文章编号：1001-1455(2014)04-0501-07 **DOI**：10.11883/1001-1455(2014)04-0501-07

求解双曲守恒律方程的 WENO 型熵相容格式*

程晓晗[1]，封建湖[2]，聂玉峰[1]
(1. 西北工业大学应用数学系，陕西 西安 710072；
2. 长安大学理学院，陕西 西安 710064)

摘要：通过在单元交界面处进行高阶 WENO 重构，得到了一种求解双曲型守恒律方程的 WENO 型熵相容格式。用该格式对一维 Burgers 方程和 Euler 方程进行数值模拟，结果表明，该格式具有高精度、基本无振荡性等特点。

关键词：流体力学；WENO 型熵相容格式；WENO 重构；双曲守恒律
中图分类号：O354；O242 **国标学科代码**：1302564 **文献标志码**：A

许多物理模型都采用双曲型守恒律方程描述，如气体动力学中的 Euler 方程、浅水动力学中的浅水波方程和等离子物理学中的磁流体方程等。在一维情况下，有如下形式：

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})}{\partial x}=\boldsymbol{0} \tag{1}$$

式中：$x\in\mathbf{R}$，$t>0$，$\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$，是守恒型向量，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$是通量。求解式(1)的困难是，即使初始值充分光滑，解也会在有限时刻出现间断。当解出现间断时，古典解的理论不再适用，为此 Lax 提出了弱解的概念。然而弱解并不唯一，这就需要外加的标准确定满足相关物理特性的唯一解。定义熵对(U,F)，其中$U(\boldsymbol{u})$是$\boldsymbol{u}$的一个凸函数，即 Hessian 矩阵$U''(\boldsymbol{u})$对称正定，而$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$满足$(\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{U}'(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u})$。如果弱解$\boldsymbol{u}$满足熵稳定条件：$\partial U(\boldsymbol{u})/\partial t+\partial F(\boldsymbol{u})/\partial x\leqslant 0$，则$\boldsymbol{u}$是唯一的且具有物理意义。一些数值格式不满足熵稳定条件，如 Roe 格式，往往造成数值解产生膨胀激波等非物理现象[1]。为满足熵稳定，长期以来的做法是添加数值黏性，但应该添加多少数值黏性则依赖所求解的具体问题，且包含经验性常数。为研究熵稳定和数值黏性之间的关系，E. Tadmor[2]定义了一类熵守恒格式，并证明了一个三点格式只需含有比熵守恒格式更多的黏性则是熵稳定的。熵稳定格式的提出，为获得具有物理意义且数值上稳定的解提供了一种有效的方法。P. L. Roe[3]提出在熵守恒格式基础上加入 Roe 格式的数值黏性项，使新格式在保证熵稳定的同时保持了 Roe 格式对激波的良好捕捉效果，但该格式是一阶精度的。F. Ismail 等[4]发展了熵相容格式。对比熵稳定格式，熵相容格式进一步控制了激波处的熵增量，可有效避免膨胀激波以及间断处的伪振荡等现象。

本文中，进一步研究熵相容格式，通过在单元交界面处进行高阶重构，得到一类高精度的加权基本无振荡(weighted essentially non-oscillatory，WENO)型熵相容格式。最后，通过一些数值算例验证所构造的新格式的性能。

1 WENO 型熵相容格式

1.1 一维标量守恒律方程

1.1.1 熵守恒格式

设给定熵对(U,F)，定义熵变量$v=\partial U(u)/\partial u$、熵势$\psi(v(u))=v(u)f(u)-F(u)$，满足$f(v)=$

* **收稿日期**：2012-11-22；**修回日期**：2013-06-03
基金项目：国家自然科学基金项目(11171043)；中央高校基本科研业务费专项项目(CHD2010JC060)；
西北工业大学博士论文创新基金项目(CX201426)
作者简介：程晓晗(1987—)，男，博士研究生。

$\partial\psi(v)/\partial v$,则如数值通量 $f^{*}_{i+1/2}$ 满足:

$$(v_{i+1}-v_i)\,f^{*}_{i+1/2}=\psi(v_{i+1})-\psi(v_i) \tag{2}$$

那么,由相应格式得到的解可保持总熵 $\Delta x\sum_i U(u_i)$ 不变,其中数值熵通量为:

$$F_{i+1/2}=\frac{1}{2}(v_i+v_{i+1})\,f^{*}_{i+1/2}-\frac{1}{2}(\psi(v_i)+\psi(v_{i+1}))\tag{3}$$

