DOI: 10.11883/1001-1455(2017)03-0464-07

径向非均匀压电介质中圆孔对 SH 波的散射*

张希萌,齐 辉,孙学良
(哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院,黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 利用复变函数理论对 SH 波作用下含圆孔径向非均匀压电介质的反平面动力特性进行了研究。压电介质的密度沿径向按幂函数形式变化,但压电参数、弹性参数、介电参数均为常数。利用变量替换法将非均匀压电介质的变系数波动方程组转化为标准的 Helmholtz 方程组,得到了满足边界条件的波函数解析表达式。通过数值算例分析了入射角度、入射波频率、幂次等对应力集中系数和电场强度集中系数的影响,并与已有文献进行比较。结果表明,某些参数组合下,动应力集中系数与电场强度集中系数均随幂次增大而增大。

关键词: 径向非均匀压电介质;反平面动力特征;SH 波;动应力集中系数;电场强度集中系数
中图分类号: O343.4 **国标学科代码**: 13015 **文献标志码**: A

压电材料可以制造成执行器或传感器等智能元件,广泛应用于国防工业与实际生活中。由于压电材料中力学与电学性质相互耦合,在 SH 波作用下压电材料中夹杂或圆孔等缺陷处的动应力集中及电场强度集中问题也比一般材料更复杂。近年来,许多学者对缺陷问题进行了研究,并取得了丰富的成果[1-12]。X. F. Li 等[1]基于电磁材料弹性理论研究了径向非均匀性的压电压磁球壳的静态响应问题;时朋朋等[2]利用分离变量法和 Hilbert 核奇异积分方程理论研究了功能梯度压电压磁双材料的周期界面裂纹问题;靳静等[3]利用积分变换法和奇异积分方程技术研究了压电压磁双材料界面裂纹的二维断裂问;舒小平[4-5]基于等效单层理论的位移场和电势场求解了正交压电复合材料层板在各类边界条件下的解析解;宋天舒等[6-7]研究了双相压电介质中圆孔与界面裂纹相互作用的动力学问题。但是,以上工作中大部分是关于径向非均匀介质的静态响应问题的求解,对含圆孔的压电介质在 SH 波作用下的动态响应问题,目前仍未见报道。

1 控制方程

含圆孔的全空间非均匀压电介质如图 1 所示,已知其密度 $\rho(r)=\rho_1\beta^2 r^{2(\beta-1)}$,其中 ρ_1 为常数,β 为幂次。弹性常数、压电常数、介电常数分别为 c_{44} 、e_{15} 、κ_{11} ;圆孔内部可以形成电场,其压电常数为 e_{15}^{c} ,介电常数为 κ_{11}^{c} 。在直角坐标系中:$r^2=x^2+y^2$,$\rho(x,y)=\rho_1\beta^2(x^2+y^2)^{(\beta-1)}$ 。满足控制方程:

$$\begin{cases} c_{44}\nabla^2 w+e_{15}\nabla^2\varphi+\rho(x,y)\omega^2 w=0 \\ e_{15}\nabla^2 w-\kappa_{11}\nabla^2\varphi=0 \end{cases} \tag{1}$$

式中:w 和 φ 分别为压电材料的位移和电势,ω 为 SH 波的圆频率。令 $\varphi=e_{15}(w+f)/\kappa_{11}$,对式(1)化简得:

$$\begin{cases} \nabla^2 w+k_0^2\beta^2(x^2+y^2)^{(\beta-1)}w=0 \\ \nabla^2 f=0 \end{cases} \tag{2}$$

波数满足:

$$k^2=\rho\omega^2/c^*=k_0^2\beta^2(x^2+y^2)^{(\beta-1)} \tag{3}$$

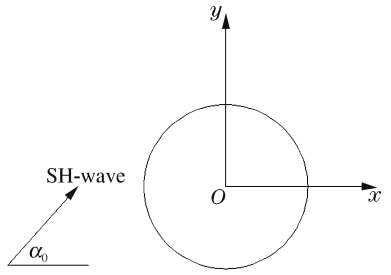

图 1 含圆孔径向非均匀压电介质模型

Fig. 1 Model of the radial inhomogeneous piezoelectric medium with a circular cavity

