_{11}^{\mathrm{I}}/\kappa_{11}^{\mathrm{c}} = 1000$，其中 κ_{11}^{c} 为圆孔内部空气的介电常数，a 为圆孔半径。

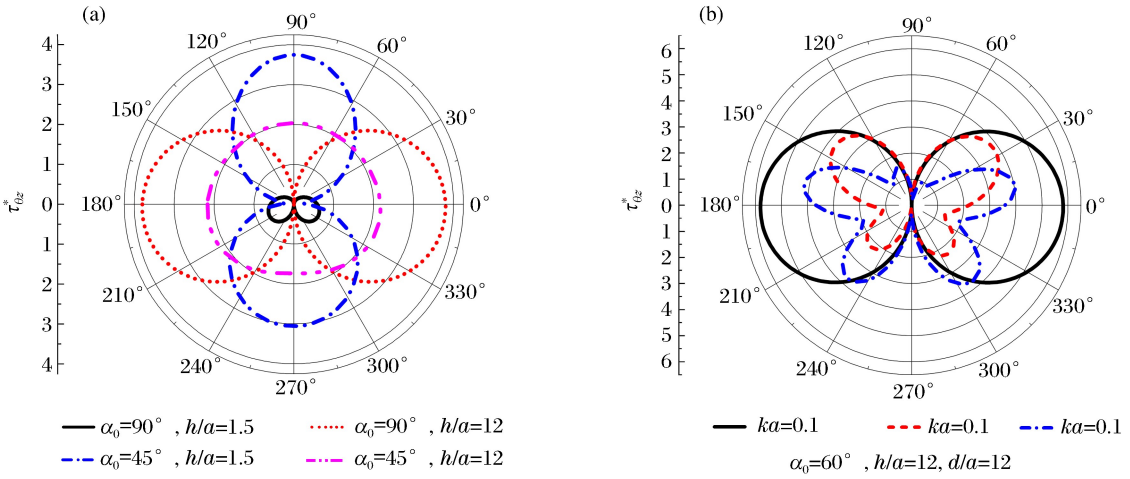

图 4 方法验证(与文献[12-13]比较)

Fig. 4 Vertification of the present method (Compared to reference [12-13])

图 5 给出了低频 SH 波以不同角度入射时圆孔周边动应力集中系数的分布情况。图 5 显示：SH 波水平入射时，$\tau_{\theta z}^*$ 最大值分布在圆孔上、下两侧；垂直入射时，$\tau_{\theta z}^*$ 最大值分布在圆孔左、右两侧。当 SH 波垂直入射时，$\tau_{\theta z}^*$ 最大值为 2(θ=0°)，比水平入射时 $\tau_{\theta z}^*$ 的最大值 1.67(θ=73°)提高约 19.7%，可见入射角度对 $\tau_{\theta z}^*$ 存在影响。

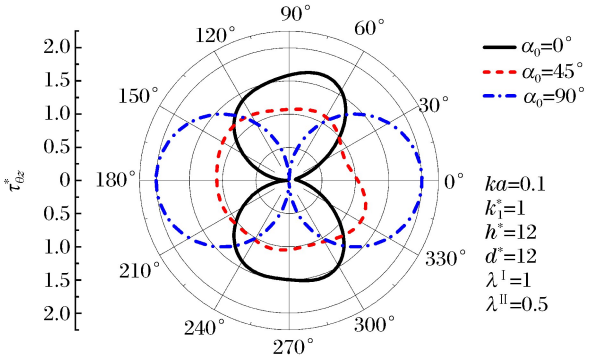

图 5 SH 波以不同角度入射时圆孔周边动应力集中系数的分布

Fig. 5 DSCF around circular cavity edge by SH-wave with different incident angles