与 F 相容。该格式被称为熵守恒格式,具有二阶精度[2]。

1.1.2 熵稳定格式

根据熵稳定条件,在激波等间断位置,总熵应该耗散(减少)。E. Tadmor[2]指出,一个三点格式只需含有比熵守恒格式更多的黏性则是熵稳定的。因此,P. L. Roe[3]提出用 Roe 格式的数值黏性项作为对熵守恒格式的补充,数值通量为:

$$f^{\mathrm{ES}}_{i+1/2}=f^{*}_{i+1/2}-\frac{1}{2}Q^{\mathrm{Roe}}_{i+1/2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}(v_{i+1}-v_i) \tag{4}$$

$$Q^{\mathrm{Roe}}_{i+1/2}=|a_{i+1/2}|$$

$$a_{i+1/2}=\begin{cases}\dfrac{f(u_{i+1})-f(u_i)}{u_{i+1}-u_i} & u_i\neq u_{i+1}\\ f'(u_i) & u_i=u_{i+1}\end{cases}$$

该格式保持了 Roe 格式对间断的良好捕捉效果,并且无需进行熵修正。

1.1.3 熵相容格式

考虑黏性形式的 Roe 格式数值通量[5]:

$$f^{\mathrm{Roe}}_{i+1/2}=\frac{1}{2}(f(u_i)+f(u_{i+1}))-\frac{1}{2}Q^{\mathrm{Roe}}_{i+1/2}(u_{i+1}-u_i)\tag{5}$$

解在跨过激波时,由算术平均通量 $\frac{1}{2}(f(u_i)+f(u_{i+1}))$ 产生的熵增为 $O\,[|u_{i+1}-u_i|]^3$,当采用熵守恒通量 $f^{*}_{i+1/2}$ 代替 $\frac{1}{2}(f(u_i)+f(u_{i+1}))$ 时,熵增变为零。为了保证解的单调性,需在数值黏性项的特征速度中,补充一个由特征速度差分的绝对值,抵消跨过激波时产生的具有激波强度立方倍的熵增[4],于是有:

$$f^{\mathrm{EC}}_{i+1/2}=f^{*}_{i+1/2}-\frac{1}{2}(Q^{\mathrm{Roe}}_{i+1/2}+\alpha|\Delta a_{i+1/2}|)\,(u_{i+1}-u_i)=$$

$$f^{*}_{i+1/2}-\frac{1}{2}(Q^{\mathrm{Roe}}_{i+1/2}+\alpha|\Delta a_{i+1/2}|)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}(v_{i+1}-v_i)\tag{6}$$

式中:$\Delta a_{i+1/2}=f'(u_{i+1})-f'(u_i)$,取 $\alpha=1/6$。式(6)定义的数值通量跨过激波时具有足够熵增且数值解保持单调,具有这种性质的通量称为熵相容通量。熵相容格式是目前估计熵的变化最精确的一种熵稳定格式。

1.1.4 WENO 型熵相容格式

在熵相容格式中,由于数值黏性项包含了熵变量的差分(其中,v_i 和 v_{i+1} 分别来自左右两个计算网格上的单元平均),这就造成数值黏性项只有一阶精度。为了进一步提高格式的精度,我们引入近年发展起来的 WENO 重构方法。WENO 方法是通过构造基于不同模板上的插值多项式的加权凸组合获得单元交界面处的高阶近似,通过设计凸组合的权值使在光滑区域 WENO 格式达到尽可能高的精度,而在间断区域 WENO 方法自适应地选择相对光滑的模板构造插值多项式,从而避免伪振荡的产生。本文中采用五阶精度的 WENO 重构获得单元交界面处的近似 $v^{-}_{i+1/2}$ 和 $v^{+}_{i+1/2}$,分别代替原数值通量中的 v_i 和 v_{i+1},过程参见文献[6],由此得到的 WENO 型熵相容通量为:

$$f^{\mathrm{EC\text{-}WENO}}_{i+1/2}=f^{*}_{i+1/2}(v^{-}_{i+1/2},v^{+}_{i+1/2})-$$

$$\frac{1}{2}(Q^{\mathrm{Roe}}_{i+1/2}+\alpha|a_{i+1/2}|)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}(v^{+}_{i+1/2}-v^{-}_{i+1/2})\tag{7}$$