* **收稿日期**: 2015-11-23; **修回日期**: 2016-06-24
基金项目: 黑龙江自然科学基金项目(A201404)
第一作者: 张希萌(1989—),男,博士研究生; **通信作者**: 齐 辉,qihui205@sina.com。

式中：k 为波数；$k_0^2=\rho_1\omega^2/c^*$，c^* 为压电介质的剪切波速，且 $c^*=c_{44}+e_{15}^2/\kappa_{11}$。

利用复变函数法，令 $z=x+\mathrm{i}y$，$\bar{z}=x-\mathrm{i}y$，在复平面 $(\eta,\bar{\eta})$ 中控制方程可化为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\partial\bar{z}}+\dfrac{1}{4}\beta^2\ (z\bar{z})^{\beta-1}k_0^2 w=0\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial\bar{z}}=0\end{cases}\tag{4}$$

引入变量 $\zeta=z^\beta$，$\bar{\zeta}=\bar{z}^\beta$，控制方程可进一步转化为：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}+\frac{1}{4}k_0^2 w=0\tag{5}$$

本构方程为：

$$\begin{cases}\tau_{rz}=\left(c_{44}+\dfrac{e_{15}^2}{\kappa_{11}}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\dfrac{\partial w}{\partial\bar{z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)+\dfrac{e_{15}^2}{\kappa_{11}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\\ \tau_{\theta z}=\mathrm{i}\left(c_{44}+\dfrac{e_{15}^2}{\kappa_{11}}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\dfrac{\partial w}{\partial\bar{z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)+\mathrm{i}\,\dfrac{e_{15}^2}{\kappa_{11}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\\ D_r=-e_{15}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\\ D_\theta=-\mathrm{i}\,e_{15}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\end{cases}\tag{6}$$

式中：τ_{rz} 和 $\tau_{\theta z}$ 分别为非均匀压电介质的径向应力和切向应力，D_r 和 D_θ 分别为圆孔中电场的径向电位移和切向电位移。

2　介质中的位移场

SH 波散射过程中，入射波引起的压电材料位移 w^{in} 表达式为：

$$w^{\mathrm{in}}=w_0\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2}(\zeta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0}+\bar{\zeta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0})\right]\tag{7}$$

散射波引起的压电材料位移 w^{s} 表达式为：

$$w^{\mathrm{s}}=\frac{\mathrm{i}}{2c_{44}(1+\lambda)}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n H_n^{(1)}(k|\zeta|)\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)^n\tag{8}$$

式中：$H_n^{(1)}(k|\zeta|)$ 为 n 阶第一类 Hankel 函数，$\lambda=e_{15}^2/(c_{44}\kappa_{11})$，$A_n$ 为系数。

$$\varphi=\frac{e_{15}}{\kappa_{11}}(w^{\mathrm{in}}+w^{\mathrm{s}}+f^{\mathrm{s}})\tag{9}$$

散射波引起的电场附加函数 f^{s} 表达式为：

$$f^{\mathrm{s}}=\sum_{n=1}^{+\infty}B_n z^{-n}+C_n\bar{z}^{-n}\tag{10}$$

式中：B_n 和 C_n 为系数。由此得到：

$$\begin{cases}\tau_{rz}^{\mathrm{in}}=\dfrac{\mathrm{i}k}{2}\left(c_{44}+\dfrac{e_{15}^2}{\kappa_{11}}\right)\beta w_0(z^{\beta-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\alpha_0)}+\bar{z}^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta-\alpha_0)})\exp\left[\dfrac{\mathrm{i}k}{2}(\zeta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0}+\bar{\zeta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0})\right]\\ \tau_{rz}^{\mathrm{s}}=\dfrac{\mathrm{i}\beta k}{4}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n\left[H_{n-1}^{(1)}(k|\zeta|)\left(\dfrac{\zeta}{|\zeta|}\right)^{n-1}z^{\beta-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-H_{n+1}^{(1)}(k|\zeta|)\left(\dfrac{\zeta}{|\zeta|}\right)^{n+1}\bar{z}^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right]\\ \qquad\quad-\dfrac{e_{15}^2}{\kappa_{11}}n\left(\sum_{n=1}^{+\infty}B_n z^{-n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\bar{z}^{-n-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\\ D_r^{\mathrm{s}}=e_{15}n\left(\sum_{n=1}^{+\infty}B_n z^{-n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\bar{z}^{-n-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\end{cases}\tag{11}$$

