DOI: 10.11883/1001-1455(2015)04-0591-08

双相介质半空间中圆孔对透射 SH 波的稳态分析*

齐 辉[1],蔡立明[1],罗广龙[1],潘向南[1],杨 杰[2],王宪章[3],李国文[1],蒋敬江[1]
(1.哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院,黑龙江 哈尔滨 150001;
2.上海电机学院机械学院,上海 201306;
3.中建一局总承包公司,北京 100070)

摘要:研究了平面 SH 波在半空间双相弹性介质中的传播。通过 Green 函数和积分方程方法,按照复变函数描述,对透射波被圆孔散射的情况进行稳态分析。将双相介质半空间沿界面剖分为 1/4 空间介质Ⅰ和含圆孔的 1/4 空间介质Ⅱ,分别构造了介质Ⅰ和介质Ⅱ中反平面点源荷载的 Green 函数,按双相介质中平面 SH 波的处理方法,给出介质Ⅰ和介质Ⅱ中的平面位移波,两种介质之间的相互作用力与对应 Green 函数的乘积沿界面的积分与平面位移波叠加得到介质Ⅰ和介质Ⅱ中的全部位移场。按照界面的位移连续条件,定解积分方程组,得到问题的稳态解,并给出圆孔位置和介质参数对散射的影响。

关键词:固体力学;散射;Green 函数;SH 波;圆孔;双相介质半空间;振动与波
中图分类号:O343 **国标学科代码**:13015 **文献标志码**:A

弹性动力学中将研究对象视为连续的弹性体,运用数学物理的方法,解析地研究机械运动,不仅对数学物理的基础科学研究具有重要意义,而且对岩土工程、地震工程等工程技术应用具有很大的价值。弹性波的传播及其在全空间中被一些特殊曲面散射的研究已经日趋完善[1-4]。作为最简单的波动模式,柱体在含复杂边界介质中的反平面散射研究取得了一定的进展[5-6]。研究人员陆续研究了无限大弹性半空间、1/4 空间中圆柱孔洞、夹杂、衬砌对 SH 平面波的稳态散射[7-12]。双相介质半空间中 SH 波对圆柱孔洞、夹杂和界面裂纹的散射问题也得到了一定的研究[13-18]。这些研究中主要考虑入射波与孔洞或夹杂在同一介质内的散射问题,对于平面 SH 波从介质Ⅰ穿过界面折射进入介质Ⅱ,透射波对介质Ⅱ中圆孔的散射问题的研究相对匮乏。本文中用 Green 函数和积分方程,按复变函数方法对其稳态响应进行分析,求解双相介质半空间中位移场和应力场的解析表达式,并采用数值方法计算算例中圆孔边沿动应力集中因子和地表位移幅值的分布。

1 理论模型

如图 1 所示,连续、均匀、各向同性的弹性半空间,由介质Ⅰ和Ⅱ组成,其剪切模量分别为 μ_1 和 μ_2,质量密度分别为 ρ_1 和 ρ_2,两种介质的分界为 B_V,这种双相介质半空间的边界平面为 B_H。介质Ⅱ中有一个圆形孔洞,其半径为 R,其圆心 O_1 距离界面 B_V 为 d,距离边界 B_H 为 h,定义平面直角坐标系 $O_1x_1y_1$(图 1),以出平面方向为 z 轴正方向,x_1 轴、y_1 轴和 z 轴满足右手关系。

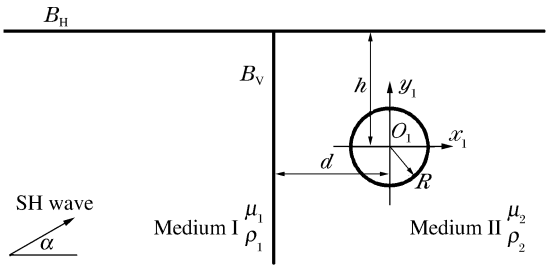

图 1 半空间双相介质中的圆孔
Fig. 1 Circular cavity in a bi-material half space

在介质Ⅰ中有稳态 SH 平面波入射,其角频率

* **收稿日期**:2013-12-04;**修回日期**:2014-03-01
基金项目:国家自然科学基金项目(51379048)
第一作者:齐 辉(1963—),男,博士,教授;**通讯作者**:潘向南,panxiangnan@hrbeu.edu.cn。

为 ω。入射波与它在边界 B_{H} 上的反射和在界面 B_{V} 的反射和透射，造成了介质Ⅰ与介质Ⅱ中质点的反平面运动，其反平面运动的位移分别为 $w_{\mathrm{Ⅰ}}$ 和 $w_{\mathrm{Ⅱ}}$，满足标量波动方程：

$$\mu_1 \nabla w_{\mathrm{Ⅰ}} = \rho_1 \frac{\partial^2 w_{\mathrm{Ⅰ}}}{\partial t^2}, \qquad \mu_2 \nabla w_{\mathrm{Ⅱ}} = \rho_2 \frac{\partial^2 w_{\mathrm{Ⅱ}}}{\partial t^2} \tag{1}$$

分离时间变量和空间变量，得到对应的 Helmholtz 方程（介质Ⅰ和介质Ⅱ中位移场的控制方程）：

$$\nabla w_{\mathrm{Ⅰ}} + k_1^2 w_{\mathrm{Ⅰ}} = 0, \qquad \nabla w_{\mathrm{Ⅱ}} + k_2^2 w_{\mathrm{Ⅱ}} = 0 \tag{2}$$

