DOI: 10.11883/1001-1455(2017)01-0001-09

基于应变能法的单搭接螺栓剪切模型*

寇剑锋,徐 绯,冯 威
(西北工业大学航空学院,陕西 西安 710072)

摘要: 为了简化复杂结构在冲击数值分析中的大量螺栓连接,可用等效的载荷位移模型代替复杂的螺栓连接关系,本文中针对单搭接螺栓连接在剪切载荷下建立了连接本构关系。首先通过对有预紧力的单搭接螺栓进行实验和精细有限元模拟,揭示了螺栓剪切载荷位移曲线的特征并针对不同特征阶段进行了相应的物理机理分析。在此基础上对于载荷位移曲线的界面黏结、部分滑移、整体滑移阶段提出了连接本构模型的基本形式和各阶段的参数估算方法。在部分滑移阶段考虑了 4 个方面的刚度贡献,其中部件对螺栓的支撑刚度是三维非轴对称变形问题,理论求解非常困难,本文中通过应力分布研究,采用应变能法解决了螺栓的支撑刚度的估算问题。提出的单搭接螺栓剪切模型物理含义明确,参数估算简单,准确度高。

关键词: 固体力学;剪切刚度;本构模型;螺栓连接;应变能
中图分类号: O342;V214.41;TB121 **国标学科代码**: 13015 **文献标志码**: A

在结构装配中,螺栓是最常见的连接方式之一,在大型结构的冲击数值分析中,由于螺栓和螺栓孔在尺度上通常与被连接结构相差较大,全面精细建模复杂,计算工作量大,所以实际工程计算中需要对连接结构进行简化[1-3]。目前,常采用弹簧或者梁单元简化螺栓连接,这种简化一方面不能准确地描述螺栓的复杂连接行为,另一方面这些弹簧或者梁单元的刚度也无法准确给出,这种简化的处理方法还不能计及螺栓预紧力与摩擦力的影响,而研究资料显示预紧力和摩擦力与连接刚度密切相关[4]。因此,为了在大型结构的数值分析中既经济又准确描述螺栓行为,需要建立连接结构的连接本构模型。

虽然螺栓连接无处不在,但以往的文献对螺栓连接关系,即载荷位移曲线变化的物理机理研究不足[5]。特别是螺栓在剪切载荷作用下的接触和连接是复杂的多尺度非线性问题,不同的外力作用下螺栓的载荷传递形式有很大差异。小载荷下振动问题的载荷传递通常是在螺栓预紧力作用下,被连接的两个部件之间的微观界面摩擦传递,在这个过程中界面产生微滑移,数值模拟中常用弹簧阻尼模型[6-7]描述连接关系。桑迪国家实验室基于微滑移/微摩擦理论得到简洁的四参数的 Iwan 模型[8],主要关注部件相互间界面的能量耗散;H. Tian 等[9]、黄开放等[10]通过假设微球体接触表面,计算得到了界面的刚度,但模型参数的给出较为困难。随着载荷的增加,部件相互间的界面发生了宏观滑移,但两个部件分别与螺母之间的界面保持黏结,载荷主要通过螺母与部件之间的界面和螺杆的弯曲变形传递,这方面研究较匮乏。随着载荷的继续增加,载荷主要通过螺杆的剪切变形传递直至材料失效破坏,这个过程研究人员多关注大载荷下螺栓连接的失效模式以及极限载荷,这方面研究资料很多[5,11],而对连接刚度较少提及。综合发现螺栓连接在部件相互间的界面发生宏观滑移后到螺杆与螺孔壁完全接触前的载荷传递与变形状态基本没有文献进行讨论。

对工程实际中火箭导弹等结构,在受到冲击载荷的作用下,需要分析冲击产生的应力波对其中精密部件的影响[12]。例如,火箭飞行达到一定高度后的整流罩解锁分离,分离动载荷经过含连接的结构传递,有时会使得精密部件如剪断锁紧弹射筒和两半罩的锁紧销提前断裂,导致弹射筒无法正常起爆[13]。还有研究发现应力波的传播特性与螺栓的连接关系及其连接刚度密切相关,是否考虑螺栓的连接刚度,会使应力波传播问题中计算和实验在结构相同监测点的最大加速度相差 25%以上[1,14]。由于螺栓连

* **收稿日期**: 2015-05-15; **修回日期**: 2015-09-15
基金项目: 国家自然科学基金项目(11272266);航空科学基金项目(2013ZD53049)
第一作者: 寇剑锋(1984—),男,博士研究生; **通信作者**: 徐 绯,xufei@nwpu.edu.cn。

接的非线性,不同载荷阶段对应不同的载荷传递形式,相应的连接刚度也会发生变化,所以在数值分析中需要给出螺栓连接从低载荷到较高载荷过程中的本构关系。

对于上述问题,本文中采用实验和数值模拟相结合的分析手段,研究单搭接螺栓连接结构在受剪过程中的变形机理,在此基础上得到本构模型的基本形式,对连接刚度进行详细的理论推导,给出了本构模型各阶段的参数确定方法,最后针对不同结构与材料参数对本文建立的单搭接螺栓剪切本构模型及其参数进行了数值验证。