图 6 给出了 SH 波水平入射时圆孔周边动应力集中系数随参数 ka 的变化情况。由图 6 可知：当 ka=0.1 时，$\tau_{\theta z}^*$ 的最大值为 1.67(θ=73°)；当 ka=2 时，$\tau_{\theta z}^*$ 最大值为 2(θ=90°)，提高了约 19.7%。因此 ka 对 $\tau_{\theta z}^*$ 影响显著。综合图 5 和图 6 结果可知，高频 SH 波垂直入射对 $\tau_{\theta z}^*$ 的影响较大。

图 7 给出了 SH 波水平入射时圆孔周边动应力集中系数随 λ^{I} 分布情况。由图 7 可知：当 λ^{I}=0.3 时，$\tau_{\theta z}^*$ 最大值为 1.2(θ=90°)；当 λ^{I}=1 时，$\tau_{\theta z}^*$ 最大值为 2(θ=90°)，约为前者的 1.6 倍。

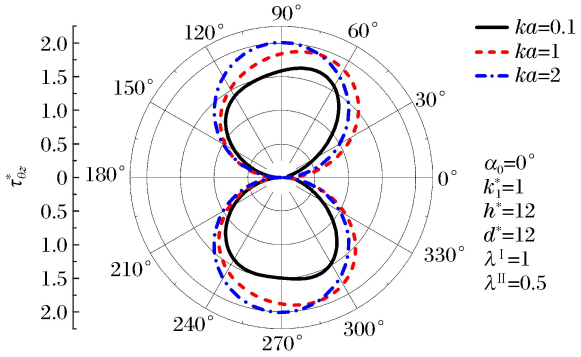

图 6 SH 波水平入射时圆孔周边动应力集中系数随参数 ka 的分布

Fig. 6 DSCF around circular cavity edge vs. ka by horizontal SH-wave

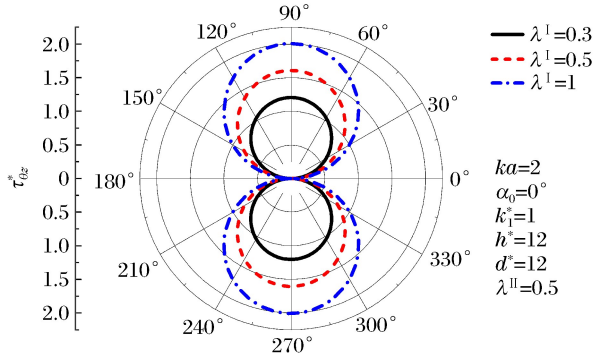

图 7 SH 波水平入射时圆孔周边动应力集中系数随 λ^{I} 的分布

Fig. 7 DSCF around circular cavity edge vs. λ^{I} by horizontal SH-wave

图 8 给出了 SH 波水平入射时圆孔周边动应力集中系数随 λ^{II} 的变化情况。由图 8 可知：当 $\lambda^{\mathrm{II}}=1$ 时，$\tau_{\theta z}^{*}$ 最大值为 5.2（$\theta=17°$）；$\lambda^{\mathrm{II}}=0.3$ 或 0.5 时，$\tau_{\theta z}^{*}$ 的分布基本一致，最大值为 2（$\theta=90°$），约为前者的 38%。由此可见，λ^{II} 对 $\tau_{\theta z}^{*}$ 的影响比 λ^{I} 更显著。

图 9 给出了 SH 波水平入射时圆孔 $\theta=-\pi$ 处动应力集中系数随 ka 的变化情况。由图 9 可知：$\tau_{\theta z}^{*}$ 随 ka 增大振荡变化；当 $0\leqslant ka<1.1$ 时，$\lambda^{\mathrm{I}}=0.3$ 对应的 $\tau_{\theta z}^{*}$ 比较大；当 $1.1\leqslant ka<2$ 时，$\lambda^{\mathrm{I}}=1$ 对应的 $\tau_{\theta z}^{*}$ 较大；当 $\lambda^{\mathrm{I}}=1$、$ka=1.9$ 时，$\tau_{\theta z}^{*}$ 达到最大值，约为 2.46。由此可见，当参数 ka 相同时，λ^{I} 对 $\tau_{\theta z}^{*}$ 的分布存在影响。