式中：$k_1 = \omega\sqrt{\rho_1/\mu_1}$，$k_2 = \omega\sqrt{\rho_2/\mu_2}$，分别为介质Ⅰ和介质Ⅱ中的波数。

位移场 $w_{\mathrm{Ⅰ}}$ 和 $w_{\mathrm{Ⅱ}}$ 在半空间边界 B_{H} 平面上产生的剪应力都为 0，满足 Neumann 边界条件；位移场 $w_{\mathrm{Ⅰ}}$ 和对应的应力场 $\tau_{\mathrm{Ⅰ}}$ 在界面 B_{V} 上与位移场 $w_{\mathrm{Ⅱ}}$ 和对应的应力场 $\tau_{\mathrm{Ⅱ}}$ 相等，分别满足 Dirichlet 边界条件和 Neumann 边界条件；应力场 $\tau_{\mathrm{Ⅱ}}$ 在圆形孔洞边界上为 0，满足 Neumann 边界条件。这 4 个边界条件与介质Ⅰ和介质Ⅱ中的控制方程(2)组成本文的定解问题。

2 等价问题

为消除双相介质半空间边界 B_{H} 平面的影响，引入等价问题。如图 2 所示，界面 B_{V} 将全空间分为介质Ⅰ和Ⅱ两个半空间。介质Ⅱ中有 2 个大小相等的圆形孔洞，关于 B_{H} 平面对称，圆心分别为 O_1 和 O_2，半径为 R。以 B_{H} 和 B_{V} 平面的交线在坐标平面 $O_1x_1y_1$ 内的投影 O 为原点，建立平面直角坐标系 Oxy，同时以 O_2 为原点建立平面直角坐标系 $O_2x_2y_2$。按复变函数方法，引入复变量 $z = x + \mathrm{i}y$，$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 为虚数单位。对比图 1 和图 2 可得到复变量 z, z_1, z_2 的关系：

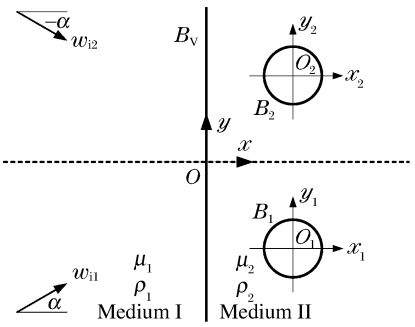

图 2 等价问题

Fig. 2 Equivalent issue

$$z_1 = z - d + \mathrm{i}h, \qquad z_2 = z - d - \mathrm{i}h \tag{3}$$

在介质Ⅰ中有一对稳态的 SH 平面波入射，其角频率均为 ω，初相位相等，入射角关于平面 B_{H} 对称，其位移 w_{i1} 和 w_{i2} 为：

$$\begin{cases} w_{i1}(z,t) = W_0 \exp\left[\dfrac{\mathrm{i}k_1}{2}(z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} + \bar{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) - \mathrm{i}\omega t\right] \\ w_{i2}(z,t) = W_0 \exp\left[\dfrac{\mathrm{i}k_1}{2}(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \bar{z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}) - \mathrm{i}\omega t\right] \end{cases} \tag{4}$$

式中：W_0 为入射波的位移振幅，α 为入射位移波 w_{i1} 传播方向与 x 轴的夹角，$\bar{z}$ 为 z 的共轭复变量。

这样，本文中定解条件变成等价的边值问题，由 B_{V} 界面上位移和应力连续的 Dirichlet 和 Neumann 边界条件，及介质Ⅱ中圆形孔洞边界 B_1 和 B_2 柱面上剪应力自由的 Neumann 边界条件组成。

介质Ⅰ中的入射位移波 w_{i1} 和 w_{i2} 在界面 B_V 将发生反射和折射，折射波将透射进入介质Ⅱ，在圆形孔洞的边界 B_1 和 B_2 柱面发生散射，散射波也将在界面 B_{V} 发生反射和折射，为了分析界面 B_{V} 对散射波的反射和折射效应，引入 Green 函数方法。

3 Green 函数

按照 Green 函数方法，考虑点源荷载在界面 B_V 上分别对介质Ⅰ和介质Ⅱ的稳态位移响应，其分离时间变量后，即为 Green 函数。

在介质Ⅰ中，点源荷载 $\delta(z - \mathrm{i}y_0)\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 产生的 Green 函数 $G_{\mathrm{Ⅰ}}(z, \mathrm{i}y_0)$ 是半空间中的基本解，表达式为

$$G_{\mathrm{Ⅰ}}(z, \mathrm{i}y_0) = \frac{\mathrm{i}}{2\mu_1} H_0^{(1)}(k_1 \mid z - \mathrm{i}y_0 \mid) \tag{5}$$

式中：$\mathrm{i}y_0$ 是坐标面 Oxy 上点源荷载作用点对应的复数值，位于界面 B_{V} 上，与 x 轴的距离为 y_0，$H_0^{(1)}$ 为 0 阶第一种 Hankel 函数，Hankel 函数是第三类 Bessel 函数。