1 螺栓连接剪切变形机理

首先对螺栓连接结构进行了实验研究。实验件设计如图 1 所示,部件为 45 钢,在连接区的厚度为 6 mm,表面粗糙度为 1.6 μm,用 8.8 级 M4 的螺栓连接,对螺栓施加 3.0 N·m 的预紧力矩。实验用电子万能试验机夹持住实验件两端夹持区并拉伸,由试验机的力传感器得到载荷,由引伸计测量得到两个部件的相对位移。同时建立与实验相同边界与载荷条件的精细有限元模型,模型采用六面体实体单元,上下两个部件之间的界面设置 0.2 的摩擦因数,上下部件分别与螺母之间的界面设置 0.1 的摩擦因数,对螺栓施加通过《机械设计手册》查得 3.0 N·m 预紧力矩下约为 4 kN 预紧力,在模型一端夹持区约束,另外一端夹持区施加位移载荷,通过有限元结果分析界面相互作用情况。

实验载荷位移曲线如图 2 所示,随着载荷增加,曲线斜率发生几次明显的变化。发生变化的原因难以直接通过实验分析,为此我们利用有限元仿真计算研究曲线斜率变化的原因。通过螺栓连接安装和受力过程的有限元仿真计算得到了载荷位移曲线,如图 2 所示,与实验曲线吻合较好。根据有限元计算的载荷位移曲线斜率可将曲线分为 4 个阶段,每个阶段的界面接触状态分别如图 3(a)~(d)所示。每阶段的分图中,左边表示部件间的界面,右边表示螺母与上部件间的界面,螺母与下部件的界面与其对称,红色表示界面没有发生滑移,绿色表示界面发生了滑移。图 3(a)所示为第 1 阶段:界面黏结阶段,该阶段位移几乎不变,连接刚度较大,部件相互间的界面和螺母与部件之间的界面都没有发生滑移,载荷主要通过两个部件相互间的界面传递。图 3(b)所示为第 2 阶段:部分滑移阶段,该阶段内刚度逐渐

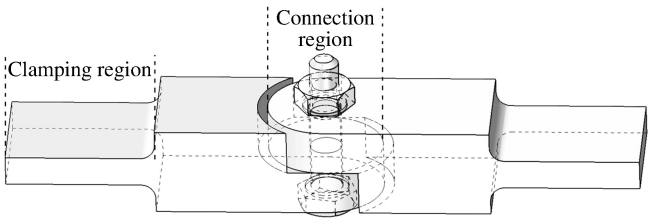

图 1 单搭接剪切试样

Fig. 1 Single lap shear specimen

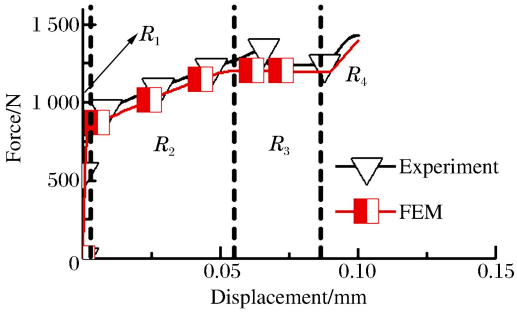

图 2 载荷位移曲线

Fig. 2 Load-displacement curves

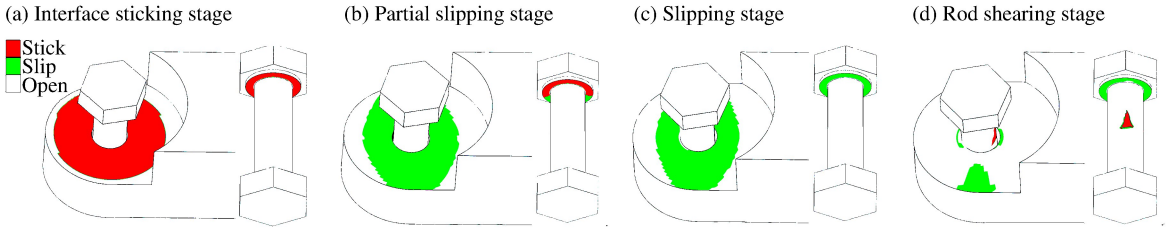

图 3 接触面状态

Fig. 3 Status of interface

降低，部件之间的界面全部发生滑移，螺母与部件之间的界面仍有很大部分黏结在一起，这个阶段的载荷主要通过螺母与部件之间界面摩擦和螺杆的弯曲刚度传递。图 3(c)所示为第 3 阶段：整体滑移阶段，该阶段内载荷保持不变，刚度几乎为零，部件相互间的界面和螺母与部件之间的界面全部发生了滑移。图 3(d)所示为第 4 阶段：螺杆剪切阶段，该阶段刚度突然增大，螺杆和部件的孔壁完全接触，载荷主要通过螺杆的剪切刚度传递。对于火箭导弹等结构爆炸分离时产生的冲击波幅值由于衰减较快通常在被考察部件附近不会导致螺栓变形进入图 2 所示的第 4 阶段[13]，所以本文中针对剪切螺栓连接载荷位移曲线的前三阶段开展研究工作。

2　本构模型及其参数确定

基于上节对螺栓剪切载荷位移曲线每个阶段的受力分析，初步确定单搭接螺栓剪切本构模型的表达式见式(1)，基本形式见图 4，其中 δ 为部件之间在螺孔中心处的相对位移，F 为螺栓传递的钉载，μ_1 为两个部件之间的摩擦因数，μ_2 为部件与螺母之间的摩擦因数，P_{pre} 为螺栓的预紧力，k_0 为界面黏结阶段的刚度，k_1 为部分滑移阶段的刚度，k_2 为整体滑移阶段刚度。