式中：上标“in”、“s”分别表示物理量与入射波、反射波相关。圆孔内部存在电场，满足方程：

$$\frac{\partial^2 f^{\mathrm{c}}}{\partial z\partial\bar{z}}=0\tag{12}$$

式中：f^{c} 为圆孔内部的电场附加函数。求解式(12)可得：

$$f^{\mathrm{c}}=\sum_{n=0}^{+\infty}D_n z^n+\sum_{n=1}^{+\infty}E_n\overline{z}^n \tag{13}$$

式中：D_n 和 E_n 为系数。由此可得：

$$\begin{cases}\tau_{rz}^{\mathrm{c}}=0\\ \varphi^{\mathrm{c}}=\dfrac{e_{15}^{\mathrm{c}}}{\kappa_{11}^{\mathrm{c}}}f^{\mathrm{c}}\\ D_r^{\mathrm{c}}=-e_{15}^{\mathrm{c}}n\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}D_n z^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\sum_{n=1}^{+\infty}E_n\overline{z}^{n-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\end{cases} \tag{14}$$

式中：上标“c”表示物理量与圆孔中空气形成的电场相关。

3 边界条件与定解方程

圆孔处的边界条件为：

$$\tau_{rz}=\tau_{rz}^{\mathrm{in}}+\tau_{rz}^{\mathrm{s}}=\tau_{rz}^{\mathrm{c}}=0\qquad \varphi=\varphi^{\mathrm{c}}\qquad D_r^{\mathrm{s}}=D_r^{\mathrm{c}} \tag{15}$$

利用以上边界条件式(15)建立关于 A_n 、B_n 、C_n 、D_n 、E_n 的方程组：

$$\begin{aligned}\xi^{(1)}&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n\xi_n^{(11)}+\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\xi_n^{(12)}+\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\xi_n^{(13)}\\ \xi^{(2)}&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n\xi_n^{(21)}+\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\xi_n^{(22)}+\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\xi_n^{(23)}+\sum_{n=0}^{+\infty}D_n\xi_n^{(24)}+\sum_{n=1}^{+\infty}E_n\xi_n^{(25)}\\ \xi^{(3)}&=\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\xi_n^{(32)}+\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\xi_n^{(33)}+\sum_{n=0}^{+\infty}D_n\xi_n^{(34)}+\sum_{n=1}^{+\infty}E_n\xi_n^{(35)}\end{aligned} \tag{16}$$

式中：

$$\begin{cases}\xi_n^{(11)}=\dfrac{\mathrm{i}\beta k}{4}\left[H_{n-1}^{(1)}(k|\zeta|)\left(\dfrac{\zeta}{|\zeta|}\right)^{n-1}z^{\beta-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-H_{n+1}^{(1)}(k|\zeta|)\left(\dfrac{\zeta}{|\zeta|}\right)^{n+1}\overline{z}^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right]\\ \xi_n^{(12)}=-\dfrac{e_{15}^2}{\kappa_{11}}nz^{-n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\qquad \xi_n^{(13)}=-\dfrac{e_{15}^2}{\kappa_{11}}n\overline{z}^{-n-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\qquad \xi_n^{(21)}=\dfrac{\mathrm{i}e_{15}}{2c_{44}\kappa_{11}(1+\lambda)}H_n^{(1)}(k|\zeta|)\left(\dfrac{\zeta}{|\zeta|}\right)^n\\ \xi_n^{(22)}=\dfrac{e_{15}}{\kappa_{11}}z^{-n}\qquad \xi_n^{(23)}=\dfrac{e_{15}}{\kappa_{11}}\overline{z}^{-n}\qquad \xi_n^{(24)}=-\dfrac{e_{15}^{\mathrm{c}}}{\kappa_{11}^{\mathrm{c}}}z^n\qquad \xi_n^{(25)}=-\dfrac{e_{15}^{\mathrm{c}}}{\kappa_{11}^{\mathrm{c}}}\overline{z}^n\\ \xi_n^{(32)}=e_{15}nz^{-n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\qquad \xi_n^{(33)}=e_{15}n\overline{z}^{-n-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\\ \xi_n^{(34)}=e_{15}^{\mathrm{c}}nz^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\qquad \xi_n^{(35)}=e_{15}^{\mathrm{c}}n\overline{z}^{n-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\\ \xi^{(1)}=-\dfrac{\mathrm{i}k}{2}\left(c_{44}+\dfrac{e_{15}^2}{\kappa_{11}}\right)\beta w_0(z^{\beta-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\alpha_0)}+\overline{z}^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta-\alpha_0)})\exp\left[\dfrac{\mathrm{i}k}{2}(\zeta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0}+\overline{\zeta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0})\right]\\ \xi^{(2)}=-\dfrac{e_{15}}{\kappa_{11}}w_0\exp\left[\dfrac{\mathrm{i}k}{2}(\zeta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0}+\overline{\zeta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0})\right]\qquad \xi^{(3)}=0\end{cases} \tag{17}$$