1.2　一维守恒律方程组

气体动力学中的 Euler 方程为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})}{\partial x}=\boldsymbol{0} \tag{8}$$

式中：$\boldsymbol{u}=(\rho,\rho u,E)^{\mathrm{T}}$，是守恒型向量，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})=(\rho u,\rho u^2+p,u(E+p))^{\mathrm{T}}$，是通量。$\rho$ 是密度，u 是流体速度，p 是压力，E 是体积总能，满足状态方程 $E=\dfrac{p}{\gamma-1}+\dfrac{1}{2}\rho u^2$，$\gamma=1.4$，是比热比。

Euler 方程具有熵对 $U(\boldsymbol{u})=-\rho S$ 和 $F(\boldsymbol{u})=-m\mathrm{S}$，其中 $m=\rho u$，是动量，$S=\ln(p\rho^{-\gamma})$，是 Euler 方程的熵。熵变量为 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u})=(\gamma-1)\left(\dfrac{\gamma-S}{\gamma-1}-\dfrac{\rho u^2}{2p},\dfrac{m}{p},-\dfrac{\rho}{p}\right)^{\mathrm{T}}$，熵势为 $\psi(\boldsymbol{u})=(\gamma-1)m$。

1.2.1　熵守恒格式

对于守恒律系统，一般采用逐段分解的构造方法[7]获得熵守恒通量。在该方法中，保持总熵不变的数值通量可以表示为沿熵变量空间内不同路径的积分和的形式。虽然该方法适用于各种守恒律系统，但其计算量过大并且有时候会产生数值不稳定[8]。对于 Euler 方程和浅水波方程，根据其特定的熵函数，他们的熵守恒通量有比较简单的构造方法。

其中，Euler 方程的熵守恒通量的计算方法如下。定义参数变量 $\boldsymbol{z}$ 为：

$$\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z^1\\z^2\\z^3\end{pmatrix}=\sqrt{\frac{\rho}{p}}\begin{pmatrix}1\\u\\p\end{pmatrix} \tag{9}$$

则熵守恒通量为：

$$\boldsymbol{f}^{*}_{i+1/2}=(f^1_{i+1/2},f^2_{i+1/2},f^3_{i+1/2})^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

式中：

$$\begin{cases}f^1_{i+1/2}=\overline{z^2}_{i+1/2}\ (z^3)^{\ln}_{i+1/2}\\[2ex] f^2_{i+1/2}=\dfrac{\overline{z^3}_{i+1/2}}{\overline{z^1}_{i+1/2}}+\dfrac{\overline{z^2}_{i+1/2}}{\overline{z^1}_{i+1/2}}f^1_{i+1/2}\\[2ex] f^3_{i+1/2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\overline{z^2}_{i+1/2}}{\overline{z^1}_{i+1/2}}\left(\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\dfrac{(z^3)^{\ln}_{i+1/2}}{(z^1)^{\ln}_{i+1/2}}+f^2_{i+1/2}\right)\end{cases}$$

$\bar{a}$ 是算术平均，即 $\bar{a}_{i+1/2}=\dfrac{a_i+a_{i+1}}{2}$；$a^{\ln}$ 是对数平均，定义为 $a^{\ln}_{i+1/2}=\dfrac{a_{i+1}-a_i}{\ln a_{i+1}-\ln a_i}$。

1.2.2　熵稳定格式

与标量守恒律一样，对熵守恒格式添加适当的黏性，可使之满足离散熵不等式。考虑用 Roe 格式的数值黏性项作为补充，得到关于 Euler 方程的熵稳定格式，数值通量为：

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{ES}}_{i+1/2}=\boldsymbol{f}^{*}_{i+1/2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v}_{i+1}-\boldsymbol{v}_i) \tag{11}$$