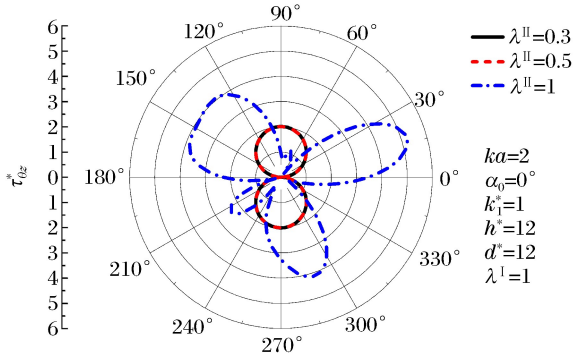

图 8 SH 波水平入射时圆孔周边动应力集中系数随 λ^{II} 的分布

Fig. 8 DSCF around circular cavity edge vs. λ^{II} by horizontal SH-wave

图 10 给出了 SH 波以不同角度入射时圆孔周边电场强度系数的分布情况。由图 10 可知：SH 波水平入射时，E_{θ}^{*} 最大值分布在圆孔上下两侧；垂直入射时，E_{θ}^{*} 最大值分布在圆孔左右两侧，与图 5 中 $\tau_{\theta z}^{*}$ 的分布趋势一致。SH 波水平入射时，E_{θ}^{*} 的最大值为 0.81（$\theta=-108°$）；垂直入射时，E_{θ}^{*} 的最大值为 2（$\theta=0°$），约为前者的 2.4 倍。由此可见，入射角度对 E_{θ}^{*} 存在影响。

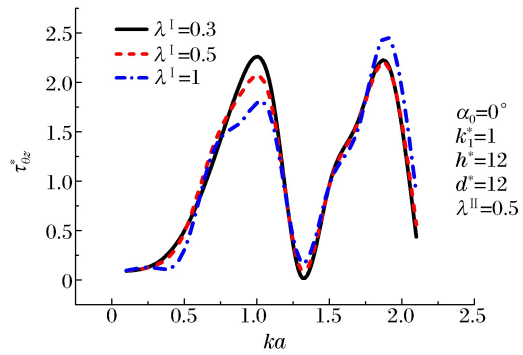

图 9 SH 波水平入射时圆孔周边应力集中系数随参数 ka 的变化

Fig. 9 DSCF around circular cavity edge vs. ka by horizontal SH-wave

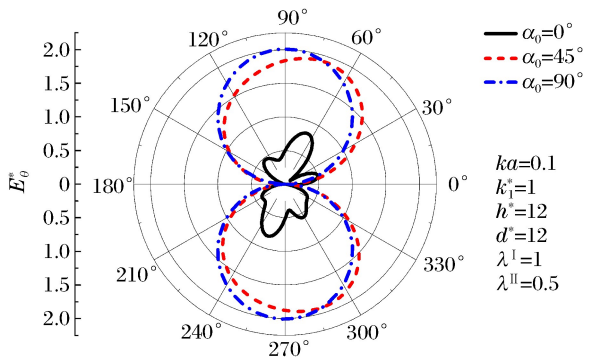

图 10 SH 波以不同角度入射时圆孔周边电场强度集中系数的分布

Fig. 10 EFICF around circular cavity edge by SH-wave with different incident angles

图 11 给出了 SH 波水平入射时圆孔周边电场强度系数随参数 ka 的变化情况。由图 11 可知，ka 对 E_θ^* 影响显著。当 $ka=0.1$ 时，E_θ^* 最大值为 0.81($\theta=-108°$)；当 $ka=2$ 时，E_θ^* 最大值为 2($\theta=90°$)，约为前者的 2.4 倍。综合图 10 和图 11 结果可知，高频 SH 波垂直入射对 E_θ^* 影响较大。