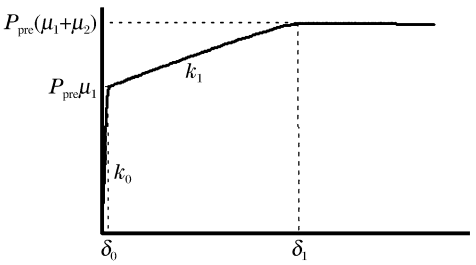

图 4　本构模型

Fig. 4　Constitutive model

$$F(\delta)=\begin{cases}k_0\delta & F\leqslant\mu_1P_{\mathrm{pre}}\\ \mu_1P_{\mathrm{pre}}+k_1\delta & \mu_1P_{\mathrm{pre}}<F<(\mu_1+\mu_2)P_{\mathrm{pre}}\\ (\mu_1+\mu_2)P_{\mathrm{pre}}+k_2\delta & F\geqslant(\mu_1+\mu_2)P_{\mathrm{pre}}\end{cases}\tag{1}$$

可以看出，上述本构模型计及摩擦因数和预紧力，它们影响在多大载荷下螺栓进入部分滑移阶段和整体滑移阶段。另外，确定该本构模型还需各阶段的刚度，其中整体滑移阶段的刚度 k_2 为 0，k_0 和 k_1 采用下列方法计算。

2.1　k_0 的确定

k_0 为界面黏结阶段的连接刚度，主要为部件之间的界面切向刚度。根据分形模型与 Hertz 接触理论得出在小载荷下界面的切向刚度为[15]：

$$k_0=\frac{8\bar{G}D}{\sqrt{\pi}\,(2-\nu)\,(1-D)}\left[1-\frac{h}{\mu}\right]^{\frac{1}{3}}\psi^{\frac{2-D}{2}}a_{\mathrm{m}}^{\frac{D}{2}}\left[a_{\mathrm{m}}^{\frac{1-D}{2}}-a_{\mathrm{c}}^{\frac{1-D}{2}}\right]\tag{2}$$

式中：$\bar{G}$ 为界面等效剪切模量，与两接触材料的剪切模量和泊松比相关：

$$\frac{1}{\bar{G}}=\frac{1-\nu_1}{G_1}+\frac{1-\nu_2}{G_2}\tag{3}$$

D 为分形维数，它与界面加工方法以及粗糙度 R_{a} 相关[16]，对于磨削表面：

$$D=1.515R_{\mathrm{a}}^{-0.088}\tag{4}$$

h 为界面的切向载荷与法向压力比，μ 为界面摩擦因数，ψ 为微接触面积分布的域扩展因子。a_{c} 为微接触临界接触面积，意为微球体发生屈服时的接触面积：

$$a_{\mathrm{c}}=\frac{\Gamma^2}{(\kappa\gamma/2)^{\frac{2}{D-1}}}\tag{5}$$

其中 Γ 为粗糙表面的幅度系数，$D=1.5$ 时，其与表面粗糙度 R_{a} 的关系为[17] $R_{\mathrm{a}}=0.811\Gamma^{1/2}$，$\kappa$ 为较软材料的硬度 H 与屈服强度 σ_{y} 之间的系数，γ 为较软材料的屈服强度 σ_{y} 与材料当量弹性模量 E 之间的比例系数。a_{m} 为微接触最大接触面积，与界面的法向压力相关[18]：

$$P=\sqrt{\pi}\Gamma^{1/2}Ea_{\mathrm{m}}^{3/4}\ln\frac{a_{\mathrm{m}}}{a_{\mathrm{c}}}+3\kappa\sigma_{\mathrm{y}}a_{\mathrm{m}}^{3/4}a_{\mathrm{c}}^{1/4}\tag{6}$$

式(2)～(6)显示通过两接触材料的弹性模量、剪切模量、屈服强度、表面粗糙度以及界面的摩擦因数可求得 k_0 的值,在随后的第 3 节进行算例验证。

2.2 k_1 的确定

k_1 为部分滑移阶段的连接刚度,即 $k_1=\Delta F/\Delta\delta$,这个阶段增加的载荷 ΔF 通过部件与螺母间的界面作用到螺栓上,受力与变形分析见图 5。将螺杆作为短粗梁,梁两端的力偶(ΔF,$-\Delta F$)会让螺杆产生弯曲变形和剪切变形,从而分别使 A、B 两点在水平方向增加位移 $\Delta\delta_{\mathrm{b}}$ 和 $\Delta\delta_{\mathrm{s}}$,对应的刚度为 k_{b} 和 k_{s}。另外,这对力偶会在螺杆根部产生附加力矩 $\Delta FL/2$,这个力矩会使与螺杆相接的螺母部件产生 $\Delta\theta_{\mathrm{ebn}}$ 的变形。这个附加力矩通过螺母传递到部件上,又会使部件产生的 $\Delta\theta_{\mathrm{ebc}}$ 变形,这两个变形导致螺杆发生 $\Delta\theta$ 的偏转,进而导致 A、B 两点在水平方向出现由螺母变形导致的位移 $\Delta\delta_{\mathrm{ebn}}$ 和由部件变形导致的位移 $\Delta\delta_{\mathrm{ebc}}$,因此,$k_1$ 由螺杆弯曲刚度 k_{b}、螺杆剪切刚度 k_{s}、部件对螺母的支撑刚度 k_{ebc} 以及螺母对螺杆的支撑刚度 k_{ebn} 组成,其表达式为:

$$k_1=\left(\frac{1}{k_{\mathrm{b}}}+\frac{1}{k_{\mathrm{s}}}+\frac{1}{k_{\mathrm{ebc}}}+\frac{1}{k_{\mathrm{ebn}}}\right)^{-1} \tag{7}$$