式中：$\boldsymbol{R}$ 为 Roe 矩阵的右特征向量集组成的矩阵，$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&1&1\\ \hat{u}-\hat{a}&\hat{u}&\hat{u}+\hat{a}\\ \hat{H}-\hat{u}\hat{a}&\frac{1}{2}\hat{u}^2&\hat{H}+\hat{u}\hat{a}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(|\hat{u}-\hat{a}|,|\hat{u}|,|\hat{u}+\hat{a}|)$，$\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}\left(\dfrac{\hat{\rho}}{2\gamma},\dfrac{(\gamma-1)\hat{\rho}}{\gamma},\dfrac{\hat{\rho}}{2\gamma}\right)$，这里的 $\boldsymbol{S}$ 用来修正 $\boldsymbol{\Lambda}$ 满足 $\boldsymbol{R}^{-1}\mathrm{d}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{v}$。$\hat{\rho}$、$\hat{u}$ 和 $\hat{H}$ 分别为密度 ρ、速度 u 和总焓 $H=(E+p)/\rho$ 的 Roe 平均，$\hat{a}$ 为平均音速，表达式分别为：$\hat{q}=\dfrac{q_i\sqrt{\rho_i}+q_{i+1}\sqrt{\rho_{i+1}}}{\sqrt{\rho_i}+\sqrt{\rho_{i+1}}}(q=\rho,u,H)$，$\hat{a}=\sqrt{(\gamma-1)(\hat{H}-\hat{u}^2/2)}$。

1.2.3 熵相容格式

类似标量守恒律,为了抵消解在跨过激波时产生的熵增,需要对 $\boldsymbol{D}$ 进行修正,令:

$$\boldsymbol{D}_1=(\boldsymbol{\Lambda}+\alpha\Delta\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{S} \tag{12}$$

式中:$\Delta\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(|(u_{i+1}-a_{i+1})-(u_i-a_i)|,|(u_{i+1}-u_i)|,|(u_{i+1}+a_{i+1})-(u_i+a_i)|)$,于是可以得到 Euler 方程的熵相容格式,数值通量为:

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{EC}}_{i+1/2}=\boldsymbol{f}^{*}_{i+1/2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v}_{i+1}-\boldsymbol{v}_i) \tag{13}$$

1.2.4 WENO 型熵相容格式

最后,为了提高格式的精度,在单元交界面处采用五阶 WENO 重构获得 $\boldsymbol{v}^{-}_{i+1/2}$ 和 $\boldsymbol{v}^{+}_{i+1/2}$,分别代替 $\boldsymbol{v}_i$ 和 $\boldsymbol{v}_{i+1}$,得到 WENO 型熵相容格式,数值通量为:

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{EC\text{-}WENO}}_{i+1/2}=\boldsymbol{f}^{*}_{i+1/2}(\boldsymbol{v}^{-}_{i+1/2},\boldsymbol{v}^{+}_{i+1/2})-\frac{1}{2}\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v}^{+}_{i+1/2}-\boldsymbol{v}^{-}_{i+1/2}) \tag{14}$$

对于一维守恒律方程组,本文中仅以气体动力学中的 Euler 方程为例,设计 WENO 型熵相容格式,其他方程可以参照 Euler 方程做一些相应的修改,在此不再赘述。

2 数值模拟算例

采用半离散格式:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\Delta x}(\boldsymbol{f}_{i+1/2}-\boldsymbol{f}_{i-1/2}) \tag{15}$$

时间上的推进一律采用三阶强稳定的 Runge-Kutta 方法[9]。为了比较,也给出了相应算例的熵相容格式(EC 格式)的计算结果。

2.1 线性对流方程连续初值问题

在区域 $x\in[-1,1]$上求解初值问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0,\qquad u_0(x)=\sin(\pi x)$$

采用周期边界条件,计算到 $t=10$。

本算例可以用来测试格式的收敛性和精度,表 1 给出了相应的误差 L_1 和 L_∞,充分说明了 WENO 型熵相容格式(EC-WENO 格式)的精度能达到五阶。

表 1 EC-WENO 格式的数值精度

Table 1 Numerical accuracy of EC-WENO scheme

网格数	L_1	精度阶	L_∞	精度阶
20	$1.420\,0\times10^{-2}$		$1.020\,0\times10^{-2}$	
40	$4.653\,5\times10^{-4}$	4.931 4	$3.859\,9\times10^{-4}$	4.723 9
80	$1.447\,5\times10^{-5}$	5.006 7	$1.310\,2\times10^{-5}$	4.880 7
160	$4.515\,7\times10^{-7}$	5.002 5	$4.137\,0\times10^{-7}$	4.985 1