如图 3 所示，在介质Ⅱ中，点源荷载 $\delta(z-\mathrm{i}y_0)\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 产生的 Green 函数 $G_{\mathrm{Ⅱ}}(z,\mathrm{i}y_0)$，按照叠加原理，有：

$$G_{\mathrm{Ⅱ}}(z,\mathrm{i}y_0)=G(z,\mathrm{i}y_0)+w_{\mathrm{G1}}(z)+w'_{\mathrm{G1}}(z)+w_{\mathrm{G2}}(z)+w'_{\mathrm{G2}}(z) \tag{6}$$

$$G(z,\mathrm{i}y_0)=\frac{\mathrm{i}}{2\mu_2}H_0^{(1)}(k_2\mid z-\mathrm{i}y_0\mid) \tag{7}$$

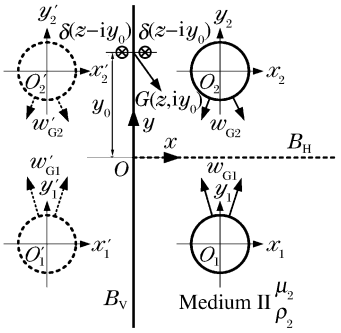

图 3 介质Ⅱ中的 Green 函数

Fig. 3 Green function in medium Ⅱ

式中：$G(z,\mathrm{i}y_0)$ 是介质Ⅱ中没有孔洞时，半空间中的基本解；$w_{\mathrm{G1}}(z)$ 和 $w_{\mathrm{G2}}(z)$ 分别是点源荷载 $\delta(z-\mathrm{i}y_0)$ 对圆形孔洞边界 B_1 和 B_2 柱面产生的散射波的位移场，$w'_{\mathrm{G1}}(z)$ 和 $w'_{\mathrm{G2}}(z)$ 是 $w_{\mathrm{G1}}(z)$ 和 $w_{\mathrm{G2}}(z)$ 关于界面 B_{V} 对称的镜像散射波，按照波函数展开法，它们满足：

$$\begin{cases} w_{\mathrm{G1}}(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}A_nH_n^{(1)}(k_2\mid z_1\mid)\left(\dfrac{z_1}{\mid z_1\mid}\right)^n \\ w_{\mathrm{G2}}(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}B_nH_n^{(1)}(k_2\mid z_2\mid)\left(\dfrac{z_2}{\mid z_2\mid}\right)^n \\ w'_{\mathrm{G1}}(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^nA_nH_n^{(1)}(k_2\mid z'_1\mid)\left(\dfrac{z'_1}{\mid z'_1\mid}\right)^{-n} \\ w'_{\mathrm{G2}}(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^nB_nH_n^{(1)}(k_2\mid z'_2\mid)\left(\dfrac{z'_2}{\mid z'_2\mid}\right)^{-n} \end{cases} \tag{8}$$

式中：$H_n^{(1)}$ 是 n 阶第一种 Hankel 函数，A_n 和 B_n 分别是圆形孔洞边界 B_1 和 B_2 柱面散射波的 Fourier-Hankel 波函数级数展开式的待定系数，$z'_1=z_1+2d$，$z'_2=z_2+2d$，分别为以圆心 O_1 和 O_2 关于界面 B_{V} 的镜像点 O'_1 和 O'_2 建立的直角坐标系 $O'_1x'_1y'_1$ 和 $O'_2x'_2y'_2$ 的复数形式。

介质Ⅱ对应半空间中的基本解 $G(z,\mathrm{i}y_0)$，位移波 w_{G1} 和 w'_{G1} 的矢量和，位移波 w_{G2} 和 w'_{G2} 的矢量和，它们的应力场都满足界面 B_{V} 上的剪应力自由条件。位移场 $G_{\mathrm{Ⅱ}}(z,\mathrm{i}y_0)$ 的应力场必须满足圆形孔洞边界 B_1 和 B_2 柱面上的剪应力自由条件做 Fourier 展开，得到等价的剪应力自由条件，用于确定 Fourier-Hankel 波函数系数 A_n 和 B_n，即定解条件。根据三角函数系的正交性，得到和定解条件等价的两组方程。截断 Fourier-Hankel 波函数级数展开式，取对应的方程，组成定解方程组，按 Gauss 消去法解得 A_n 和 B_n 的具体数值，这样，就确定了介质Ⅱ中 Green 函数 $G_{\mathrm{Ⅱ}}(z,\mathrm{i}y_0)$ 位移场的具体表达式。

4　位移波场

按照分区契合的方法，研究 SH 波在双相介质中的传播与散射。界面 B_{V} 将双相介质分为介质Ⅰ和介质Ⅱ，分别研究介质Ⅰ和介质Ⅱ，定义介质Ⅰ的边界为 B_{V}^{+} 平面，介质Ⅱ的边界为 B_{V}^{-} 平面，在 B_{V}^{+} 和 B_{V}^{-} 平面上分别加以沿 y 轴分布的方向相反、大小相等的一组力 $f(y)$，表征介质Ⅰ和介质Ⅱ的相互作用力，如图 4 所示，其中点表示垂直纸面向外，叉表示垂直纸面向里。

介质Ⅰ中的位移场 $w_{\mathrm{Ⅰ}}(z)$ 由 3 部分组成：入射波的位移场、反射波的位移场、介质Ⅱ对介质Ⅰ的作用力 $f(y)$ 产生的位移场，其表达式为：

$$w_{\mathrm{Ⅰ}}(z)=w_{i1}(z)+w_{i2}(z)+w_{r1}(z)+w_{r2}(z)+\int_{-\infty}^{+\infty}G_{\mathrm{Ⅰ}}(z,\mathrm{i}y_0)f(y_0)\mathrm{d}y_0 \tag{9}$$