(1) k_{b} 代表螺杆弯曲刚度,通过经典梁弯曲变形理论得到:

$$k_{\mathrm{b}}=12EI/L^3 \tag{8}$$

(2) k_{s} 代表螺杆的剪切刚度,由于螺杆一般是短粗梁,所以横向剪切变形不能被忽略,剪切刚度为:

$$k_{\mathrm{s}}=\zeta GA/L \tag{9}$$

式(8)～(9)中:E 和 G 分别为螺栓的杨氏模量和剪切模量,L 为螺杆的长度,ζ 为 Timoshenko 剪切修正系数,对于圆柱,其值为 $6(1+\nu)/(7+6\nu)$,ν 为材料的泊松比。

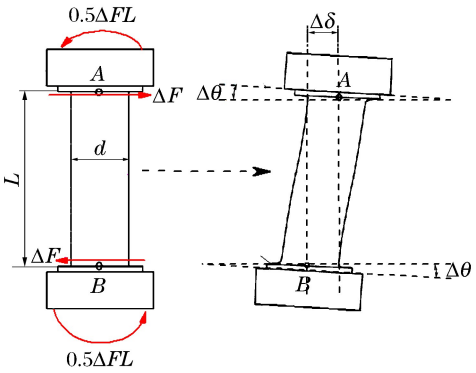

图 5 螺栓变形示意图

Fig. 5 Diagram of bolt deformation

(3) k_{ebc} 代表部件对螺母的支撑刚度。部件的支撑刚度一直是螺栓连接计算中的难题,螺栓受拉情况下的支撑刚度是一个轴对称问题,S. A. Nassar 等[19]、杨国庆等[20]等通过部件的应力假设以及轴向位移积分得到部件轴向支撑刚度。而螺栓剪切是非轴对称问题,难以简化为二维问题直接求位移。在线弹性假设下,这里通过应变能法求部件的剪切支撑刚度。

假设螺栓为刚体,由能量平衡可知,外力做功等于部件应变能的增加量,k_{ebc} 有如下表达形式:

$$k_{\mathrm{b}}=\frac{\Delta F}{\Delta\delta}=\frac{\Delta F^2}{2\left(\frac{1}{2}\Delta F\Delta\delta\right)}=\frac{\Delta F^2}{2U} \tag{10}$$

所以,只要得到在部分滑移阶段由 ΔF 导致的应变能 U,就可以得到部件对螺母的支撑刚度。应变能可由应力在整个变形体内积分求得:

$$U=\int_V\sigma\mathrm{d}\varepsilon=\frac{1}{2E}\int_V\sigma^2\mathrm{d}V \tag{11}$$

为了得到合理的应力假设,对部件的应力分布进行有限元数值分析。在图 6 中以螺栓轴线为中心线建立圆柱坐标,图中 z 向应力 σ_z 是支撑螺母的主要应力,分析中忽略其他应力分量的影响。

在预紧力作用下,假设 σ_z 分布为锥体形状,如图 6 所示,其中虚线为锥体的母线,其半顶角为 α,α 一般取 30°～45°[20-21],R_{N} 为螺母与部件接触区半

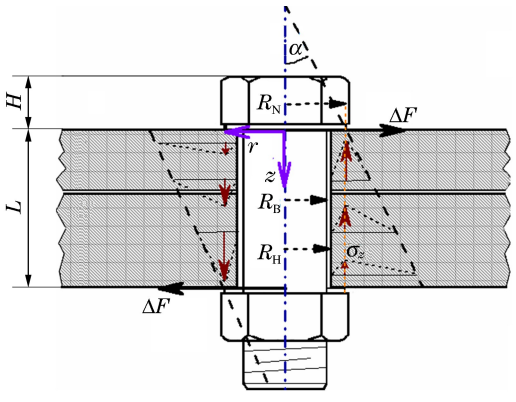

图 6 连接结构的应力假设

Fig. 6 Hypothesis of stress for connection structure

径，R_B为螺杆半径，R_H为螺孔半径，H 为螺母厚度。

假设 σ_z沿着环向 φ 的分布为：

$$\sigma_z(\varphi)=A(r,z)\sin(\varphi) \tag{12}$$

沿着径向 r 分布：由于最大接触应力在螺母与部件接触的边缘即 $r=R_N$处，所以在 $r<R_N$和 $r>R_N$区域内有不同的分布表达式，具体为：

$$\sigma_z(r)=B(\varphi,z)\begin{cases}\dfrac{r-R_H}{R_N-R_H} & R_H\leqslant r\leqslant R_N\\ \dfrac{R_z-r}{R_z-R_N} & R_N\leqslant r\leqslant R_z\end{cases} \tag{13}$$