2.2 无黏 Burgers 方程间断初值问题

在区域 $x\in[-1,1]$上求解初值问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)=0,\qquad u_0(x)=\begin{cases}1 & |x|<1/3\\ -1 & 1/3\leqslant|x|\leqslant1\end{cases}$$

采用周期边界条件,取 CFL 系数为 0.8,空间网格数为 40,计算到 $t=0.3$。

本算例的解主要包括 2 部分:在左边 $x=-1/3$ 处由 -1 到 1 的跳跃产生了一个稀疏波,在右边 $x=1/3$ 处由 1 到 -1 的跳跃产生了一个定常激波。计算结果如图 1 所示。由图可知,EC-WENO 格式算得的解不仅准确地捕捉到稀疏波,而且在间断位置也没有产生伪振荡,符合“高分辨率”的特性。

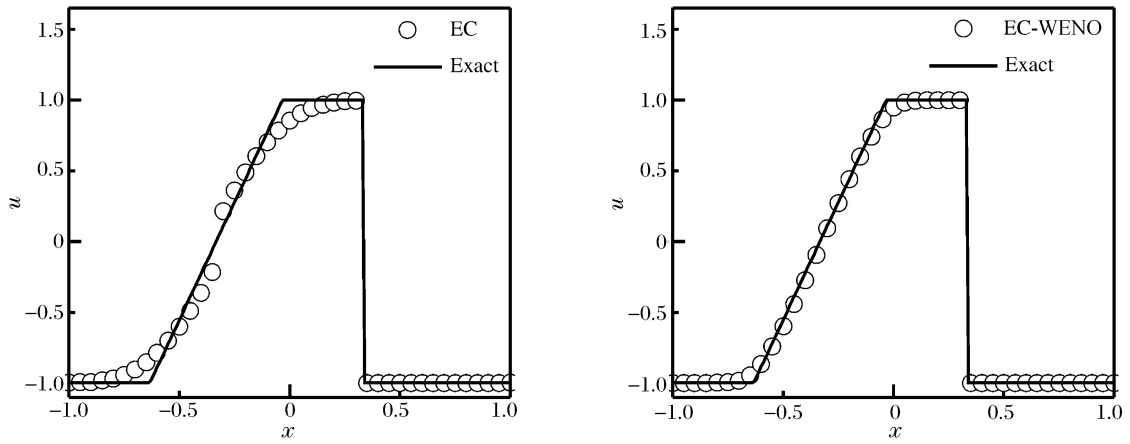

图 1　无黏 Burgers 方程间断初值问题

Fig. 1　Discontinuous initial value problem of Burgers equation

2.3　一维 Euler 方程 Sod 激波管问题

在区域[−0.5,0.5]上求解初值问题：

$$(\rho,u,p)=\begin{cases}(1.0,0,1.0) & x<0\\(0.125,0,0.1) & x>0\end{cases}$$

采用 Neumann 边界条件，取 CFL 系数为 0.4，空间网格数为 100，计算到 $t=0.1$。

精确解包括稀疏波、接触间断和激波。密度的计算结果如图 2 所示。由图可知，EC-WENO 格式比 EC 格式能对解的结构有更准确地捕捉，尤其是对激波的捕捉非常锐利。