式中：$w_{i1}(z)$ 和 $w_{i2}(z)$ 是入射波的位移场，根据式(4)，略去时间谐和项 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$，得到入射波位移场

的表达式：

$$\begin{cases} w_{i1}(z)=W_0\exp\left[\dfrac{ik_1}{2}(z\mathrm{e}^{-i\alpha}+\bar{z}\mathrm{e}^{i\alpha})\right] \\ w_{i2}(z)=W_0\exp\left[\dfrac{ik_1}{2}(z\mathrm{e}^{i\alpha}+\bar{z}\mathrm{e}^{-i\alpha})\right] \end{cases} \tag{10}$$

$w_{r1}(z)$和$w_{r2}(z)$是反射波的位移场，表达式为：

$$\begin{cases} w_{r1}(z)=W_1\exp\left[\dfrac{ik_1}{2}(z\mathrm{e}^{-i(\pi-\alpha)}+\bar{z}\mathrm{e}^{i(\pi-\alpha)})\right] \\ w_{r2}(z)=W_1\exp\left[\dfrac{ik_1}{2}(z\mathrm{e}^{i(\pi-\alpha)}+\bar{z}\mathrm{e}^{-i(\pi-\alpha)})\right] \end{cases} \tag{11}$$

式中：W_1 是反射波的振幅。讨论介质Ⅰ边界 B_V^+ 平面上的分布力 $f(y)$的影响，当 $y=y_0$ 时，即取坐标面 Oxy 上复坐标 $\mathrm{i}y_0$ 点，加以集中力 $f(y_0)\delta(z-\mathrm{i}y_0)$，$G_{\mathrm{I}}(z,\mathrm{i}y_0)$是介质Ⅰ中产生的 Green 函数，$G_{\mathrm{I}}$ 与 $f(y_0)$乘积的积分项是介质Ⅱ对介质Ⅰ的作用力在介质Ⅰ中产生的位移场。

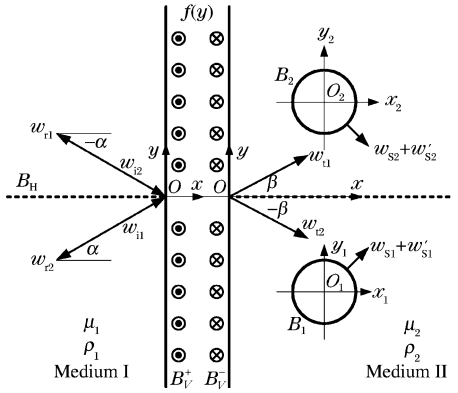

图 4 位移波场的契合

Fig. 4 Conjunction of displacement wave field

介质Ⅱ中的位移场 $w_{\mathrm{II}}(z)$同样由 3 部分组成：折射波的位移场、散射波的位移场，以及介质Ⅰ对介质Ⅱ的作用力$-f(y)$产生的位移场，表达式为：

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{II}}(z)=&w_{t1}(z)+w_{t2}(z)+w_{s1}(z)+w'_{s1}(z)+\\ &w_{s1}(z)+w'_{s2}(z)-\int_{-\infty}^{+\infty}G_{\mathrm{II}}(z,\mathrm{i}y_0)f(y_0)\mathrm{d}y_0 \end{aligned} \tag{12}$$

$w_{t1}(z)$和$w_{t2}(z)$是折射波的位移场，表达式为：

$$\begin{cases} w_{t1}(z)=W_2\exp\left[\dfrac{ik_2}{2}(z\mathrm{e}^{-i\beta}+\bar{z}\mathrm{e}^{i\beta})\right] \\ w_{t2}(z)=W_2\exp\left[\dfrac{ik_2}{2}(z\mathrm{e}^{i\beta}+\bar{z}\mathrm{e}^{-i\beta})\right] \end{cases} \tag{13}$$

式中：W_2 是折射波的振幅，β是折射波的角度（见图 4）。按照界面 B_{V} 上位移和应力的连续性条件，角度 α 和β 满足 Snell 定律：

$$k_1\sin\alpha=k_2\sin\beta \tag{14}$$

入射波振幅 W_0、反射波振幅 W_1 和折射波振幅 W_2，满足

$$\begin{cases} W_0+W_1=W_2 \\ W_0k_1\mu_1\cos\alpha-W_1k_1\mu_1\cos\alpha=W_2k_2\mu_2\cos\beta \end{cases} \tag{15}$$

$w_{s1}(z)$和$w_{s2}(z)$是介质Ⅱ中圆形孔洞边界 B_1 和 B_2 柱面对折射波的散射所产生的位移场，$w'_{s1}(z)$和$w'_{s2}(z)$是散射波 $w_{s1}(z)$和$w_{s2}(z)$分别对界面 B_V 反射产生的镜像散射波的位移场，按照波函数展开法，得到：

$$\begin{cases} w_{s1}(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_nH_n^{(1)}(k_2|z_1|)\left(\frac{z_1}{|z_1|}\right)^n \\ w_{s2}(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}D_nH_n^{(1)}(k_2|z_2|)\left(\frac{z_2}{|z_2|}\right)^n \\ w'_{s1}(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^nC_nH_n^{(1)}(k_2|z'_1|)\left(\frac{z'_1}{|z'_1|}\right)^{-n} \\ w'_{s2}(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^nD_nH_n^{(1)}(k_2|z'_2|)\left(\frac{z'_2}{|z'_2|}\right)^{-n} \end{cases} \tag{16}$$