式中：R_z为在 z 处锥体的半径：

$$R_z=R_N+z\tan\alpha \tag{14}$$

沿着轴向 z 的分布为：

$$\sigma_z(z)=\frac{C(r,\varphi)}{a+bz+cz^2} \tag{15}$$

假设分布（Hyp.）和有限元结果（FEM）对比如图 7 所示，表明假设分布形式能够比较好地描述实际应力分布。

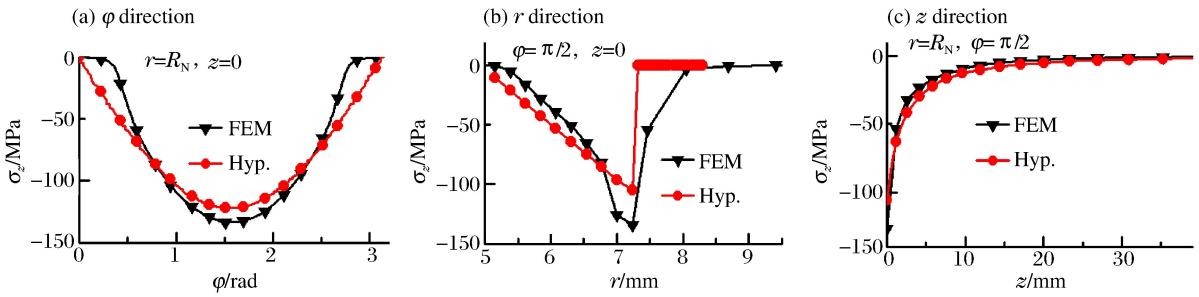

图 7　部件假设应力分布与有限元应力分布比较

Fig. 7　Stress comparison of hypothesis with FEM on component

因此，部件的三维应力分布可表示为：

$$\sigma_z(r,\varphi,z)=\sigma_z(\varphi)\sigma_z(r)\sigma_z(z)=F_z\begin{cases}\dfrac{r-R_H}{R_N-R_H}\sin(\varphi)\dfrac{1}{a+bz+cz^2} & R_H\leqslant r\leqslant R_N\\ \dfrac{R_z-r}{R_z-R_N}\sin(\varphi)\dfrac{1}{a+bz+cz^2} & R_N\leqslant r\leqslant R_z\end{cases} \tag{16}$$

式中：$a=R_N^2-R_H^2$，$b=R_N\tan\alpha$，$c=\dfrac{1}{3}\tan^2\alpha$ 。

利用 $z=0$ 处的力矩平衡关系：

$$\frac{1}{2}\Delta FL=\int_0^{\pi}\int_{R_H}^{R_N}\sigma_z(r,\varphi,0)r^2\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \tag{17}$$

同时将式(17)右端积分为代数表达式，求解可获得三维应力分布中 F_z的表达式：

$$F_z=\frac{3\Delta FL}{4}\frac{R_N^2-R_H^2}{R_N^3-R_H^3} \tag{18}$$

利用三维应力分布计算部件的弹性应变能，这个过程中对为 $r<R_N$和 $r>R_N$区域分别积分如下：

$$U=2\left(\int_0^L\int_0^{\pi}\int_{R_H}^{R_N}\frac{1}{2E}\sigma_z^2(r,\varphi,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z+\int_0^L\int_0^{\pi}\int_{R_N}^{R_z}\frac{1}{2E}\sigma_z^2(r,\varphi,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\right)=$$
$$\frac{\pi F_z^2}{4E}\left[(R_N^2-R_H^2)I_0+\frac{1}{6}(4R_N\tan\theta I_1+\tan^2\theta I_2)\right] \tag{19}$$

式中：$I_0=\int_0^L\frac{1}{(a+bz+cz^2)^2}\mathrm{d}z$，$I_1=\int_0^L\frac{z}{(a+bz+cz^2)^2}\mathrm{d}z$，$I_2=\int_0^L\frac{z^2}{(a+bz+cz^2)^2}\mathrm{d}z$ 。

将(19)代入(10)并消去 ΔF,最终得到部件对螺母的支撑刚度:

$$k_{\mathrm{ebc}}=\frac{\Delta F^2}{2\Delta U}=\frac{32}{9}\times\frac{E}{\pi}\times\frac{1}{L^2}\times\frac{(R_{\mathrm{N}}^3-R_{\mathrm{H}}^3)^2}{(R_{\mathrm{N}}^2-R_{\mathrm{H}}^2)^2}\left((R_{\mathrm{N}}^2-R_{\mathrm{H}}^2)I_0+(4R_{\mathrm{N}}\tan\theta I_1+\tan^2\theta I_2)/6\right)^{-1} \tag{20}$$

(4) k_{ebn}代表螺母对螺杆的支撑刚度。

与求 k_{ebc} 方法相同,首先根据有限元分析结果得到螺母的假设应力分布为:

$$\sigma_z(r,\varphi,z)=\begin{cases}\dfrac{\Delta FL}{R_{\mathrm{B}}^3}\sin(\varphi)\dfrac{r}{R_{\mathrm{B}}}\exp(-nz/H) & 0\leqslant r<R_{\mathrm{B}}\\ \dfrac{3\Delta FL(R_{\mathrm{N}}-R_{\mathrm{B}})}{3R_{\mathrm{N}}^4+R_{\mathrm{B}}^4-4R_{\mathrm{B}}R_{\mathrm{N}}^3}\sin(\varphi)\times\dfrac{r-R_{\mathrm{B}}}{R_{\mathrm{N}}-R_{\mathrm{B}}}\exp(-nz/H) & R_{\mathrm{B}}\leqslant r\leqslant R_{\mathrm{N}}\end{cases} \tag{21}$$