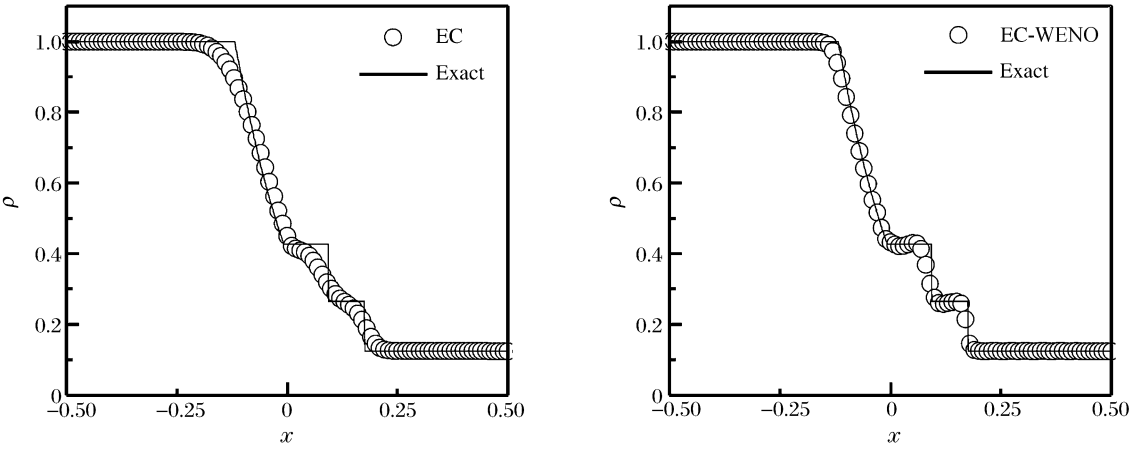

图 2　一维 Euler 方程 Sod 激波管问题

Fig. 2　Sod shock tube problem of 1D Euler equation

2.4　一维 Euler 方程低密度流问题

在区域[−0.5,0.5]上求解初值问题：

$$(\rho,u,p)=\begin{cases}(1.0,-1.5,0.4) & x<0\\(1.0,1.5,0.4) & x>0\end{cases}$$

采用 Neumann 边界条件，取 CFL 系数为 0.4，空间网格数为 100，计算到 $t=0.05$。

精确解包括 2 个强稀疏波和 1 个平凡的接触间断。由于中间部分的压力非常小，接近于真空状态，很多数值方法容易在该位置出现压力为负的情况(如 Roe 格式)，导致计算失败。压力的计算结果如图 3 所示。由图可知，EC-WENO 格式能成功地计算低密度流问题，且效果较好，能有效避免非物理现象(如负压力)。

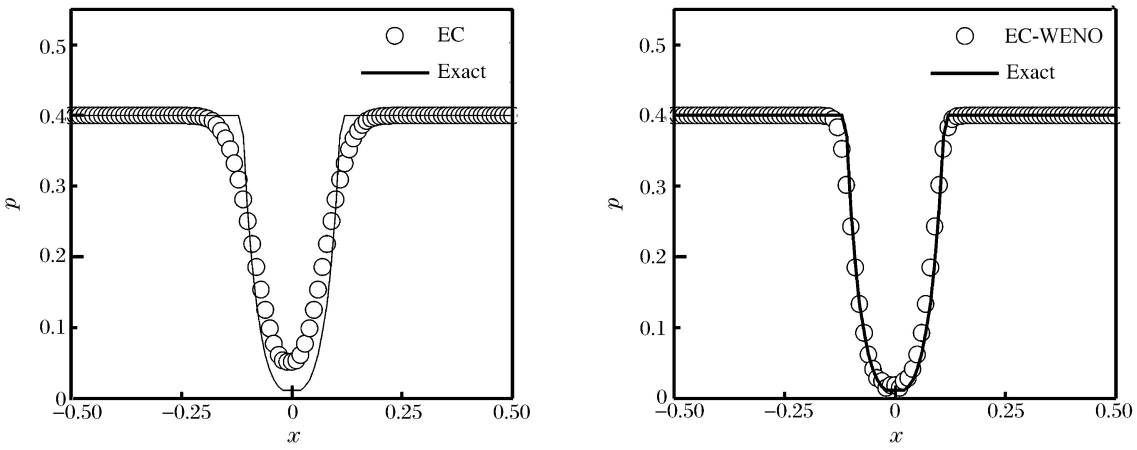

图 3 一维 Euler 方程低密度流问题

Fig. 3 Low density problem of 1D Euler equation

2.5 一维 Euler 方程强稀疏波问题

在区域[−10,15]上求解初值问题：

$$(\rho,u,p)=\begin{cases}(1.0,0,100\ 000) & x<0\\(0.01,0,1\ 000) & x>0\end{cases}$$

采用 Neumann 边界条件，取 CFL 系数为 0.4，空间网格数为 100，计算到 $t=0.01$。

精确解包括强稀疏波、接触间断和激波。密度的计算结果如图 4 所示。由图可知，EC-WENO 格式取得了非常良好的效果，解在稀疏波有一个平滑的过渡，且在波头波尾位置都非常贴近精确解。