将式(16)取有限截断项，等式两边同时乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}$（$m=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$），从 $(-\pi,\pi)$ 进行积分得到多元一次方程组，从而求解出未知系数 A_n 、B_n 、C_n 、D_n 、E_n 。

4 动应力集中系数与电场强度系数

根据文献[11]可知，动应力集中系数 $\tau_{\theta z}^*$（dynamic stress concentration factor，DSCF）和电场强度集中系数 E_θ^*（electric field intensity concentration factor，EFICF）表达式分别为：

$$\tau_{\theta z}^*=|\tau_{\theta z}/\tau_0|\qquad E_\theta^*=|E_\theta/E_0| \tag{18}$$

式中：

$$\tau_0=\mathrm{i}k\left(c_{44}+\frac{e_{15}^2}{\kappa_{11}}\right)w_0\qquad E_0=\frac{ke_{15}w_0}{\kappa_{11}}\qquad E_\theta=-\mathrm{i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\eta}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)$$

5　算例分析

当 $\beta=1$ 时，本文模型退化为均匀压电介质模型。为对本文方法进行验证，采用与文献[7]中相同的参数，求解得到动应力系数 $\tau_{\theta z}^{*}$ 沿圆孔周边的分布情况，如图 2 所示。可以看出，计算结果与文献[7]中结果吻合较好，说明本文方法精确可行。以下取 $\kappa_{11}/\kappa_{11}^{c}=1\,000$ 进行建模，分析各参数对动应力集中系数及电场强度系数的影响。

图 3 给出了 SH 波以不同角度（α_0）入射时圆孔周围动应力系数的变化情况。由图 3 可知：SH 波垂直入射时，$\tau_{\theta z}^{*}$ 达到最大值 3.8；SH 波水平入射时，$\tau_{\theta z}^{*}$ 最大值约为均匀压电介质的 2～3 倍。由此可见，入射角度 α_0 对非均匀介质具有一定的影响。

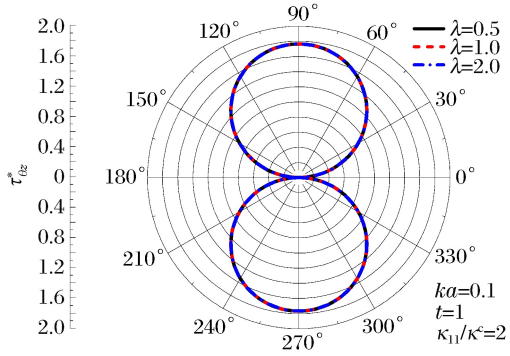

图 2　方法验证（与文献[7]比较）

Fig. 2　Verification of the present method (compared with reference [7])

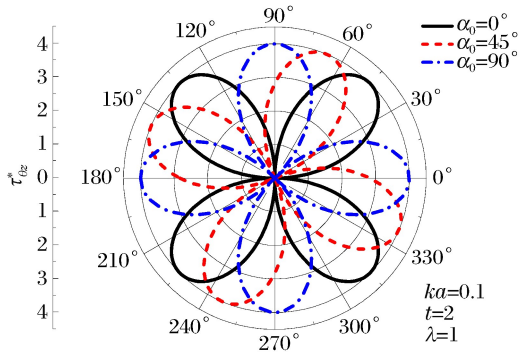

图 3　SH 波入射角度不同时动应力集中系数的变化

Fig. 3　Varition of DSCF around the circular cavity edge by SH-wave with different incident angles