式中：C_n 和 D_n 是待定的 Fourier-Hankel 波函数系数。讨论介质Ⅱ边界 B_V^- 平面上分布力$-f(y)$的影响，当 $y=y_0$ 时，取坐标面 Oxy 上复坐标 $\mathrm{i}y_0$ 点，加以集中力$-f(y_0)\delta(z-\mathrm{i}y_0)$，$G_{\mathrm{II}}(z,\mathrm{i}y_0)$是介质Ⅱ中产生的 Green 函数，$G_{\mathrm{II}}$ 与$-f(y_0)$乘积的积分项是介质Ⅰ对介质Ⅱ的作用力在介质Ⅱ中产生的位移场。

散射波 w_{s1} 和 w_{s2} 与镜像散射波 w'_{s1} 和 w'_{s2} 的矢量和满足 B_V^- 平面上应力自由的条件,其与折射波 w_{t1} 和 w_{t1} 的矢量和应满足圆形孔洞边界 B_1 和 B_2 柱面上的应力自由条件。做 Fourier 级数展开,得到确定系数 C_n 和 D_n 的定解方程组;相应地截断定解方程组和散射波的 Fourier-Hankel 波函数级数,得到 C_n 和 D_n 的具体形式,这样就求得了介质Ⅱ中由折射波在圆形孔洞边界上所形成的散射波。

5　积分方程

由(9)和(12)式,按照界面 B_V 上位移和应力的连续条件,即契合条件,得到:

$$w_{\mathrm{Ⅰ}}(\mathrm{i}y)=w_{\mathrm{Ⅱ}}(\mathrm{i}y),\qquad \tau_{\mathrm{Ⅰ}}(\mathrm{i}y)=\tau_{\mathrm{Ⅱ}}(\mathrm{i}y) \tag{17}$$

式中:$w_{\mathrm{Ⅰ}}(\mathrm{i}y)$和 $w_{\mathrm{Ⅱ}}(\mathrm{i}y)$分别是介质Ⅰ和介质Ⅱ中的位移沿界面 B_V 的分布,$\tau_{\mathrm{Ⅰ}}(\mathrm{i}y)$和 $\tau_{\mathrm{Ⅱ}}(\mathrm{i}y)$分别是介质Ⅰ和介质Ⅱ中应力分量沿界面 B_V 的分布。作用在 B_V^+ 和 B_V^- 平面上的一组大小相等、方向相反的力 $f(y)$,本身代表介质Ⅰ和介质Ⅱ之间的相互作用力,满足应力的契合条件。将第 4 节中构造的位移波的位移场和应力场代入方程(17),入射波和反射波在介质Ⅰ中的位移场和应力场与折射波在介质Ⅱ中的位移场和应力场满足界面 B_V 上的契合条件,而介质Ⅰ中的 Green 函数、介质Ⅱ中的 Green 函数、散射波与其镜像散射波的合位移波在界面 B_V 上剪应力均为 0,也满足界面 B_V 上的应力契合条件。因此,界面 B_V 上的契合条件(17)等价于介质Ⅰ和介质Ⅱ中的位移连续性条件:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[G_{\mathrm{Ⅰ}}(\mathrm{i}y,\mathrm{i}y_0)+G_{\mathrm{Ⅱ}}(\mathrm{i}y,\mathrm{i}y_0)\right]f(y_0)dy_0=w_{s1}(\mathrm{i}y)+w'_{s1}(\mathrm{i}y)+w_{s2}(\mathrm{i}y)+w'_{s2}(\mathrm{i}y) \tag{18}$$

这是积分限为无穷的第一种 Fredholm 积分方程。在 y 轴上对界面 B_V 取 $N+1$ 个节点 y_k,同样地,对积分区间取 $N+1$ 个节点 y_l,按数值方法对(18)式进行离散求解:

$$\sum_{l=1}^{N+1}Q_l\left[G_{\mathrm{Ⅰ}}(\mathrm{i}y_k,\mathrm{i}y_l)+G_{\mathrm{Ⅱ}}(\mathrm{i}y_k,\mathrm{i}y_l)\right]f(y_l)\approx w_{s1}(\mathrm{i}y_k)+w'_{s1}(\mathrm{i}y_k)+w_{s2}(\mathrm{i}y_k)+w'_{s2}(\mathrm{i}y_k) \tag{19}$$

式中:Q_l 是求积系数,伴随求积节点 y_l,取决于数值积分所采用的方法。按 Gauss 消去法,计算节点 y_l 上 $f(y_l)$的数值,之后用 Lagrange 插值拟合界面 B_V 上的分布力 $f(y)$

6　算例分析

按照第 4 节中的讨论,结合第 5 部分求得的界面 B_V 上的分布力 $f(y)$,分别按照(9)式和(12)式,得到介质Ⅰ和介质Ⅱ中的位移场 $w_{\mathrm{Ⅰ}}(z)$和 $w_{\mathrm{Ⅱ}}(z)$,求得应力场 $\tau_{\mathrm{Ⅰ}}(z)$和 $\tau_{\mathrm{Ⅱ}}(z)$,它们足以描述介质Ⅰ和介质Ⅱ中全部质点的运动状态。