式中:n 取 5。

在每个坐标系方向假设分布与有限元对比如图 8 所示,在 φ 向和 z 向假设分布形式能够较好描述实际应力分布,r 向的应力分布在 r 较小时有一定误差,但由于应变能是应力的平方在体积上的积分,假设应力分布与真实应力分布误差主要处于小半径、低应力区域,对于应变能的结果影响有限。

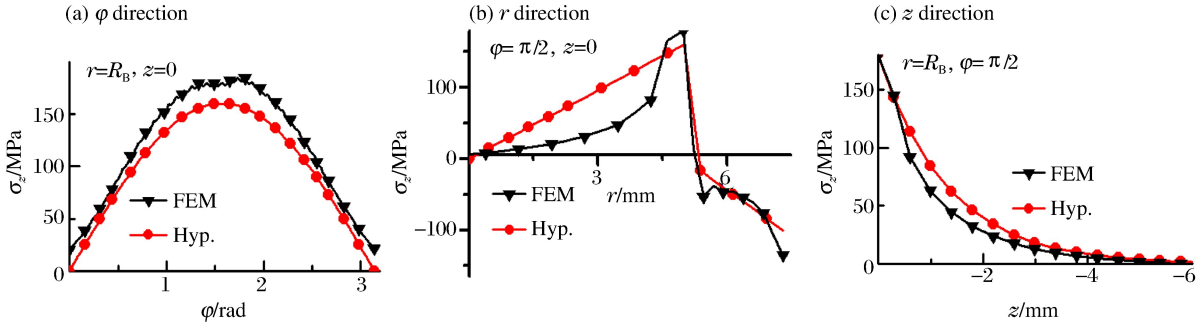

图 8 螺母假设应力分布与有限元应力分布比较

Fig. 8 Stress comparison of hypothesis with FEM on nut

利用三维应力分布计算得部件的弹性应变能,这个过程中对为 $r<R_{\mathrm{B}}$ 和 $r>R_{\mathrm{B}}$ 区域分别积分如下:

$$\Delta U=2\left(\int_0^H\int_0^{\pi}\int_0^{R_{\mathrm{B}}}\sigma_z^2(r,\varphi,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z+\int_0^H\int_0^{\pi}\int_{R_{\mathrm{B}}}^{R_{\mathrm{N}}}\sigma_z^2(r,\varphi,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\right)=$$

$$2\left(\frac{\pi}{16E}\frac{H}{2n}(1-\mathrm{e}^{-2n})\frac{\Delta F^2L^2}{R_{\mathrm{B}}^4}+\frac{\pi}{4E}\frac{H}{2n}(1-\mathrm{e}^{-2n})\frac{9\Delta F^2L^2(R_{\mathrm{N}}-R_{\mathrm{B}})^2}{(3R_{\mathrm{N}}^4+R_{\mathrm{B}}^4-4R_{\mathrm{B}}R_{\mathrm{N}}^3)^2}\times\frac{3R_{\mathrm{N}}^4-8R_{\mathrm{B}}R_{\mathrm{N}}^3+6R_{\mathrm{B}}^2R_{\mathrm{N}}^2-R_{\mathrm{N}}^4}{12(R_{\mathrm{N}}-R_{\mathrm{B}})^2}\right) \tag{22}$$

进而得到螺母对螺杆的支撑刚度:

$$k_{\mathrm{ebn}}=\frac{\Delta F^2}{2\Delta U}=8nE(\pi HL^2(1-\mathrm{e}^{-2n}))^{-1}\times\left(\frac{1}{R_{\mathrm{B}}^4}+\frac{3(3R_{\mathrm{N}}^4-8R_{\mathrm{B}}R_{\mathrm{N}}^3+6R_{\mathrm{B}}^2R_{\mathrm{N}}^2-R_{\mathrm{B}}^4)}{(3R_{\mathrm{N}}^4+R_{\mathrm{B}}^4-4R_{\mathrm{B}}R_{\mathrm{N}}^3)^2}\right)^{-1} \tag{23}$$

至此,通过部件与螺栓的几何参数、弹性模量、硬度、屈服强度以及界面粗糙度采用式(2)、(7)分别得到界面黏结阶段刚度 k_0 和部分滑移阶段 k_1,结合预紧力和摩擦因数以及已知为 0 的整体滑移阶段刚度 k_2 就能完整给出本文中提出的螺栓剪切模型。

3 验 证

图 2 显示,精细有限元模型能够准确模拟连接结构的力学行为,所以采用精细有限元模型对本文中建立的单搭接螺栓连接剪切本构模型进行验证。

模型采用 8.8 级 M6 螺栓连接,螺栓的弹性模量为 200 GPa;两个被连接部件为 45 钢,弹性模量为 210 GPa,屈服强度为 360 MPa,硬度为 200 MPa,厚度均为 12 mm。对螺栓施加 10 kN 的预紧载荷,该载荷为螺栓屈服载荷的 55%,部件之间以及部件与螺母之间的摩擦因数为 0.1。部件的表面粗糙度 R_{a} 为 1.6,取扩展因子 $\psi=1.2$,由式(2)计算得到在低切向载荷下,$k_0=3.54\times10^7$ N/mm。由式(7)计算得到 $k_1=7.86\times10^3$ N/mm。

有限元计算得到的载荷位移曲线与预测载荷位移曲线如图 9 所示，位移为上下螺母与部件接触区域中心点的位移差。

图 9 显示，该模型预测结果与有限元结果主要在部分滑移阶段有偏差，偏差的大小可用这个阶段的刚度 k_1 的误差描述。下面分别分析螺栓和部件不同选材、不同螺栓直径、不同部件厚度对 k_1 的误差影响。