图 4 给出了 SH 波水平入射时圆孔周边动应力集中系数随波数 ka 的变化情况。图 4 显示：$\tau_{\theta z}^{*}$ 随波数 ka 的增大而减小，SH 波低频入射时，$\tau_{\theta z}^{*}$ 的最大值约为高频入射时的 2 倍。

图 5 给出了 SH 波垂直入射时圆孔周边动应力集中系数随波数 ka 的变化情况。图 5 显示：$\tau_{\theta z}^{*}$ 随波数 ka 增大而减小，与图 4 中规律相同，但图 5 中 $\tau_{\theta z}^{*}$ 的最大值比图 4 中约大 18%。由图 3～5 可知，SH 波低频垂直入射对径向非均匀压电介质破坏较大，在工程中应该对这种情况引起注意。

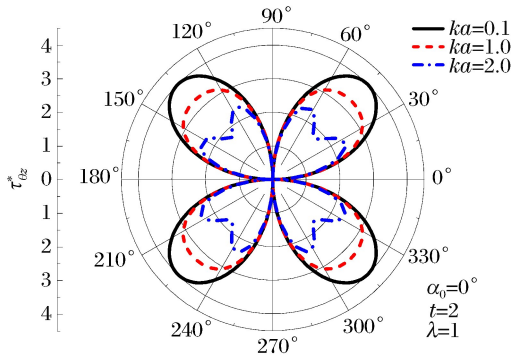

图 4　SH 波水平入射时圆孔周边动应力集中系数随波数 ka 的变化情况

Fig. 4　DSCF around circular cavity edge vs. ka by horizontal SH-wave

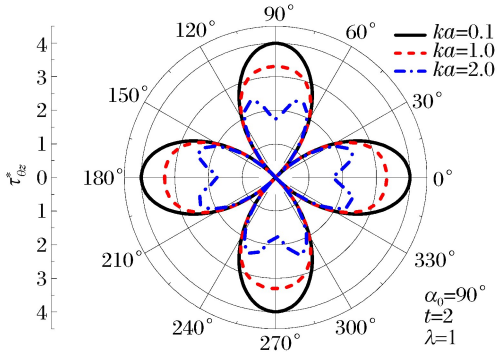

图 5　SH 波垂直入射时圆孔周边动应力集中系数随波数 ka 的变化情况

Fig. 5　DSCF around circular cavity edge vs. ka by vertical SH-wave

图 6 给出了 SH 波水平入射时圆孔周边动应力集中系数随 λ 的变化情况。图 6 显示：压电参数 λ 对 $\tau_{\theta z}^{*}$ 几乎没有影响。图 7 给出了 SH 波水平入射时圆孔周边动应力集中系数随 β 的变化情况。由图 7 可知，$\tau_{\theta z}^{*}$ 随幂次 β 的增大而增大，当 $\beta=4$ 时，$\tau_{\theta z}^{*}$ 达到最大值 3.2，约为均匀压电材料 $\tau_{\theta z}^{*}$ 最大值的 2 倍，因此工程中应该合理调整参数，避免幂次 β 过大。