图 12 给出了 $\theta=-\pi$ 处 SH 波水平入射时电场强度系数随 ka 的变化情况。由图 12 可知：E_θ^* 随着 ka 的增大振荡变化；当 $0\leqslant ka<1.7$ 时，$\lambda^{\mathrm{I}}=0.3$ 对应的 E_θ^* 较大；当 $1.7\leqslant ka<2$ 时，$\lambda^{\mathrm{I}}=1$ 对应的 E_θ^* 较大；当 $ka=1.9$、$\lambda^{\mathrm{I}}=1$ 时，E_θ^* 达到最大值，约为 2.95。由此可见，在参数 ka 相同的情况下，λ^{I} 对 E_θ^* 的分布存在一定的影响。

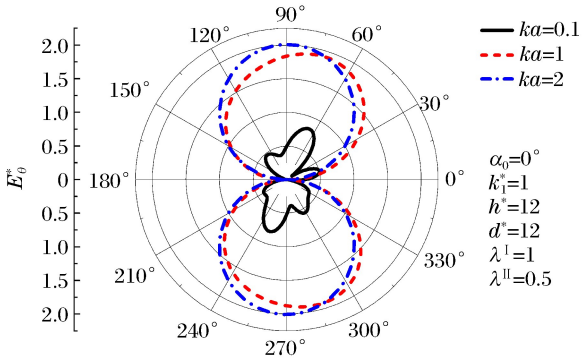

图 11 SH 波水平入射时圆孔周边电场强度集中系数随参数 ka 的分布

Fig. 11 EFICF around circular cavity edge vs. ka by horizontal SH-wave

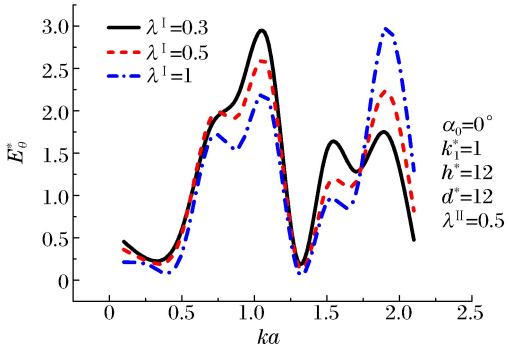

图 12 SH 波水平入射时电场强度集中系数随参数 ka 的分布

Fig. 12 Variation of EFICF around circular cavity edge vs. ka by horizontal SH-wave

8 结 论

利用 Green 函数法、“镜像法”和“契合法”对半空间双压电介质垂直边界附近圆孔对 SH 波的散射进行分析研究。计算结果表明：入射角度、入射波频率、量纲一压电参数对圆孔周边的动应力强度系数与电场强度集中系数存在影响，且高频 SH 波垂直入射对压电材料的危害较大；随着入射波频率的增加，圆孔周边 $\theta=-\pi$ 处的动应力集中系数与电场强度集中系数均随着 ka 的增大而振荡变化。该结果为压电元件的设计制造及工程应用提供有益的参考

参考文献：

[1] 舒小平. 正交压电复合材料层板各类边界的解析解[J]. 工程力学，2013，30(10)：288-295.
Shu Xiaoping. Analytical solutions of cross-ply piezoelectric composite laminates with various boundary conditions [J]. Engineering Mechanics, 2013,30(10):288-295.

[2] 王永健，宋豪鹏，高存法，等. 双压电材料内含椭圆孔孔边界面裂纹的反平面问题[J]. 力学季刊，2015(3)：416-426.
Wang Yongjian, Song haopeng, Gao Cunfa, et al. The anti-plane problem for a cracked elliptical hole at the interface of bi-materials[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2015(3):416-426.

[3] Gao C F, Fan W X. Exact solutions for the plane problem in piezoelectric materials with an elliptic or a crack[J]. International Journal of Solids and Structures, 1999,36(17):2527-2540.