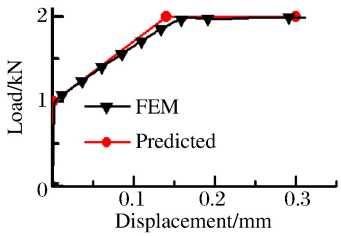

图 9　预测结果与有限元结果对比

Fig. 9　Comparison of prediction with FEM

表 1　不同结构选材 k_1 验证

Table 1　Verification of k_1 for different material

螺栓	部件	$k_1/(\mathrm{N\cdot mm^{-1}})$		误差/%
		预测值	有限元值	
钢	铝	1.83×10^4	1.68×10^4	8.8
铝	钢	9.69×10^3	8.88×10^3	9.1
铝	铝	8.44×10^3	7.70×10^3	9.5

表 1 中分别对螺栓和部件选用工程中常用的材料铝合金和钢进行验证，两个被连接部件等厚，均为 15 mm，螺栓直径为 10 mm，钢的弹性模量为 210 GPa，铝的弹性模量为 70 GPa。分析结果显示，材料的弹性模量对 k_1 的误差影响不大，都在 9%左右。

表 2　不同螺栓直径 k_1 验证

Table 2　Verification of k_1 for different bolt diameters

螺栓直径/mm	长细比	$k_1/(\mathrm{N\cdot mm^{-1}})$		误差/%
		预测值	有限元值	
6	5.0	4.29×10^3	4.13×10^3	3.8
10	3.0	2.53×10^4	2.30×10^4	9.9
16	1.9	1.17×10^5	9.14×10^4	28.3

表 2 对不同的螺栓直径进行验证，两个被连接部件的厚度均为 15 mm，部件和螺栓的材料都为钢材，其模量为 210 GPa，分析结果显示，螺栓直径影响 k_1 的误差，直径增大会导致误差变大。螺栓直径小于 10 mm 时，误差小于 10%，直径为 16 mm 时，误差增大至 28%。

表 3　不同部件厚度 k_1 验证

Table 3　Verification of k_1 for different thicknesses

部件厚度/mm	长细比	$k_1/(\mathrm{N\cdot mm^{-1}})$		误差/%
		预测值	有限元值	
20	2.0	6.57×10^4	5.76×10^4	14.0
40	4.0	1.23×10^4	1.03×10^4	8.3
70	7.0	2.76×10^3	2.64×10^3	4.7

表 3 对不同部件厚度的结构进行了分析，表中螺栓直径为 10 mm，部件和螺栓的材料都为钢材，其模量为 210 GPa，分析结果显示部件越厚，k_1 误差越小。当被连接两部件总厚度大于 40 mm 时，误差小于 10%，小于 20 mm 时，误差接近 15%。

综合表 1～3 的验证结果显示，k_1 的预测值都大于有限元值，其中螺栓和部件的选材对误差影响较小，螺栓和部件的尺寸对误差有影响。表 2～3 显示，误差与部件厚度/螺栓直径（长细比）显著相关，长细比大于 2.0 的情况下，给出的 k_1 计算方法能够得到较为准确的结果（误差小于 14%）。由于推导 k_{ebn} 和 k_{cbn} 过程中，仅主要方向的应力 σ_z，计算中的应变能小于实际应变能，导致 k_{ebn} 和 k_{cbn} 的预测结果比有

限元支撑刚度偏大，又由于 k_{ebn} 和 k_{cbn} 是 k_1 的分量，并且长细比越小，k_{ebn} 和 k_{cbn} 的影响越大，所以 k_1 随着长细比减小，与有限元刚度偏差明显。

4 结 论

(1)通过实验和计算得到单搭接螺栓剪切结构的载荷位移曲线，根据曲线斜率对不同阶段进行了物理解释：连接载荷首先通过部件相互间的界面传递；当部件相互间的界面发生滑移后，载荷通过螺母与部件之间的界面以及螺栓杆的弯曲传递；当螺母和部件之间的界面发生滑移后，连接结构都处于整体滑移阶段，载荷不再继续增加。

(2)提出了计及摩擦因数、预紧力、螺栓与部件尺寸、材料等参数的单搭接连接结构的剪切本构模型。给出了模型中参数的获取方法。该模型适用于大型结构在中低载冲击应力传播数值分析中大量螺栓连接简化。

(3)本构模型针对部分滑移阶段刚度 k_1 的计算采用应变能法获得了部件对螺母的支撑刚度 k_{ebc} 以及螺母对螺杆的支撑刚度 k_{ebn} 的影响，这种方法能够解决三维非轴对称变形体对梁的支撑刚度问题。

参考文献：

[1] Thota J, Trabia M B, O'Toole B J. Simulation of shock response in a lab-scale space frame structure using finite element analysis[J]. ASME 2011 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, 2011,218(1):75-86.

[2] 沈诣,洪荣晶,高学海,等.大型结构的螺栓连接有限元简化方法与验证[J].机械设计与制造,2012(8):26-28.
Shen Yi, Hong Rongjing, Gao Xuehai, et al. A simplify method and verification with FEM for bolt connection of large-scale structure[J]. Machinery Design & Manufacture, 2012(8):26-28.

[3] Hartwigsen C J, Song Y, Mcfarland D M, et al. Experimental study of non-linear effects in a typical shear lap joint configuration[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004,277(1/2):327-351.