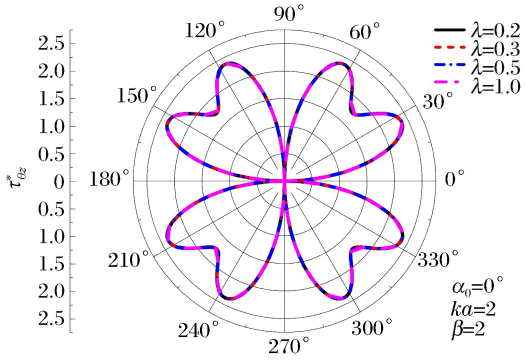

图 6 SH 波水平入射时圆孔周边动应力集中系数随 λ 变化情况

Fig. 6 DSCF around circular cavity edge vs. λ by horizontal SH-wave

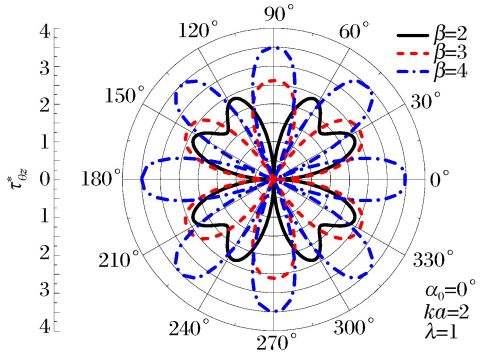

图 7 SH 波水平入射时圆孔周边动应力集中系数随幂次 β 的变化情况

Fig. 7 DSCF around circular cavity edge vs. β by horizontal SH-wave

图 8 给出了 SH 波水平入射时圆孔 $\theta=\pi/2$ 处动应力集中系数随波数 ka 的变化情况。图 8 显示：$\tau_{\theta z}^{*}$ 随 ka 值的增大而减小，下降率约为 1.1%。不同压电参数 λ 条件下得到的 $\tau_{\theta z}^{*}$ 曲线几乎完全重合，说明 λ 对 $\tau_{\theta z}^{*}$ 几乎没有影响，与图 6 中的结论一致。

图 9 给出了 SH 波高频入射时圆孔周边电场强度系数随 SH 波入射角度的变化情况。由图 9 可知：入射角度对 E_{θ}^{*} 最大值的影响不大；斜入射时，E_{θ}^{*} 达到最大值 3.1。

图 10 给出了 SH 波水平入射时圆孔周边电场强度系数随 λ 的变化情况。由图 10 可知，E_{θ}^{*} 随压电参数 λ 的增大而减小，当 $\lambda=0.2$ 时，E_{θ}^{*} 达到最大值 6.2，因此工程中需要注意 λ 取值较小的情况。

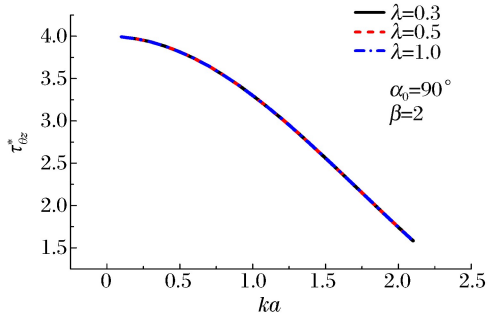

图 8 SH 波垂直入射时圆孔 $\theta=\pi/2$ 处动应力集中系数随 ka 的变化

Fig. 8 DSCF around circular cavity edge vs. ka by vertical SH-wave

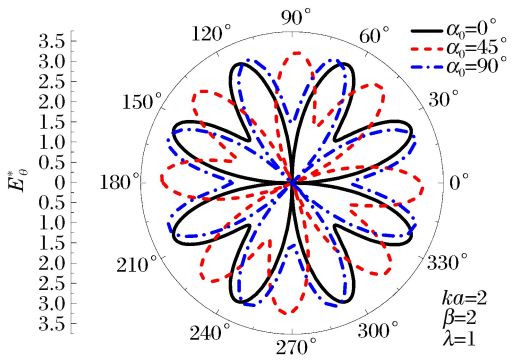

图 9 SH 波以不同角度入射时圆孔周边电场强度系数的变化情况

Fig. 9 Variation of EFICF around circular cavity edge by SH-wave with different incident angles

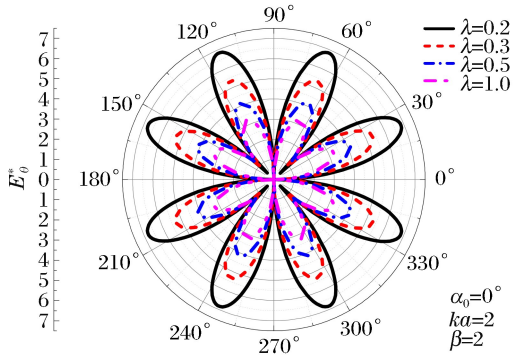

图 10 SH 波水平入射时圆孔周边电场强度系数随 λ 的变化情况

Fig. 10 EFICF around circular cavity edge vs. λ by horizontal SH-wave

图 11 给出了 SH 波水平入射时圆孔周边电场强度系数随 β 的变化情况。由图 11 可知，E_{θ}^{*} 随幂次 β 增大而增大，与图 7 中 $\tau_{\theta z}^{*}$ 变化规律一致。当 $\beta=4$ 时，E_{θ}^{*} 达到最大值 3.1。