为直观的讨论圆孔散射所造成的动应力集中效应,引入动应力集中因子 $\tau_{\theta\xi}^*(z)$定量表征介质Ⅱ中的圆孔对透射 SH 波的散射:

$$\tau_{\theta\xi}^*(z)=\frac{\left|\tau_{\theta\xi\,\mathrm{Ⅱ}}(z)\right|}{W_2k_2\mu_2} \tag{20}$$

$$\tau_{\theta\xi\,\mathrm{Ⅱ}}(z)=\frac{1}{|z_1|}\left[\frac{\partial w_{\mathrm{Ⅱ}}(z)}{\partial z_1}z_1+\frac{\partial w_{\mathrm{Ⅱ}}(z)}{\partial z_1}\bar{z}_1\right] \tag{21}$$

式中:$\tau_{\theta\xi\,\mathrm{Ⅱ}}$是介质Ⅱ中应力张量场 $\tau_{\mathrm{Ⅱ}}$ 的周向分量。$\tau_{\theta\xi}^*$是介质Ⅱ中 z 点在 $O_1x_1y_1$ 坐标系中的周向应力分量的时间幅值与透射位移波 w_{t1}在同一点产生的最大动应力的比值,当$|z_1|=R$时,$\tau_{\theta\xi\,\mathrm{Ⅱ}}(z)$是 B_1 柱面上的应力,$\tau_{\theta\xi}^*$是 B_1 柱面上的动应力集中因子。

为直观的讨论圆孔散射对水平边界 B_H 位移的影响,引入标准化的位移幅值 $W^*(z)$:

$$W^*(z)=\begin{cases}\left|w_{\mathrm{Ⅰ}}(z)\right|/W_0, & z\in\text{Medium Ⅰ}\\ \left|w_{\mathrm{Ⅱ}}(z)\right|/W_0, & z\in\text{Medium Ⅱ}\end{cases} \tag{22}$$

水平边界 B_H 平面的存在极大地影响了圆孔的散射,包括 2 部分:与圆孔到 B_H 平面的距离 h 无关的镜像透射位移波 $w_{t2}(z)$对圆孔的散射,以及随着 h 的增大而衰减的镜像散射波 $w_{s2}(z)$对圆孔的散射。水平边界对圆孔散射的影响在弹性动力学反平面半空间问题中得到了广泛的讨论,相较而言,在双相介质半空间中,垂直界面 B_V 对介质Ⅱ中圆孔散射的作用更值得注意。

算例以圆孔半径 R 为参考长度，给定 $h=2R$，$d=2R$，取入射角 $\alpha=0$，数值计算双相介质的不同波数、剪切模量对圆孔散射的具体影响，定义波数比 $k^*=k_1/k_2$，剪切模量比 $\mu^*=\mu_1/\mu_2$。图 5 和图 6 分别给出由圆孔散射所造成的圆孔边沿的动应力集中因子的分布和受其影响的水平边界 B_H 平面上标准化的位移幅值的分布。

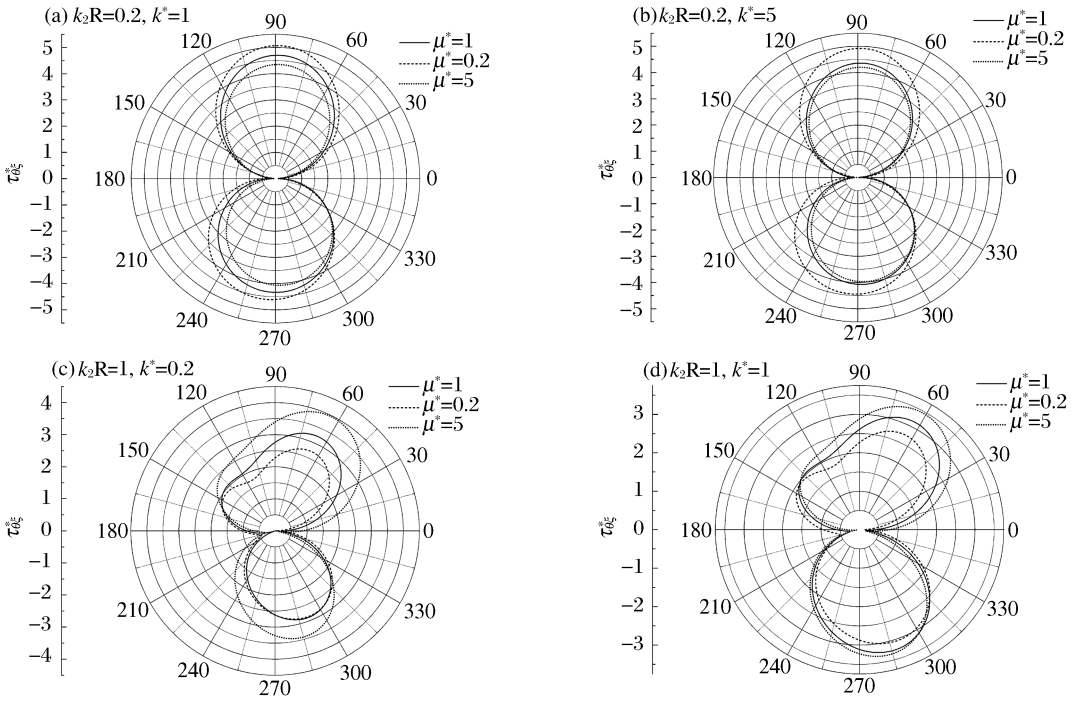

图 5 动应力集中因子在圆孔边沿的分布

Fig. 5 Distribution of dynamic stress concentrations factors around the cylindrical cavity