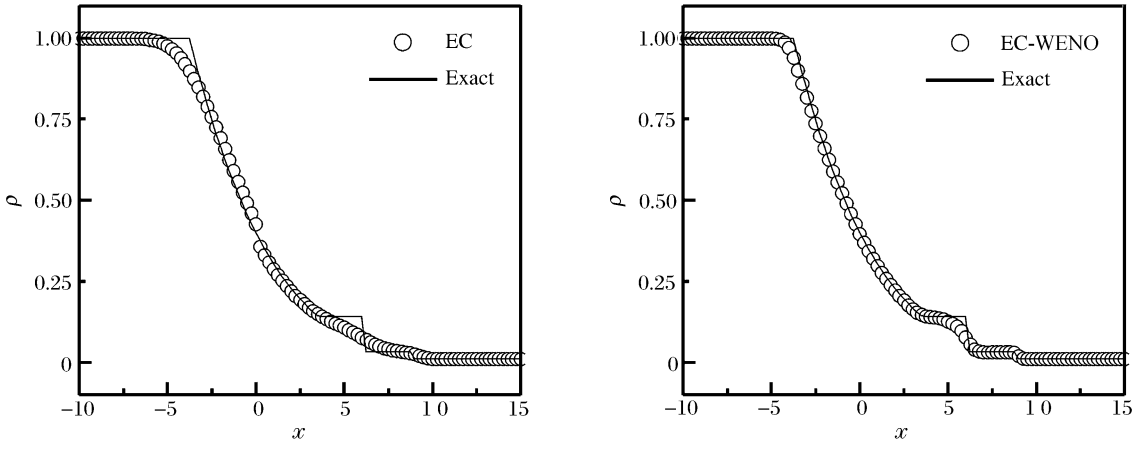

图 4 一维 Euler 方程强稀疏波问题

Fig. 4 Density of strong expansion problem of 1D Euler equation

3 结 论

以熵相容格式为基础，通过在单元交界面处进行 WENO 重构，构造了一类求解双曲守恒律方程的 WENO 型熵相容格式，有效地提高了熵相容格式的精度。数值模拟结果表明，新格式具有高精度、基本无振荡性等特点。

参考文献：

[1] Roe P L. Approximate Rieman solvers, parameter vectors, and difference schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1981,43(2):357-372.

[2] Tadmor E. The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws, Ⅰ[J]. Mathematics of Computation, 1987,49(179):91-103.

[3] Roe P L. Affordable, entropy-consistent, flux functions[C]// Oral Talk at Eleventh International Conference on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. Lyon, France, 2006.

[4] Ismail F, Roe P L. Affordable, entropy-consistent Euler flux functions, Ⅱ: Entropy production at shocks[J]. Journal of Computational Physics, 2009,228(15):5410-5436.

[5] Tadmor E. Numerical viscosity and the entropy conditions for conservative difference schemes[J]. Mathematics of Computation, 1984,43(168):369-381.

[6] Liu X D, Osher O, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schems[J]. Journal of Computational Physics, 1994,115(1):200-212.

[7] Tadmor E. Entropy stability theory for difference approximations of nonlinear conservation laws and related time-dependent problems[J]. Acta Numerica, 2003,12:451-512.

[8] Fjordholm U S, Mishra S, Tadmor E. Energy preserving and energy stable schemes for the shallow water equations[R]. Hong Kong: Foundations of Computational Mathematics, 2008.

[9] Gottlieb S, Shu C W, Tadmor E. High order time discretizations with strong stability properties[J]. SIAM Review, 2001,43(1):89-112.

WENO type entropy consistent scheme for hyperbolic conservation laws*

Cheng Xiao-han[1], Feng Jian-hu[2], Nie Yu-feng[1]

(1. *Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072, *Shaanxi, China*;
2. *College of Science, Chang'an University, Xi'an* 710064, *Shaanxi, China*)

Abstract: Compared with entropy stable schemes, entropy consistent schemes control entropy production more exactly and effectively eliminate phenomena such as expansion shocks and spurious oscillations. By using WENO (weighted essentially non-oscillatory) reconstruction of higher order at cell interfaces, a WENO type entropy consistent scheme for hyperbolic conservation laws is presented. The one-dimentional Burgers equation and Euler equations are used to test the proposed scheme. The numerical experiments demonstrate that the scheme is accurate and essentially non-oscillatory.

Key words: fluid mechanics; WENO type entropy consistent scheme; WENO reconstruction; hyperbolic conservation laws

---

* Received 22 November 2012; Revised 3 June 2013
Supported by the National Natural Science Foundation of China (11171043)
Corresponding author: Nie Yu-feng, yfnie@nwpu.edu.cn

(责任编辑　丁　峰)