[4] Fu W P, Huang Y M, Zhang X L, et al. Experimental investigation of dynamic normal characteristics of machined joint surfaces[J]. Journal of Vibration & Acoustics, 2000,122(4):393-398.

[5] He Y C, Wan Y C. Load-deflection behaviour of thin-walled plates with a single bolt in shearing[J]. Thin-Walled Structures, 2011,49(10):1261-1276.

[6] Gaul L, Lenz J. Nonlinear dynamics of structures assembled by bolted joints[J]. Acta Mechanica, 1997,125(1):169-181.

[7] Butner C M, Adams D E, Foley J R. Experimental investigation of the effects of bolt preload on the dynamic response of a bolted interface[J]. Journal of Applied Mechanics, 2013,80(1):011016.

[8] Segalman D J. A four-parameter Iwan model for lap-type joints[J]. Journal of Applied Mechanics, 2005,72(5):752-760.

[9] Tian H, Li B, Liu H, et al. A new method of virtual material hypothesis-based dynamic modeling on fixed joint interface in machine tools[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2011,51(3):239-249.

[10] 黄开放,金建新.基于虚拟材料方法的螺栓预紧力模拟的研究[J].机械设计与制造,2012(8):148-150.
Huang Kaifang, Jin Jianxin. Research on bolt preload simulation based on virtual material method[J]. Machinery Design & Manufacture, 2012(8):148-150.

[11] Shi Y, Wang M, Wang Y. Analysis on shear behavior of high-strength bolts connection[J]. International Journal of Steel Structures, 2011,11(2):203-213.

[12] Thota J, O'Toole B J, Trabia M B. Optimization of shock response within a military vehicle space frame[J]. Structural & Multidisciplinary Optimization, 2011,44(6):847-861.

[13] 柳征勇,骆剑,唐国安.大型卫星整流罩分离冲击载荷分析研究[J].航天器环境工程,2008,25(5):467-470.
Liu Zhengyong, Luo Jian, Tang Guoan. The studies on the impact force for separation of the large payload fairing [J]. Spacecraft Environment Engineering, 2008,25(5):467-470.

[14] Han Z, Shah V N, Abou-Hanna J, et al. Dynamic structural analysis of the 9516 transport package[J]. ASME

2010 Pressure Vessels and Piping Division/K-PVP Conference, 2010,45(3):378-391.

[15] 张学良，温淑花. 基于接触分形理论的结合面切向接触刚度分形模型[J]. 农业机械学报，2002，33(3)：91-93.
Zhang Xueliang, Wen Shuhua. A fractal model of tangential contact stiffness of joint surfaces based on the contact fractal theory[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2002,33(3):91-93.

[16] 葛世荣，Tonder K. 粗糙表面的分形特征与分形表达研究[J]. 摩擦学学报，1997，17(1)：74-81.
Guo Shirong, Tonder K. The fractal behavior and fractal characterization of rough surfaces[J]. Tribology, 1997, 17(1):74-81.

[17] 潘玉良，吴立群，张云电. 分形模型参数与粗糙度参数 *Ra* 关系的研究[J]. 中国工程科学，2004，6(5)：49-51.
Pan Yuliang, Wu Liqun, Zhang Yundian. Study of the relationship between fractal model parameters and roughness parameter *Ra*[J]. Engineering Science, 2004,6(5):49-51.

[18] 张学良，黄玉美，傅卫平，等. 粗糙表面法向接触刚度的分形模型[J]. 应用力学学报，2000，17(2)：31-35.
Zhang Xueling, Huang Yumei, Fu Weiping. Fractal model of normal contact stiffness between rough surfaces[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2000,17(2):31-35.

[19] Nassar S A, Abboud A. An improved stiffness model for bolted joints[J]. Journal of Mechanical Design, 2009, 131(12):121001.

[20] 杨国庆，王飞，洪军，等. 螺栓被连接件刚度理论的计算方法[J]. 西安交通大学学报，2012，46(7)：50-56.
Yang Guoqing, Wang Fei, Hong Jun, et al. Theoretical analysis for bolted member stiffness[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2012,46(7):50-56.

[21] Lehnhoff T F, Ko K, McKay M L. Member stiffness and contact pressure distribution of bolted joints[J]. Journal of Mechanical Design, 1994,116(2):550-557.

Study of strain energy based shear model for single lap bolt

Kou Jianfeng, Xu Fei, Feng Wei

(*School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072, *Shaanxi*, *China*)

Abstract: In simplifying large numbers of bolt connections in simulation to substitute the construction of the whole joint structure, it is essential to establish a joint constitutive model. In this paper, a shear constitutive model of the single lap bolt was established. Firstly, the curves of the load-displacement of the single lap shear bolt were obtained from experiments, and the corresponding physical mechanism was analyzed using the finite-element method. Then, the curve of the load-displacement was divided into several phases according to the physical mechanism. Based on the first three phases, the basic form of the shear constitutive model was proposed and the related parameters were determined in detail. In the second phase of the shear model, the support stiffness was solved by the strain energy method based on reasonable stress distribution hypothesis, which was a step most difficult to take. Finally, this constitutive model was verified by numerous examples. The results show that this shear model for the single lap bolt has the advantages of providing clear physical meaning, easy parameter estimation, and high accuracy.

Key words: solid mechanics; shear stiffness; constitutive model; bolt joint; strain energy

（责任编辑　曾月蓉）