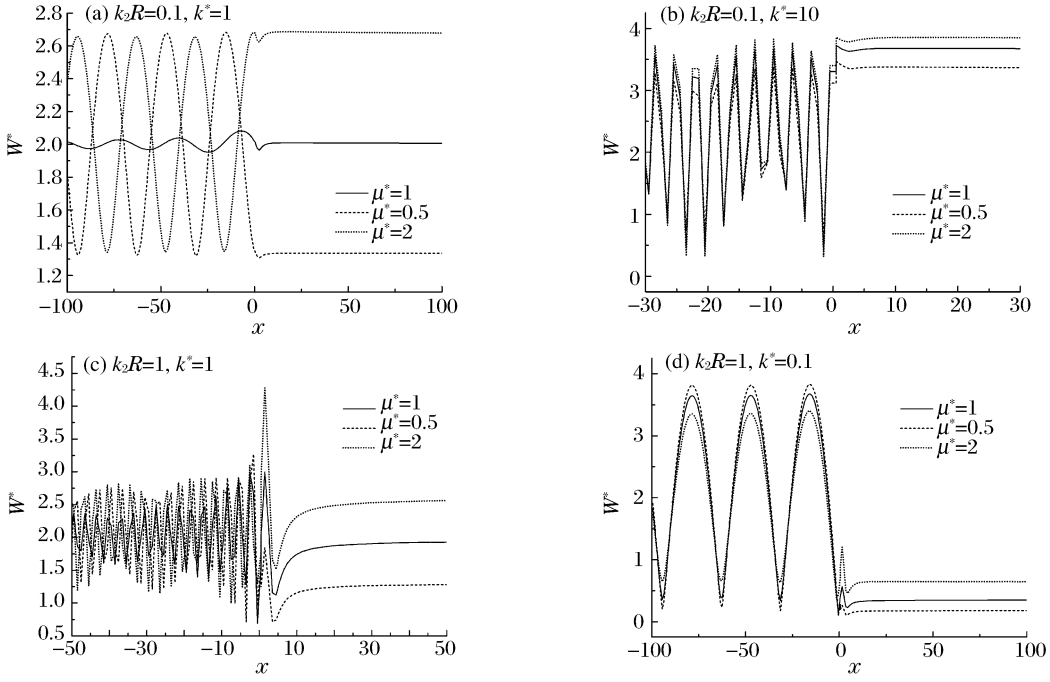

图 6 标准化位移幅值在水平边界上的分布

Fig. 6 Distribution of normalized displacement amplitude along the horizontal bound

7　结　论

双相介质半空间中圆孔的反平面稳态散射受到很多因素的影响，诸如，圆孔和边界的距离、和界面的距离，双相介质的波数比、剪切模量比，平面 SH 波的入射角度、频率，等等。不同的圆孔位置对散射的影响可以参照 1/4 空间圆孔问题的研究，当圆孔距离界面足够远，界面另一侧介质的影响可以忽略，界面附近的圆孔，对穿过界面的透射平面 SH 波的散射受到界面另一侧介质的强烈影响，集中体现在介质的波数和剪切模量。作为 SH 波在双相介质中传播的问题，应充分考虑界面两侧介质对平面 SH 波透射的影响，给定入射角度和频率。

在相对低频的透射波作用下，圆孔散射造成更大的动应力集中，在相对高频的透射波作用下，圆孔散射造成的动应力分布受到界面另一侧介质的影响更大。在一定范围内，界面另一侧介质的剪切模量很大程度地决定着圆孔散射所造成的动应力的数值与分布，这种效应随着界面另一侧介质的质量密度的增大而减小。在相对高频的透射波作用下，圆孔散射造成局部更大的地表位移，也更受界面另一侧介质的影响，随着界面另一侧介质波数的增大，圆孔散射所造成的局部地表位移的变化也越大，这种效应随着界面另一侧介质的剪切模量的增大也略微地增大。

参考文献：

[1] Achenbach J D. Wave propagation in elastic solids[M]. Netherlands, Amsterdam: North-Holland, 1973.

[2] 胡德绥. 弹性波动力学[M]. 北京：地质出版社，1989.

[3] Ying C F, Truell R. Scattering of plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid[J]. Journal of Applied Physics, 1956,27(9):1086-1097.

[4] PaoY H, Mow C C. Diffraction of elastic waves and dynamic wtress concentrations[M]. New York: Crane & Russak, 1973.

[5] Liu D K, Gai B Z, Tao G Y. Applications of the method of complex functions to dynamic stress concentrations[J]. Wave Motion, 1982,4(3):293-304.

[6] 刘殿魁. 各向异性介质中Ⅲ型裂缝的动力分析[J]. 地震工程与工程振动，1991,11(2):29-38.
Liu Dian-kui. Analysis of dynamic stresses of mode Ⅲ crack in anisotropic materials[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1991,11(2):29-38.