[4] Lee K L, Soh A K, Fang D N, et al. Fracture behavior of inclined elliptical cavities subjected to mixed-mode Ⅰ and Ⅱ electro-mechanical loading[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2004,41(1-3):125-135.

[5] Du J K, Shen Y P, Wang X. Scattering of anti-plane shear waves by a partially debonded piezoelectric circular cylindrical inclusion[J]. Acta Mechanica, 2002,158(3):169-183.

[6] Feng W J, Wang L Q, Jiang Z Q, et al. Shear wave scattering from a partially debonded piezoelectric cylindrical inclusion[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2004,17(3):258-269.

[7] 宋天舒，刘殿魁，于新华. SH 波在压电材料中的散射和动应力集中[J]. 哈尔滨工程大学学报，2002，23(1)：120-

123.

Song Tianshu, Liu Diankui, Yu Xinhua. Scattering of SH-Wave and dynamic stress concentration in a piezoelectric medium with a circular hole[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2002,23(1):120-123.

[8] 宋天舒,刘殿魁,付国庆.含刚性圆柱夹杂压电介质的动力反平面特性[J].哈尔滨工程大学学报,2003,24(5):574-577.

Song Tianshu, Liu Diankui, Fu Guoqing. Dynamic anti-plane characteristic of piezoelectric medium with rigid cylindrical inclusion[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2003,24(5):574-577.

[9] Hassan A, Song T S. Dynamic anti-plane analysis for two symmetrically interfacial cracks near circular cavity in piezoelectric bi-materials[J]. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 2014,35(10):1261-1270.

[10] 李冬,宋天舒.双相压电介质中界面附近圆孔的动态性能分析[J].振动与冲击,2011,30(3):91-95.

Li Dong, Song Tianshu. Dynamic performance analysis of circular cavity near interface in piezoelectric bimaterials [J]. Journal of Vibration and Shock, 2011,30(3):91-95.

[11] Wang X D. On the dynamic behaviour of interacting interfacial cracks in piezoelectric media[J]. International Journal of Solids and Structures, 2001,38(5):815-831.

[12] 林宏,刘殿魁.半无限空间中圆形孔洞周围 SH 波的散射[J].地震工程与工程振动,2002,22(2):9-16.

Lin Hong, Liu Diankui. Scattering of SH-wave around a circular cavity in half space[J]. Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2002,22(2):9-16.

[13] 折勇,齐辉,杨在林.SH 波对直角平面区域内圆形孔洞的散射与地震动[J].应用力学学报,2008,35(3):392-397.

Shi Yong, Qi Hui, Yang Zailin. Scattering of SH-wave by circular cavity in right-angle plane and seismic ground motion[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2008,35(3):392-397.

Scattering of SH-wave by a circular cavity near the vertical boundary in the piezoelectric bi-material half-space

Zhang Ximeng, Qi Hui, Xiang Meng

(*College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin* 150001, *Heilongjiang, China*)

Abstract: The scattering of the SH-wave by a circular cavity near the vertical boundary in the piezoelectric bi-material half-space was analyzed using the Green function method and the mirror method to obtain the steady state response. The analytical expression of the wave function was obtained on the horizontal boundaries using the mirror method. This function was the stress-free and electric-displacement-free. According to the continuity condition on the vertical boundary, the first kind of Fredholm integral equations were established, thereby obtaining the analytical expression of the dynamic stress concentration factor and the electric field intensity concentration factor around the edge of the circular cavity by the conjunction method. The influence of the frequencies of the incident wave, the incident angle and the media parameter, etc., on the dynamic stress concentration factor and the electric field intensity concentration factor was examined and compared with existing literatures using calculating examples. The numerical results show that serious damage occurs when the high-frequency incident SH wave comes in vertically.

Keywords: half space; piezoelectric bi-material; circular cavity; SH wave; dynamic stress concentration factor; electric field intensity concentration factor

(责任编辑　王玉锋)