图 12 给出了 SH 波水平入射时圆孔 $\theta=\pi/2$ 处电场强度系数随波数 ka 的变化情况。由图 12 可知：当 $ka<0.2$ 时，E_{θ}^{*} 无明确的变化规律；当 $ka>0.2$ 时，E_{θ}^{*} 随 ka 的增大而减小。

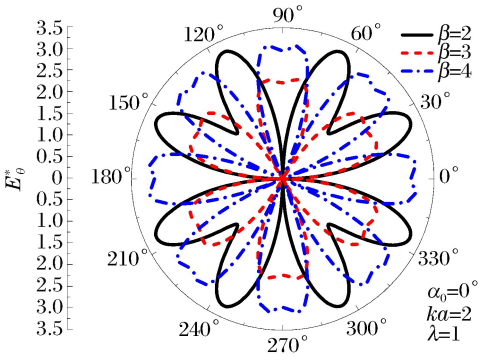

图 11　SH 波水平入射时圆孔周边电场强度系数随 β 变化情况

Fig. 11　EFICF around circular cavity edge vs. β by horizontal SH-wave

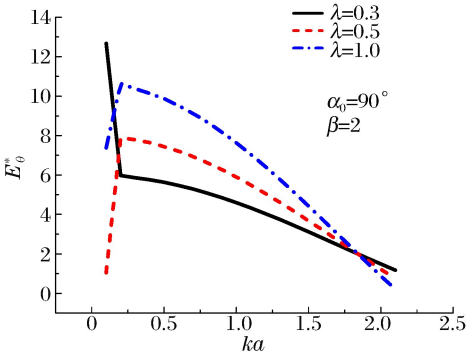

图 12　SH 波水平入射时圆孔 $\theta=\pi/2$ 处电场强度系数随波数 ka 变化情况

Fig. 12　EFICF at the circular cavity edge vs. ka by horizontal SH-wave

6　结　论

利用复变函数理论，对径向非均匀压电介质中圆孔对 SH 波的散射问题进行了研究。结果表明，SH 波低频垂直入射对径向非均匀压电介质破坏较大；高频入射时，压电参数 λ 对 $\tau_{\theta z}^{*}$ 几乎没影响，但 E_{θ}^{*} 随 λ 的减小而增大，$\tau_{\theta z}^{*}$ 与 E_{θ}^{*} 均随幂次 β 的增大而增大。另外，SH 波水平入射时，$\tau_{\theta z}^{*}$ 随 ka 的减小而增大，当 $ka>0.2$ 时，E_{θ}^{*} 也随 ka 的减小而增大。在实际工程中应该对这些规律引起注意，以避免非均匀压电介质发生破坏。

参考文献：

[1]　Li X F, Peng X L, Lee K Y. The static response of functionally graded radially polarized piezoelectric spherical shells as sensors and actuators[J]. Smart Materials and Structures, 2010,19(19):035010.

[2]　时朋朋，霍华颂，李星. 功能梯度压电/压磁双材料的周期界面裂纹问题[J]. 力学季刊，2013,34(2):191-198.
Shi Pengpeng, Huo Huasong, Li Xing. Periodic interfacial cracks in a functionally graded piezoelectric/piezomagnetic bimaterials[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2013,34(2):191-198.

[3]　靳静，马鹏. 压电压磁双层材料界面裂纹断裂特性进一步分析[J]. 工程力学，2013,30(6):327-333.
Jin Jing, Ma Peng. Further analysis for fracture behaviors of an interfacial crack between piezoelectric and piezomagnetic layers[J]. Engineering Mechanics, 2013,30(6):327-333.