[7] 刘殿魁，刘宏伟. SH 波散射与界面圆孔附近的动应力集中[J]. 力学学报，1998,30(5):597-604.
Liu Dian-kui, Liu Hong-wei. Scattering and dynamic stress concentration of SH-wave by interface circular hole[J]. Acta Mechanica Sinica, 1998,30(5):598-604.

[8] 刘殿魁，田家勇. SH 波对界面圆柱形弹性夹杂散射及动应力集中[J]. 爆炸与冲击，1999,19(2):115-122.
Liu Dian-kui, Tian Jia-yong. Scattering and dynamic stress concentration of SH-wave by interface cylindrical elastic inclusion[J]. Explosion and Shock Waves, 1999,19(2):115-122.

[9] 史文谱，刘殿魁，宋永涛. 直角平面区域内固定圆形刚性夹杂问题的 Green 函数解[J]. 固体力学学报，2006,27(2):207-212.
Shi Wen-pu, Liu Dian-kui, Song Yong-tao. The anti-plane Green function solution of the problem of a fixed rigid circular inclusion in right-angle plane[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2006,27(2):207-212.

[10] 史文谱，刘殿魁，宋永涛，等. 直角平面内圆孔对稳态 SH 波的散射[J]. 应用数学和力学，2006,27(12):1619-1626.
Shi Wen-pu, Liu Dian-kui, Song Yong-tao, et al. Scattering of circular cavity in right-angle plane space to steady SH-wave[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2006,27(12):1619-1626.

[11] 折勇，齐辉，杨在林. SH 波对直角平面区域内圆形孔洞的散射与地震动[J]. 应用力学学报，2008,25(3):392-397.
Shi Yong, Qi Hui, Yang Zai-lin. Scattering of SH-wave by circular cavity in right-angle plane and seismic ground motion[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2008,25(3):392-397.

[12] 张根昌，齐辉，刘平安. SH 波对直角平面区域内圆形衬砌的散射与地震动[J]. 力学与实践，2013,35(1):60-66.
Zhang Gen-chang, Qi Hui, Liu Ping-an. Scattering of SH-wave by circular lining in right-angle plane and seismic ground motion[J]. Mechanics in Engineering, 2013,35(1):60-66.

[13] 刘殿魁,林宏. SH 波对双相介质界面附近圆形孔洞的散射[J]. 固体力学学报,2003,24(2):197-2004.
Liu Dian-kui, Lin Hong. Scattering of SH-waves by circular cavities near bi-material interface[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2003,24(2):197-2004.

[14] 齐辉,折勇,李宏亮,等. SH 波入射时垂直半空间中双相介质界面附近圆孔的动力分析[J]. 爆炸与冲击,2009,29(1):73-79.
Qi Hui, Shi Yong, Li Hong-liang, et al. Dynamic analysis for scattering of SH-wave by circular cavities near bi-material interfaces in a vertical half-space[J]. Explosion and Shock Waves, 2009,29(1):73-79.

[15] 齐辉,杨杰. SH 波入射双相介质半空间浅埋任意位置圆形夹杂的动力分析[J]. 工程力学,2012,29(7):320-327.
Qi Hui, Yang Jie. Dynamic analysis for shallowly buried circular inclusions of arbitrary positions impacted by SH-wave in bi-material half space[J]. Engineering Mechanics, 2012,29(7):320-327.

[16] Qi H, Yang J, Shi Y. Scattering of SH-wave by cylindrical inclusion near interface in bi-material half space[J]. Journal of Mechanics, 2011,27(1):37-45.

[17] Qi H, Yang J, Shi Y, Tian J Y. Dynamic analysis for circular inclusion near interfacial crack impacted by SH wave in half space[J]. Journal of Mechanics, 2012,28(1):143-151.

[18] Qi H, Yang J. Dynamic analysis for circular inclusions of arbitrary positions near interfacial crack impacted by SH-wave in half-space[J]. European Journal of Mechanics: A: Solids, 2012,36:18-24.

Steady state analysis for circular cavity impacted by transmitted SH wave in a bi-material half space

Qi Hui[1], Cai Li-ming[1], Luo Guang-long[1], Pan Xiang-nan[1],
Yang Jie[2], Wang Xian-zhang[3], Li Guo-wen[1], Jiang Jing-jiang[1]

(1. *College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin* 150001, *Heilongjiang, China*;
2. *School of Mechanical Engineering, Shanghai Dianji University, Shanghai* 201306, *China*
3. *China Construction First Engineering Division Corp. Ltd., Beijing* 100070, *China*)

Abstract: To study the way that the plane SH wave propagating in an elastic bi-material half space from medium Ⅰ to medium Ⅱ, the steady-state scattering of the transmitted wave by a circular cavity is analyzed by using Green function and integral equation methods on complex function description. The bi-material half space is divided into a quarter space medium Ⅰ and a quarter space medium Ⅱ with a circular cavity in it. Their Green functions are constructed as anti-plane point source response problem respectively. The total displacement fields of medium Ⅰ and medium Ⅱ are formulated as two parts' vector sum. The first part is interfacial integral of interactive force multiplied by corresponding Green function. The second part is plane displacement field formed by omitting the circular cavity. Steady state solution is obtained by determining the integral equations along interface with displacement continuity. Numerical results are presented to reveal the effects of locations and material parameters on circular cavity scattering.

Key words: solid mechanics; scattering; Green function; SH wave; a circular cavity; a bi-material half space; vibration and wave

(责任编辑 王小飞)