[4]　舒小平. 球壳与柱壳之功能梯度压电涂层的热效应分析[J]. 中国机械工程，2011,22(24):2993-3000.
Shu Xiaoping. Thermal response of functionally graded piezoelectric coatings on sphere and cylinder shells[J]. China Mechanical Engineering, 2011,22(24):2993-3000.

[5]　舒小平. 正交压电复合材料层板各类边界的解析解[J]. 工程力学，2013,30(10):288-295.
Shu Xiaoping. Analytical solutions of cross-ply piezoelectric composite laminates with various boundary conditions [J]. Engineering Mechanics, 2013,30(10):288-295.

[6]　Hassan A, Song T S. Dynamic anti-plane analysis for two symmetrically interfacial cracks near circular cavity in piezoelectric bi-materials[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2014,35(10):1261-1270.

[7]　宋天舒，刘殿魁，于新华. SH 波在压电材料中的散射和动应力集中[J]. 哈尔滨工程大学学报，2002,23(1):120-123.
Song Tianshu, Liu Diankui, Yu Xinhua. Scattering of SH-wave and dynamic stress concentration in a piezoelectric medium with a circular hole[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2002,23(1):120-123.

[8]　杨在林，黑宝平，杨钦友. 径向非均匀介质中圆形夹杂的动应力分析[J]. 力学学报，2015,47(3):539-543.
Yang Zailin, Hei Baoping, Yang Qinyou. Dynamic analysis on a circular inclusion in a radially inhomogeneous medium[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2015,47(3):539-543.

[9] 齐辉,杨杰. SH 波入射双相介质半空间浅埋任意位置圆形夹杂的动力分析[J]. 工程力学,2012,29(7):320-327.
Qi Hui, Yang Jie. Dynamic analysis for shallowly buried circular inclusions of arbitrary positions impacted by SH-wave in bi-material half space[J]. Engineering Mechanics, 2012,29(7):320-327.

[10] 林宏,刘殿魁. 半无限空间中圆形孔洞周围 SH 波的散射[J]. 地震工程与工程振动,2002,22(2):9-16.
Lin Hong, Liu Diankui. Scattering of SH-wave around a circular cavity in half space[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2002,22(2):9-16.

[11] 丁晓浩,齐辉,赵元博. 含有直线裂纹的直角域中椭圆形夹杂对 SH 波的散射[J]. 天津大学学报,2016,49(4):415-421.
Ding Xiaohao, Qi Hui, Zhao Yuanbo. Scattering of SH-wave by elliptic inclusion in right-angle plane with beeline crack[J]. Journal of Tianjin University, 2016,49(4):415-421.

[12] 李冬,宋天舒. 含圆孔直角域压电介质的动力反平面特性[J]. 哈尔滨工程大学学报,2010,31(12):1606-1612.
Li Dong, Song Tianshu. Dynamic anti-plane behavior for a quarter-infinite piezoelectric medium with a subsurface circular cavity[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2010,31(12):1606-1612.

Scattering of SH-wave by a circular cavity in radial inhomogeneous piezoelectric medium

Zhang Ximeng, Qi Hui, Sun Xueliang
(*College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin* 150001, *Heilongjiang, China*)

Abstract: The dynamic anti-plane behavior of the radial inhomogeneous piezoelectric medium with a circular cavity under the SH-wave was investigated using the complex function theory. It was assumed that the density of the piezoelectric medium varied as a power-law function on the radial distance but the elastic parameters, the piezoelectric parameters, and the dielectric parameters all remained as constants. The wave equations of the inhomogeneous piezoelectric medium were converted to the standard Helmholtz equations by variable substitution and the analytical expression of the wave function satisfying the boundary condition was obtained. The influence of the incident angle, the frequency of incident wave and the power of the power-law function, etc. on the dynamic stress concentration factor and electric field intensity concentration factor was analyzed and compared with the existing references in the calculated example. The numerical results show that the values of the dynamic stress concentration factor and the electric field intensity concentration factor increase as the power increases with combination of certain parameters.

Keywords: radial inhomogeneous piezoelectric medium; dynamic anti-plane behavior; SH wave; dynamic stress concentration factor; electric field intensity concentration factor

(责任编辑 王玉锋)